Journal

95882

für die

reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826.

Herausgegeben

von

L. Fuchs.

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich Preussischer Behörden.

Band 121.

In vier Heften.

Berlin,
S.W. Anhaltstrasse 12.
Druck und Verlag von Georg Reimer.
1900.

Inhaltsverzeichniss des Bandes 121.

Seite

Appell, Paul. Sur une forme générale des équations de la dynamique . . 310—319

Boehm, Karl. Die Existenzbedingungen eines von den ersten und zweiten Differentialquotienten der Coordinaten abhängigen kinetischen Potentials 124—140

Dedekind, R. Ueber die Anzahl der Idealklassen in reinen kubischen Zahlkörpern . . . . . 40—123

Fuchs, Richard. Ueber lineare Differentialgleichungen, welche mit ihrer Adjungirten zu derselben Art gehören . . . . . 205—209

Grünfeld, E. Ueber die einer linearen Differentialgleichung n-ter Ordnung adjungirten und associirten Differentialgleichungen n-ter Ordnung . . . 218—229

Hamburger, M. Ueber die singulären Lösungen der algebraischen Differentialgleichungen höherer Ordnung . . . . . 265—299

Koenigsberger, Leo. Ueber die allgemeinen kinetischen Potentiale . . . 141—167

— — Ueber die Entwickelungsform algebraischer Functionen und die Irreductibilität algebraischer Gleichungen . . . . . 320—359

Kötter, Fritz. Ein bemerkenswerther Zusammenhang zwischen der Statik biegsamer unausdehnbarer Flächen und der Lehre von der Bewegung eines Körpers in einer Flüssigkeit . . . . . 300—309

Meder, Alfred. Zur Theorie der singulären Punkte einer Raumcurve . . 230—244

Pirondini, Geminiano. Sur quelques lignes liées à l'hélice cylindrique . 245—264

Schlesinger, Ludwig. Ueber projective Substitutionen, die einen Kreis ungeändert lassen . . . . . 168—176

— — Ueber vertauschbare lineare Substitutionen . . . . . 177—187

Thomé, L. W. Ueber lineare Differentialgleichungen mit mehrwerthigen algebraischen Coefficienten . . . . . 1— 39

Timerding, H. E. Ueber eine Kugelschar . . . . . 188—195

Wallenberg, Georg. Ueber *Riccati*sche Differentialgleichungen höherer Ordnung . . . . . 196—199

— — Zur Theorie der Differentialinvarianten . . . . . 200—204

— — Die Differentialgleichungen, deren allgemeines Integral eine lineare gebrochene Function der willkürlichen Constanten ist . . . . . 210—217

Ueber lineare Differentialgleichungen mit mehrwerthigen algebraischen Coefficienten.

(Dritte Abhandlung; die früheren Abhandlungen siehe Band 115 und Band 119 dieses Journals.)

(Von Herrn *L. W. Thomé* in Greifswald.)

Es war in den Abhandlungen des Verfassers Band 115 No. 8 und Band 119 No. 2 dieses Journals gezeigt, dass die linearunabhängigen Integrale einer homogenen linearen Differentialgleichung mit mehrwerthigen algebraischen Cofficienten die Integrale einer homogenen linearen Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten sind, und dass man letztere Differentialgleichung immer aufstellen kann. Diese Differentialgleichung wird hier für den Fall, dass der Differentialausdruck derselben durch ein System normaler Differentialausdrücke darstellbar ist, zur Darstellung der Integrale der linearen Differentialgleichung mit mehrwerthigen algebraischen Coefficienten verwandt.

1.

Die homogene lineare Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten, deren Integrale die linearunabhängigen Integrale der homogenen linearen Differentialgleichung mit mehrwerthigen algebraischen Coefficienten sind.

Die vorgelegte homogene lineare Differentialgleichung mit dem Coefficienten der höchsten Ableitung gleich 1 enthalte in den Coefficienten rational neben der unabhängigen Variablen x eine oder mehrere irreductible algebraische Functionen. Es wird das Schema von drei solchen Functionen u, v, w angenommen. In den Gleichungen derselben sind die Coefficienten ganze rationale Functionen von x, der Coefficient der höchsten Potenz gleich 1. Wenn alle Combinationen der Zweige der algebraischen Functionen zulässig sind, ohne dass einer der Nenner in den Coefficienten der Differential-

gleichung identisch verschwindet, so sind diese Coefficienten unter der Form $\frac{H(x,u,v,w,)}{K(x)}$ darstellbar, wo H und K ganze rationale Ausdrücke der angegebenen Variablen sind.

Man kann die in Zusammenhang stehenden Combinationen der Zweige von u, v, w rational durch x und eine andere irreductible algebraische Function mit soviel Zweigen, als Combinationen in Zusammenhang stehen, ausdrücken. Diese Ausdrücke sind in Abhandlung Band 119 No. 1 gegeben. Wenn nun eine Combination der Zweige von u, v, w genommen wird, bei welcher keiner der Nenner in den Coefficienten der Differentialgleichung identisch verschwindet, so kann man an Stelle von u, v, w jene algebraische Function in die Coefficienten einführen. Auf diese Weise wird die ursprüngliche Differentialgleichung durch eine oder mehrere Differentialgleichungen vertreten, bei welchen in den Coefficienten der einzelnen Differentialgleichung nur eine einzige algebraische Function rational neben der unabhängigen Variablen vorkommt.

Die Darstellung der Integrationsmethoden wird hier für den Fall gegeben, wo die Coefficienten der Differentialgleichung eine oder mehrere algebraische Functionen rational enthalten und alle Combinationen der Zweige zulässig sind, ohne dass einer der Nenner identisch verschwindet. Die in Zusammenhang stehenden Combinationen der Zweige der algebraischen Functionen können dabei nach dem Vorhergehenden ermittelt werden. Sind z. B. die Grade der irreductiblen Gleichungen in Bezug auf u, v, w relative Primzahlen, so stehen alle Combinationen in Zusammenhang (Abh. Band 115 No. 1, Band 119, No. 1). Wenn nicht alle Combinationen in Zusammenhang stehen, so kann bei einer Gruppe zusammenhängender Combinationen die oben genannte Differentialgleichung, welche an Stelle dieser Combinationen nur eine einzige algebraische Function neben der unabhängigen Variablen rational in den Coefficienten enthält, in Betracht gezogen werden.

Die homogene lineare Differentialgleichung sei m-ter Ordnung

$$F_m(y, u, v, w, x) = 0. \tag{1.}$$

Der Coefficient der höchsten Ableitung ist gleich 1, die übrigen Coefficienten haben die oben angegebene Form $\frac{H(x,u,v,w)}{K(x)}$, H und K sind ganze rationale Ausdrücke der vorkommenden Variablen. Die singulären Punkte der Differentialgleichung sind in Abhandlung Band 115 No. 1 angegeben. Die

algebraische Function u habe α Zweige, v deren β, w deren γ. Jeder der $\alpha\beta\gamma$ Combinationen der Zweige kommen m linearunabhängige Integrale der Differentialgleichung (1.) zu. Diese den $\alpha\beta\gamma$ Combinationen entsprechenden m $\alpha\beta\gamma$ Integralfunctionen brauchen nicht alle unter einander linearunabhängig zu sein (die Coefficienten der Differentialgleichung mögen eine oder mehrere algebraischen Functionen enthalten) gemäss Abh. Bd. 115 No. 8 (6.), Bd. 119 No. 2, II. Es seien N unter diesen Integralfunctionen linearunabhängig, dieselben erfüllen eine homogene lineare Differentialgleichung N-ter Ordnung

$$\Phi_N(y, x) = 0, \tag{2.}$$

deren Coefficienten rationale Functionen von x sind, der Coefficient der höchsten Ableitung gleich 1, mit Constanten, die algebraisch mit den Constanten in (1.) zusammenhängen. Diese Differentialgleichung wird aus (1.) nach den Angaben in Abh. Bd. 115 No. 8, Abh. Bd. 119 No. 2 vermittelst algebraischer Operationen ermittelt.

Es sei also diese Differentialgleichung (2.) aufgestellt. Dieselbe wird im Folgenden die *Connexdifferentialgleichung* von der Differentialgleichung (1.) genannt werden. Ob die Integrale der Differentialgleichung $F_m(y, u, v, w, x) = 0$ (1.) die Differentialgleichung $\Phi_N(y, x) = 0$ (2.) erfüllen, kann man prüfen gemäss den Angaben Abh. Bd. 115 S. 143. Wenn man ferner bei einem nicht singulären Punkte der Differentialgleichungen (1.) und (2.) bei jeder der $\alpha\beta\gamma$ Combinationen der Zweige von u, v, w m Integrale von $F_m = 0$ (1.) entwickelt, so muss es N unter diesen Entwickelungen geben derart, dass die Determinante derselben und ihrer $N-1$ ersten Ableitungen in diesem Punkte nicht verschwindet. N solcher Functionen sind anzugeben. Damit ist die Richtigkeit der Differentialgleichung (2.) nachträglich vollständig bestätigt.

Von dem Differentialausdrucke $\Phi_N(y, x)$ in (2.) *soll nun hier vorausgesetzt werden, dass derselbe durch ein System normaler Differentialausdrücke darstellbar ist.*

Dieses ist nach den Angaben in Abh. Bd. 96 zweite Abtheilung (vgl. hierbei Abh. Bd. 117 S. 198, 199) zu ermitteln. Im Folgenden kommt die in Abh. Bd. 96 No. 10 definirte canonische Form des Differentialausdruckes $\Phi_N(y, x)$ zur Anwendung. Jede Differentialgleichung, deren Integrale $\Phi_N = 0$ erfüllen, mit normalem Differentialausdrucke und von höchster Ordnung unter denen mit demselben determinirenden Factor sei aufgestellt. Die Integrale dieser Differentialgleichungen mit verschiedenen determinirenden Factoren

sind unter einander linearunabhängig und werden in der homogenen linearen Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten und dem Coefficienten der höchsten Ableitung gleich 1 $F_{(1)}(x, y) = 0$ vereinigt. Jene einzelnen Differentialgleichungen sind die ***Hauptunterdifferentialgleichungen*** von $F_{(1)}(y, x) = 0$. Dann ist $\Phi_N(y, x)$ durch das System

$$(3.) \qquad F_{(1)}(y, x) = y_1, \qquad \Psi(y_1, x)$$

darstellbar, wo $\Psi(y_1, x)$ sich wieder als homogenen linearen Differentialausdruck mit rationalen Coefficienten ergiebt, der durch ein System normaler Differentialausdrücke darstellbar ist. Hier ist $F_{(1)}(y, x)$ der erste canonische Bestandtheil von $\Phi_N(y, x)$. In gleicher Weise wird der erste canonische Bestandtheil von Ψ gebildet, derselbe ist der zweite canonische Bestandtheil von Φ_N u. s. w. ***Das System der canonischen Bestandtheile***

$$(4.) \qquad F_{(1)}(y, x) = y_1, \quad F_{(2)}(y_1, x) = y_2, \ \ldots, \ F_{(r)}(y_{r-1}, x)$$

bildet die ***canonische Form*** von $\Phi_N(y, x)$. Nach der in Bd. 96 No. 10 angewandten Terminologie sind diese canonischen Bestandtheile normale canonische Bestandtheile. Ein nicht normaler canonischer Bestandtheil kommt, da $\Phi_N(y, x)$ durch ein System normaler Differentialausdrücke darstellbar sein soll, hier nicht vor.

2.

Der Differentialausdruck der Connexdifferentialgleichung aus No. 1 enthalte nur einen canonischen Bestandtheil.

Bei der in voriger Nummer über den Differentialausdruck $\Phi_N(y, x)$ No. 1 (2.) gemachten Voraussetzung ist zunächst als ein Hauptfall derjenige zu betrachten, wo Φ_N nur ***einen*** canonischen Bestandtheil enthält. Es giebt also eine oder mehrere getrennte homogene lineare Differentialgleichungen, in denen normale Differentialausdrücke mit unter einander verschiedenen determinirenden Factoren gleich Null gesetzt sind (Hauptunterdifferentialgleichungen), deren Integrale zusammen N linearunabhängige Integrale von $\Phi_N(y, x) = 0$ sind. Dieser Fall ist bereits in Abh. Bd. 115 No. 9 in der Hauptsache behandelt. — Hierher gehört auch die Differentialgleichung $F_m = 0$ No. 1 (1.), welche nur reguläre Integrale hat (Abh. Bd. 115 No. 5), dann ist Φ_N No. 1 (2.) ein regulärer Differentialausdruck; in diesem Falle wird die Differentialgleichung $F_m = 0$ direct behandelt (Abh. Bd. 115 No. 6). —

Es ist in Abhandlung Band 115 No. 9 zunächst gezeigt, wie sich

Differentialausdrücke $F_m(y, u, v, w, x)$ No. (1.) und $\Phi_N(y, x)$ No. (2.) von der angegebenen Eigenschaft bilden lassen.

Sodann wird bei einem Complex von R zusammenhängenden Combinationen der Zweige von u, v, w bei dem singulären Punkte $x = a$, $x - a = \zeta^R$ gesetzt, wodurch sich

$$(1.) \qquad F_m(y, u, v, w, x) = \left(\frac{dx}{d\zeta}\right)^{-m} G_m(y, u, v, w, \zeta)$$

ergiebt. $G_m = 0$ hat in der Umgebung von $\zeta = 0$, abgesehen von diesem Punkte, einwerthige und stetige Coefficienten, die für $\zeta = 0$ in endlicher Ordnung unendlich werden. Aus den Hauptunterdifferentialgleichungen von $\Phi_N(y, x) = 0$ geht hervor, dass $G_m = 0$ bei $\zeta = 0$ m linearunabhängige Integrale unter der Form von normalen Integralen hat (Abhandlung Bd. 115 S. 145). Nachdem die Existenz von solchen Integralen festgestellt ist, werden die ***normalen Integrale direct aus der Differentialgleichung*** $G_m = 0$ ***bestimmt,*** wie in Abhandlung Band 115 S. 146, 147 auseinandergesetzt ist; vgl. die ausführlichere Untersuchung in der vorliegenden Abhandlung No. 6 V, No. 7 II.

3.

Der Differentialausdruck der Connexdifferentialgleichung aus No. 1 enthalte mehrere canonische Bestandtheile.

Der durch ein System normaler Differentialausdrücke darstellbare Differentialausdruck $\Phi_N(y, x)$ No. 1 (2.) enthalte in der canonischen Form No. 1 (4.) mehrere canonische Bestandtheile. Es ist hier zunächst zu zeigen, wie man eine Differentialgleichung $F_m(y, u, v, w, x) = 0$ No. 1 (1.) bilden kann, so dass der Differentialausdruck $\Phi_N(y, x)$ der Connexdifferentialgleichung No. 1 (2.) durch ein System normaler Differentialausdrücke darstellbar ist, und die canonische Form desselben mehrere canonische Bestandtheile enthält.

I. Ein Differentialausdruck $F_m(y, u, v, w, x)$ sei durch das System gegeben

$$(1.) \qquad f_r(y, x) = y_1, \qquad g_s(y_1, u, v, w, x),$$

wo f_r ein homogener linearer Differentialausdruck $r$ter Ordnung mit rationalen Functionen von x als Coefficienten, g_s ein homogener linearer Differentialausdruck $s$ter Ordnung mit Coefficienten der Form $\frac{H(x, u, v, w)}{K(x)}$, H und K ganze rationale Ausdrücke der angegebenen Variablen, u, v, w die algebraischen Functionen aus No. 1; die Coefficienten der höchsten Ableitungen in f_r

und g_s gleich 1. Die Connexdifferentialgleichung (s. No. 1) von $g_s(y, u, v, w, x) = 0$ sei $\Psi_M(y, x) = 0$ Mter Ordnung. Alsdann wird die Connexdifferentialgleichung von

(2.) $$F_m(y, u, v, w, x) = 0$$

dargestellt durch

(3.) $$f_r(y, x) = y_1, \qquad \Psi_M(y_1, x) = 0,$$

wie sich auf folgende Weise ergiebt. Unter den s $\alpha\beta\gamma$ Integralen von $g_s = 0$, die den $\alpha\beta\gamma$ Combinationen der Zweige von u, v, w entsprechen, sind M linearunabhängig. Dieselben sind M Integrale von $\Psi_M(y, x) = 0$ und seien durch

(4.) $$y^{(n)} \qquad (n = 1, \ldots, M)$$

bezeichnet. Functionen, welche

(5.) $$f_r(y, x) = y^{(n)} \qquad (n = 1, \ldots, M)$$

erfüllen, seien

(6.) $$Y^{(n)} \qquad (n = 1, \ldots, M)$$

r linearunabhängige Integrale von $f_r(y, x) = 0$ seien

(7.) $$y_{(1)}, \quad y_{(2)}, \cdots, y_{(r)}.$$

Die $r+M$ Functionen

(8.) $$y_{(1)}, \quad y_{(2)}, \cdots, y_{(r)}, \quad Y^{(1)}, \quad Y^{(2)}, \ldots, Y^{(M)}$$

sind unter einander linearunabhängig. Diese $r+M$ Functionen sind Integrale von (2.) und jedes Integral von (2.) ist durch Functionen aus (8.) linear und homogen mit constanten Coefficienten darstellbar. Andererseits sind die Functionen (8.) Integrale der Differentialgleichung (3.) $(r+M)$-ter Ordnung. Es ist also (3.) die Connexdifferentialgleichung von (2.).

Nunmehr sei $f_r(y, x)$ durch ein System normaler Differentialausdrücke darstellbar und die canonische Form von f_r enthalte mehrere canonische Bestandtheile. Ein solcher Differentialausdruck wird gemäss Abhandlung Bd. 96 No. 12 II (vergl. Abh. Bd. 117 No. 4 I) hergestellt. $g_s(y, u, v, w, x)$ werde in folgender Weise gebildet. $h^{(\lambda)}(y, u, v, w, x)$ sei ein regulärer Differentialausdruck, der u, v, w in den Coefficienten enthält (Abhandlung Bd. 115 No. 5). Es werde

(9.) $$H^{(\lambda)}(y, u, v, w, x) = e^{W_\lambda} h^{(\lambda)}(e^{-W_\lambda} y, u, v, w, x)$$

aufgestellt, wo W eine rationale Function von x ist, die in Partialbrüche zer-

legt, zum absoluten Gliede Null hat. Nun werden ε $(\varepsilon \geqq 1)$ Ausdrücke (9.) genommen, worin die Grössen e^W unter einander und von den determinirenden Factoren in f_r verschieden sind. Die Integrale von $H^{(\lambda)} = 0$ $(\lambda = 1, \ldots, \varepsilon)$ bei denselben Zweigen von u, v, w sind linearunabhängig und werden in der Differentialgleichung $g_s(y, u, v, w, x) = 0$ vereinigt (vgl. Abh. Bd. 115, S. 144, 145). Die Connexdifferentialgleichung von $H^{(\lambda)} = 0$ sei $\psi^{(\lambda)}(y, x) = 0$, wo $\psi^{(\lambda)}(y, x)$ normal mit dem determinirenden Factor e^{W_λ}. Die Integrale von $\psi^{(\lambda)} = 0$ $(\lambda = 1, \ldots, \varepsilon)$ werden vereinigt in $\Psi_M(y, x) = 0$, dieses ist die Connexdifferentialgleichung von $g_s(y, u, v, w, x) = 0$. $\Psi_M(y, x)$ ist durch ein System normaler Differentialausdrücke darstellbar (vergl. Abh. Bd. 96 No. 8 II Ca.), die determinirenden Factoren in diesem System für Ψ_M sind unter einander und von denen in f_r verschieden. Dann hat die canonische Form von

$$(10.) \qquad f_r(y, x) = y_1, \qquad \Psi_M(y_1, x),$$

wie in II gezeigt werden wird, wenigstens so viele canonische Bestandtheile, wie die canonische Form von f_r. Die auf diese Weise hergestellte Differentialgleichung (2.) erfüllt also die gestellte Forderung.

II. Um die vorhin angegebene Eigenschaft des Differentialausdruckes (10.) nachzuweisen, wird in folgender Weise verfahren:

A. Der homogene lineare Differentialausdruck mit rationalen Coefficienten $f(y, x)$ sei durch ein System normaler Differentialausdrücke darstellbar. Die canonische Form von $f(y, x)$ enthalte $\mathfrak{a}(\mathfrak{a} \geqq 1)$ canonische Bestandtheile und sei

$$(11.) \quad \varphi_{(1)}(y, x) = y_1, \qquad \varphi_{(2)}(y_1, x) = y_2, \ldots, \qquad \varphi_{(\mathfrak{a})}(y_{\mathfrak{a}-1}, x).$$

Ferner sei $\psi(y, x)$ ein normaler Differentialausdruck, dessen determinirender Factor von denjenigen in dem Systeme $f(y, x)$ verschieden ist. Dann sind die Integrale von $f = 0$ und $\psi = 0$ unter einander linearunabhängig (Abhandlung Bd. 96 No. 8 II D).

Die Integrale von $\varphi_{(1)} = 0$ und $\psi = 0$ werden in einer Differentialgleichung vereinigt. Der Differentialausdruck letzterer Differentialgleichung erhält jeden der beiden Ausdrücke

$$(12^a.) \qquad \varphi_{(1)}(y, x) = y_1, \qquad \psi'(y_1, x).$$

$$(12^b.) \qquad \psi(y, x) = y'_1, \qquad \varphi'_{(1)}(y'_1, x).$$

Hier ist ψ' ein normaler Differentialausdruck mit dem determinirenden Factor aus ψ (Abhandlung Bd. 96 No. 8 II C). $\varphi'_{(1)}$ entsteht in folgender

Weise. Die Hauptunterdifferentialgleichungen der Differentialgleichung, in welcher der erste canonische Bestandtheil $\varphi_{(1)}$ gleich Null gesetzt ist, seien $F_{a_0} = 0$ bis $F_{a_r} = 0$. Die Integrale von $\psi = 0$ und $F_{a_s} = 0$ werden in einer Differentialgleichung vereinigt, deren Differentialausdruck ist

$$(13.) \qquad \psi(y, x) = y_1, \qquad g_{a_s}(y_1, x),$$

wo g_{a_s} normal mit dem determinirenden Factor in F_{a_s} (a. a. O.). Die Vereinigung der Integrale von $g_{a_s} = 0 (s = 0 \cdots r)$ in einer Differentialgleichung liefert die Differentialgleichung $\varphi'_{(1)} = 0$.

Die Integrale der Differentialgleichung, in welcher das System

$$(14.) \qquad \varphi_{(2)}(y_1, x) = y_2, \ \ldots, \ \varphi_{(\mathfrak{a})}(y_{\mathfrak{a}-1}, x)$$

gleich Null gesetzt ist, und der Differentialgleichung $\psi'(y, x) = 0$ sind untereinander linearunabhängig (Abhandlung Bd. 96 No. 8 II D) und seien vereinigt in einer Differentialgleichung, deren Differentialausdruck

$$(15.) \qquad \psi'(y_1, x) = s, \qquad L(s, x)$$

ist. $L(s, x)$ ist durch ein System normaler Differentialausdrücke darstellbar, welches einem Systeme für den Differentialausdruck (14.) ähnlich ist (Abhandlung Bd. 96 No. 8 II C). Die Integrale von $f = 0$ und $\psi = 0$ sind alsdann in einer Differentialgleichung vereinigt, deren Differentialausdruck gemäss (12.) (15.) jeden der beiden Ausdrücke erhält:

$$(16^{a}.) \qquad \varphi_{(1)}(y, x) = y_1, \qquad \psi'(y_1, x) = s, \qquad L(s, x),$$
$$(16^{b}.) \qquad \psi(y, x) = y'_1, \qquad \varphi'_{(1)}(y'_1, x) = s, \qquad L(s, x).$$

Es ergiebt sich nun, dass in der canonischen Form des Differentialausdruckes

$$(17.) \qquad \varphi'_{(1)}(y'_1, x) = s, \qquad L(s, x)$$

$\varphi'_{(1)}$ ***erster canonischer Bestandtheil*** ist.

Denn sei $\chi = 0$ eine Differentialgleichung mit normalem Differentialausdruck χ μter Ordnung, deren Integrale das System (17.) zu Null machen. ψ sei λter Ordnung. Die Differentialgleichung $(\lambda+\mu)$ter Ordnung

$$(18.) \qquad \psi(y, x) = y_1, \qquad \chi(y_1, x) = 0$$

hat mit $f = 0$ μ Integrale gemeinsam. ($y_1, \ldots, y_\lambda$ seien λ linearunabhängige Integrale von $\psi = 0$ und $y_1, \ldots, y_\lambda, Y_1, \ldots, Y_\mu$ seien $\lambda+\mu$ linearunabhängige Integrale von (18.). Dann ist $Y_{\mathfrak{a}}$ $(\mathfrak{a} = 1, \ldots, \mu)$ gleich $c_{\mathfrak{a}1} y_1 + \cdots + c_{\mathfrak{a}\lambda} y_\lambda + Z_{\mathfrak{a}}$, wo c Constanten sind, $Z_{\mathfrak{a}}$ eine homogene lineare Verbindung mit constanten Coefficienten der Integrale von $f = 0$. Also sind die μ-linearunabhängigen

Functionen Z_α ($\alpha = 1 \cdots \mu$) beiden Differentialgleichungen gemeinsam). Daher ist f darstellbar durch das System homogener linearer Differentialausdrücke mit rationalen Coefficienten und dem Coefficienten der höchsten Ableitung gleich 1 (Abhandlung Bd. 96 No. 7 II):

$$(19.) \qquad X(y, x) = y', \qquad g(y', x),$$

wo $X = 0$ zu Integralen die den Differentialgleichungen (18.) und $f = 0$ gemeinsamen μ Integrale hat. In Differentialgleichung (18.) sind also die Integrale von $X = 0$ und $\psi = 0$ vereinigt. Da χ normaler Differentialausdruck ist, so ist auch X normal mit dem determinirenden Factor aus χ (Abhandlung Bd. 96 No. 8 II C). Es müssen also die Integrale von $X = 0$ den ersten canonischen Bestandtheil von f, den Ausdruck $\varphi_{(1)}$ gleich Null machen, daher müssen gemäss (12^b.) die Integrale von $\chi = 0$ die Differentialgleichung $\varphi'_{(1)} = 0$ erfüllen. Daraus folgt, dass in dem Differentialausdrucke (17.) $\varphi'_{(1)}$ erster canonischer Bestandtheil ist.

Dasselbe Verfahren wird nun weiter auf das System (15.) angewandt und in gleicher Weise der erste canonische Bestandtheil in $L(s, x)$ bestimmt. Es ergiebt sich schliesslich, dass *die canonische Form des Differentialausdruckes* (17.) *canonische Bestandtheile (und zwar normale) in der Anzahl* α *enthält, so viele wie* $f(y, x)$.

B. *Es ist ferner der Differentialausdruck* (12.) *erster canonischer Bestandtheil in der canonischen Form des Differentialausdruckes* (16.). Dieser Differentialausdruck (16.) gehört der Differentialgleichung an, welche die Integrale von $f = 0$ und $\psi = 0$ vereinigt enthält und ist daher durch jedes der beiden Systeme darstellbar

$$(20^a.) \qquad f(y, x) = y_1, \qquad \xi(y_1, x);$$

$$(20^b.) \qquad \psi(y, x) = y'_1, \qquad f'(y', x),$$

wo ξ normaler Differentialausdruck mit dem determinirenden Factor aus ψ, f' durch ein System normaler Differentialausdrücke darstellbar ist, welches einem System für f ähnlich ist (Abhandlung Bd. 96 No. 8 II C). Nun sei $\chi = 0$ eine Differentialgleichung mit normalem Differentialausdrucke χ, deren Integrale den Differentialausdruck (20.) gleich Null machen. Es ergiebt sich dann nach dem Verfahren in Abhandlung Bd. 96 No. 8 II Bb., dass der determinirende Factor in χ mit einem der determinirenden Factoren in f oder ψ übereinstimmt, und wenn derselbe in f sich findet, die Integrale von $\chi = 0$ gemäss (20^a.) $f = 0$ erfüllen, wenn derselbe in ψ vorkommt,

diese Integrale gemäss (20^b.) $\psi = 0$ genügen. Wenn dieselben $f = 0$ erfüllen, so müssen sie den ersten canonischen Bestandtheil von f, den Differentialausdruck $\varphi_{(1)}$, zu Null machen. Also in beiden Fällen machen die Integrale von $\chi = 0$ den Differentialausdruck (12.) gleich Null. Daraus folgt, dass der Differentialausdruck (12.) erster canonischer Bestandtheil in der canonischen Form des Differentialausdruckes (16.) ist. Da nun der Differentialausdruck $L(s, x)$ in (16.) noch $\mathfrak{a}-1$ canonische Bestandtheile enthält (wie in A gezeigt ist), ***so hat die canonische Form des Differentialausdruckes*** (16.) ***canonische Bestandtheile (und zwar normale) in der Anzahl*** $\mathfrak{a}$, ***so viele wie*** $f(y, x)$.

C. Nunmehr wird der Differentialausdruck behandelt, der durch das System

$$(21.) \qquad f(y, x) = y_1, \qquad \omega(y_1, x)$$

gegeben ist, wo $f(y, x)$ der Ausdruck (11.), $\omega(y, x)$ ein normaler Differentialausdruck mit einem determinirenden Factor, der verschieden von denen in dem Systeme f ist.

$\chi = 0$ sei eine Differentialgleichung mit normalem Differentialausdrucke χ, deren Integrale den Differentialausdruck (21.) gleich Null machen. Nach dem Verfahren in Abhandlung Bd. 96 No. 8 II Bb ergiebt sich, dass der determinirende Factor in χ mit einem der determinirenden Factoren in f oder ω übereinstimmt, und wenn derselbe in f vorkommt, dass die Integrale von $\chi = 0$ die Differentialgleichung $f = 0$ erfüllen, daher den ersten canonischen Bestandtheil in f, den Ausdruck $\varphi_{(1)}$ zu Null machen. In dem Falle, wo der determinirende Factor in χ mit dem in ω übereinstimmt, sei die Differentialgleichung $\chi = 0$ dieser Art von höchster Ordnung genommen und diese durch $\psi = 0$ bezeichnet. Die Integrale von $f = 0$ und $\psi = 0$ sind linearunabhängig (Abhandlung Bd. 96 No. 8 II D) und werden vereinigt in einer Differentialgleichung mit dem Differentialausdrucke

$$(22.) \qquad f(y, x) = y_1, \qquad \xi(y_1, x),$$

wo $\xi(y_1, x)$ normaler Differentialausdruck mit dem determinirenden Factor aus ψ. Dann ist $\omega(y, x)$ darstellbar durch das System

$$(23.) \qquad \xi(y_1, x) = y_2, \qquad \omega'(y_2, x),$$

wo ω' normal mit dem determinirenden Factor aus ω (Abhandlung Bd. 96 No. 8 I), ω' auch nullter Ordnung sein kann. In dem Falle, wo der determinirende Factor von χ in dem System f vorkommt, wird $\xi = y_1$,

$\omega' = \omega$ gesetzt. Dann wird in beiden Fällen der Ausdruck (21.) durch das System

$$(24.) \qquad f(y, x) = y_1, \qquad \xi(y_1, x) = y_2, \qquad \omega'(y_2, x)$$

gegeben. Die Integrale von $\chi = 0$ machen den Ausdruck (22.) gleich Null. Daher ist der erste canonische Bestandtheil des Ausdruckes (24.) derjenige von (22.). Der Ausdruck (22.) hat gemäss (B.) so viele canonische Bestandtheile wie f. Also auf den ersten canonischen Bestandtheil in (22.) folgen noch $\mathfrak{a}-1$. Das System der letzteren sei durch $L(s, x)$ bezeichnet, wo $L(s, x)$ gemäss (B.) aus (15.) hervorgeht, bezüglich, wenn in (22.) $\xi = y_1$, aus (14.). Die determinirenden Factoren in $L(s, x)$ kommen unter denen in f vor. In dem Systeme

$$(25.) \qquad L(s, x) = s_1, \qquad \omega'(s_1, x)$$

ist also der determinirende Factor in ω' verschieden von denen in $L(s, x)$, oder ω' ist nullter Ordnung. Nun ist dieses System in derselben Weise zu behandeln. *Hieraus ergiebt sich, dass die canonische Form des Differentialausdruckes* (21.) *canonische Bestandtheile (und zwar normale) in der Anzahl* $\mathfrak{a}$ *oder* $\mathfrak{a}+1$ *enthält, wo* $\mathfrak{a}$ *die Anzahl der canonischen Bestandtheile von* $f(y, x)$ *ist.*

Dieser Satz wird nun auf das System in I successive angewandt; so ergiebt sich die am Schlusse von I gemachte Behauptung.

4.

Integration der Connexdifferentialgleichung aus No. 1.

Es sei $x = a$ ein im Endlichen liegender singulärer Punkt der vorgelegten Differentialgleichung No. 1 (1.) $F_m(y, u, v, w, x) = 0$. Aus der in No. 1 über die Connexdifferentialgleichung $\Phi_N(y, x) = 0$ gemachten Voraussetzung ergiebt sich für $\Phi_N(y, x)$ die Darstellung durch ein System *bei dem Punkte* $x = a$ *normaler* Differentialausdrücke (Abh. Bd. 96 No. 9, No. 13).

Bei dem Punkte $x = \infty$ wird die Substitution $x = \frac{1}{t}$ angewandt. Die Integrale der aus $F_m = 0$ hervorgehenden Differentialgleichung (Abh. Bd. 115 No. 3 IV) erfüllen die durch diese Substitution aus $\Phi_N = 0$ entstehende Differentialgleichung und in letzterer ist ein System bei dem Punkte $t = 0$ normaler Differentialausdrücke gleich Null gesetzt. Man kommt damit auf den Fall eines Punktes im Endlichen zurück (Abh. Bd. 96 No. 13 IV).

Nun wird bei dem singulären Punkte $x = a$ gemäss Abh. Bd. 115 No. 3 bei einem Complex von R zusammenhängenden Combinationen der Zweige von u, v, w die Substitution $x - a = \zeta^R$ angewandt, wodurch

$$(1.) \qquad F_m(y, u, v, w, x) = \left(\frac{dx}{d\zeta}\right)^{-m} G_m(y, u, v, w, \zeta)$$

entsteht. Die Coefficienten in G_m sind bei $\zeta = 0$ abgesehen von diesem Punkte einwerthige und stetige analytische Functionen, die für $\zeta = 0$ in endlicher Ordnung unendlich werden, der Coefficient der höchsten Ableitung gleich 1. Die Integrale von $G_m = 0$ sind zu ermitteln.

Aus der Darstellung des Differentialausdruckes $\Phi_N(y, x)$ der Connexdifferentialgleichung durch ein System bei $x = a$ normaler Differentialausdrücke ergeben sich gemäss Abh. Bd. 96 No. 13 die Ausdrücke der N Integrale von $\Phi_N(y, x) = 0$ unter der Form von ***Systemen normaler Elementarintegrale***

$$(2.) \qquad \mu \int dx\, \mu_1^{-1} \mu_2 \int \cdots \int \mu_{\mathfrak{a}-1}^{-1} \mu_{\mathfrak{a}}\, dx, \qquad (\mathfrak{a} = 1, \ldots, N)$$

wo eine solche Grösse μ — ein normales Elementarintegral — die Form hat

$$(3.) \qquad e^w (x-a)^r c_0 \Big(1 + \sum_1^{\infty} c_{\mathfrak{a}} (x-a)^{\mathfrak{a}}\Big),$$

w gleich Null oder von der Form $\sum_1^n c_{-\mathfrak{a}} (x-a)^{-\mathfrak{a}}$, e^w heisst der determinirende Factor in dem normalen Elementarintegral. Aus den N Integralausdrücken (2.) folgt für den Differentialausdruck $\Phi_N(y, x)$ selbst die Darstellung durch *ein System normaler Elementardifferentialausdrücke* (Abh. Bd. 96 No. 3)

$$(4.) \qquad g_{(1)}(y, x) = y_1, \qquad g_{(2)}(y_1, x) = y_2, \cdots g_{(N)}(y_{N-1}, x),$$

wo

$$(5.) \qquad g_{(\mathfrak{a})}(y, x) = \frac{dy}{dx} - \frac{d \log \mu_{\mathfrak{a}}}{dx} y$$

ist. Ein solcher Ausdruck $g(y, x)$ ist demnach unter der Form

$$(6.) \qquad e^w \left\{\frac{de^{-w} y}{dx} - p e^{-w} y\right\}$$

darstellbar, wo w gleich Null oder von der Form $\sum_1^n c_{-\mathfrak{a}} (x-a)^{-\mathfrak{a}}$, $\frac{dy}{dx} - py$ bei $x = a$ den charakteristischen Index gleich Null hat. Der Ausdruck (6.) ist ein normaler Elementardifferentialausdruck genannt worden.

In $\Phi_N(y, x) = 0$ No. 1 (2.) wird jetzt die Substitution $x - a = \zeta^R$ eingeführt. Hierdurch ergiebt sich

$$(7.) \qquad \Phi_N(y, x) = \left(\frac{dx}{d\zeta}\right)^{-N} \Psi_N(y, \zeta),$$

wo $\Psi_N(y, \zeta)$ ein homogener linearer Differentialausdruck mit rationalen Functionen von ζ als Coefficienten und dem Coefficienten der höchsten Ableitung gleich 1. Der Differentialgleichung $\Psi_N(y, \zeta) = 0$ genügen alsdann die Integrale von $G_m = 0$.

Aus den Ausdrücken (2.) der N Integrale von $\Phi_N(y, x) = 0$ ergeben sich durch die Substitution $x - a = \zeta^R$ die N Integrale von $\Psi_N(y, \zeta) = 0$:

$$(8.) \qquad \mu_1 \int d\zeta \frac{dx}{d\zeta} \mu_1^{-1} \mu_2 \int \cdots \int \frac{dx}{d\zeta} \mu_{\mathfrak{a}-1}^{-1} \mu_{\mathfrak{a}} d\zeta \qquad (\mathfrak{a} = 1, \ldots, N).$$

Wird nun

$$(9.) \qquad \mu_{\mathfrak{a}} \left(\frac{dx}{d\zeta}\right)^{\mathfrak{a}-1} = M_{\mathfrak{a}} \qquad (\mathfrak{a} = 1, \ldots, N)$$

gesetzt, so gehen die Ausdrücke (8.) über in *die Systeme normaler Elementarintegrale*

$$(10.) \qquad M_1 \int d\zeta M_1^{-1} M_2 \int \cdots \int M_{\mathfrak{a}-1}^{-1} M_{\mathfrak{a}} d\zeta \qquad (\mathfrak{a} = 1, \ldots, N).$$

Daraus folgt, wenn

$$(11.) \qquad \gamma_{(\mathfrak{a})}(y, \zeta) = \frac{dy}{d\zeta} - \frac{d \log M_{\mathfrak{a}}}{d\zeta} y$$

gesetzt wird, dass der Differentialausdruck $\Psi_N(y, \zeta)$ durch *das System normaler Elementardifferentialausdrücke*

$$(12.) \qquad \gamma_{(1)}(y, \zeta) = y_1, \qquad \gamma_{(2)}(y_1, \zeta) = y_2, \ \ldots, \ \gamma_{(N)}(y_{N-1}, \zeta)$$

dargestellt wird.

5.

Systeme normaler Elementardifferentialausdrücke.

Die Sätze, die in Abh. Bd. 96 No. 8 von Systemen normaler Differentialausdrücke nachgewiesen und in Abh. Bd. 96 No. 9 auf Systeme bei einem Punkte normaler Differentialausdrücke übertragen worden sind (bei den genannten Differentialausdrücken sind also die Coefficienten rational), lassen sich mit wesentlich demselben Beweisverfahren auf Systeme normaler Elementardifferentialausdrücke ausdehnen.

I. Es heisst also ein Differentialausdruck ein ***normaler Elementardifferentialausdruck,*** wenn derselbe die Form hat

$$(1.) \qquad e^{w}\left\{\frac{de^{-w}y}{dx} - p\,e^{-w}y\right\},$$

wo w gleich Null oder von der Form $\sum_{1}^{n} c_{-\alpha}(x-a)^{-\alpha}$ ist, p bei $x=a$, abgesehen von diesem Punkte, einwerthig und stetig und für $x=a$ höchstens in 1ter Ordnung unendlich ist. e^{w} ist der determinirende Factor, $r-\{p(x-a)\}_{x=a}=0$ die Exponentengleichung bei dem normalen Elementardifferentialausdruck. Jeder homogene lineare Differentialausdruck erster Ordnung, dessen Coefficient bei $x=a$, abgesehen von diesem Punkte, einwerthig und stetig und für $x=a$ nur in endlicher Ordnung unendlich wird, kann auf die Form (1.) gebracht werden und nur auf *eine* Weise. Ein Differentialausdruck der Form

$$(2.) \qquad g_{(1)}(y, x) = y_1, \qquad g_{(2)}(y_1, x) = y_2, \ \ldots, \ g_{(l)}(y_{l-1}, x),$$

worin die g normale Elementardifferentialausdrücke sind, heisst ein ***System*** solcher Ausdrücke $g_{(k)}(k = 1, \ldots, l)$, deren Anzahl $l \geqq 1$ ist, sind die Bestandtheile des Systems.

Zwei normale Elementardifferentialausdrücke heissen *ähnlich,* wenn die determinirenden Factoren übereinstimmen und die Wurzel der Exponentengleichung des einen Ausdruckes sich von derjenigen des anderen höchstens um eine ganze Zahl unterscheidet. Zwei ***Systeme*** normaler Elementardifferentialausdrücke heissen *ähnlich,* wenn sie gleich viele Bestandtheile enthalten und die Bestandtheile von derselben Stelle in beiden ähnlich sind (Abh. Bd. 96 No. 3, II).

II. Die folgenden beiden Sätze entsprechen solchen, die in Abh. Bd. 96 zweite Abtheilung bei rationalen Coefficienten der Differentialgleichungen gegeben sind, und dienen zum Beweise der allgemeineren Sätze, die denen in Abh. Bd. 96 No. 8 bei rationalen Coefficienten analog sind.

$\psi(y, x)$ sei ein homogener linearer Differentialausdruck, dessen Coefficienten bei $x=a$, abgesehen von diesem Punkte, einwerthige und stetige analytische Functionen sind, die für $x=a$ nur in endlicher Ordnung unendlich werden, der Coefficient der höchsten Ableitung gleich 1. $\psi(y, x)$ sei ***unzerlegbar,*** d. h. nicht durch ein System

$$(3.) \qquad \psi_1(y, x) = y_1, \qquad \psi_2(y_1, x)$$

darstellbar, worin ψ_1 und ψ_2 homogene lineare Differentialausdrücke höherer als nullter Ordnung sind mit Coefficienten *derselben, vorhin beschriebenen Art wie in* ψ (vgl. Abh. Bd. 96 No. 7, III).

A) $\varphi(y, x)$ sei ein normaler Elementardifferentialausdruck. $\psi(y, x)$ sei ein (vorhin definirter) unzerlegbarer Differentialausdruck höherer als erster Ordnung. Das Integral von $\varphi = 0$ kann nicht $\psi = 0$ erfüllen, weil sonst ψ zerlegbar wäre (Abh. Bd. 96 No. 7, II). Die Integrale von $\varphi = 0$ und $\psi = 0$ werden in einer Differentialgleichung vereinigt nach Abh. Bd. 96, No. 7 I, deren Differentialausdruck erhält die Form

$$(4.) \qquad \varphi(y, x) = s, \qquad \psi'(s, x).$$

Hier ist ψ' ein homogener linearer Differentialausdruck von der Ordnung von ψ mit Coefficienten der Art wie in ψ und ein unzerlegbarer Differentialausdruck. Der Beweis dieses Satzes ist derselbe wie bei rationalen Coefficienten und letzterer in Abh. Bd. 96 No. 7, III angegeben.

B) $\varphi(y, x)$ sei ein normaler Elementardifferentialausdruck. $\psi(y, x)$ sei ein Differentialausdruck wie in A) oder auch ein normaler Elementardifferentialausdruck, der von $\varphi(y, x)$ verschieden ist. Die Integrale von $\varphi = 0$ und $\psi = 0$ werden in einer Differentialgleichung vereinigt; deren Differentialausdruck erhält die Form

$$(5.) \qquad \psi(y, x) = s, \qquad \varphi'(s, x).$$

Hier ist $\varphi'(s, x)$ ähnlich $\varphi(y, x)$, wie sich durch Einsetzen des Integrales von $\varphi(y, x) = 0$ in $\psi(y, x)$ ergiebt. Dieser Satz entspricht den Sätzen Abh. Bd. 96 No. 8 II A.

III. Vermittelst der beiden Sätze in II kann man nun durch dasselbe Beweisverfahren, welches in Abh. Bd. 96 No. 8 auf Systeme normaler Differentialausdrücke angewandt worden ist, diejenigen Sätze, welche dort in Bezug auf jene Systeme erlangt sind, auf Systeme normaler Elementardifferentialausdrücke übertragen.

Hier werden für die nachstehenden Anwendungen speciell folgende Sätze angegeben:

Der homogene lineare Differentialausdruck $m$ter Ordnung $F_m(y, x)$ enthalte Coefficienten, die bei $x = a$, abgesehen von diesem Punkte, einwerthige und stetige analytische Functionen sind, welche für $x = a$ in endlicher

Ordnung unendlich werden, der Coefficient der höchsten Ableitung gleich 1. $F_m(y, x)$ sei durch das System

$$(6.) \qquad \Phi_N(y, x) = s, \qquad F_{m-N}(s, x)$$

dargestellt, wo Φ_N ein Differentialausdruck Nter Ordnung, der durch das System normaler Elementardifferentialausdrücke (2.) ($l = N$) gegeben ist, F_{m-N} entweder nullter Ordnung ist, oder $F_{m-N} = 0$ kein normales Elementarintegral (vgl. No. 4 (3.)) enthält.

A) Sind in $F_m(y, x) = 0$ die Integrale von $\Psi = 0$ enthalten, wo Ψ durch ein System normaler Elementardifferentialausdrücke darstellbar ist, so hat der Differentialausdruck Φ_N auch eine Darstellung durch ein solches System normaler Elementardifferentialausdrücke, an dessen Spitze Ψ steht und auf Ψ folgt ein System, welches ähnlich ist dem Systeme (2.), nachdem aus letzterem gewisse Bestandtheile herausgenommen worden, die mit den Bestandtheilen in Ψ so gepaart sind, dass in einem Paare ähnliche Elementardifferentialausdrücke stehen. (Entspricht Abh. Bd. 96 No. 8 II B b.)

B) Enthält $\Phi_N(y, x) = 0$ die Integrale von $\psi = 0$, wo ψ ein (in II definirter) unzerlegbarer Differentialausdruck ist, so muss ψ ein normaler Elementardifferentialausdruck sein. Sind in $\Phi_N(y, x) = 0$ die Integrale von $\psi = 0$ enthalten, wo ψ durch das System

$$(7.) \qquad f_{(1)}(y,x) = y_1, \qquad f_{(2)}(y_1, x) = y_2, \quad \cdots \quad f_{(c)}(y_{c-1}, x) \qquad (c \geqq 1)$$

dargestellt wird, in welchem die Bestandtheile $f_{(1)}$ bis $f_{(c)}$ unzerlegbare Differentialausdrücke sind, so müssen dieselben normale Elementardifferentialausdrücke sein. (Entspricht Abh. Bd. 96 No. 8 II B c.)

IV. Jeder homogene lineare Differentialausdruck $\psi(y, x)$, dessen Coefficienten bei $x = a$, abgesehen von diesem Punkte, einwerthige und stetige analytische Functionen sind, welche für $x = a$ nur in endlicher Ordnung unendlich werden, mit dem Coefficienten der höchsten Ableitung gleich 1, ist entweder unzerlegbar, oder mittelst successiver Anwendung von (3.) durch ein System unzerlegbarer Differentialausdrücke auszudrücken. *Erfüllen die Integrale von* $\psi(y, x) = 0$ *die Differentialgleichung* $\Phi_N(y, x) = 0$, *wo* Φ_N *durch ein System normaler Elementardifferentialausdrücke darstellbar ist, so ist* (gemäss III B) *auch* $\psi(y, x)$ *durch ein System normaler Elementardifferentialausdrücke darstellbar.*

Dieser Satz ist es, auf dem das Folgende beruht.

6.

Ermittelung der Integrale der homogenen linearen Differentialgleichung mit mehrwerthigen algebraischen Coefficienten.

I. Der am Schlusse der vorigen Nummer angegebene Satz über Systeme normaler Elementardifferentialausdrücke wird nun in Verbindung gebracht mit der Beziehung der in No. 4 angegebenen Differentialgleichung $\Psi_N(y, \zeta) = 0$, wo $\Psi_N(y, \zeta)$ durch das System normaler Elementardifferentialausdrücke No. 4 (12.) gegeben ist, zu der Differentialgleichung $G_m(y, u, v, w, \zeta) = 0$, wo $G_m(y, u, v, w, \zeta)$ aus No. 4 (1.) hervorgeht. Die Coefffcienten von $G_m(y, u, v, w, \zeta)$ werden, nachdem für u, v, w die Entwickelungen nach Potenzen von ζ eingesetzt sind (Abh. Bd. 115 No. 2), bei $\zeta = 0$, abgesehen von diesem Punkte, einwerthige und stetige analytische Functionen von ζ, die für $\zeta = 0$ in endlicher Ordnung unendlich werden, der Coefficient der höchsten Ableitung gleich 1; dieser Differentialausdruck wird jetzt durch $\Gamma_m(y, \zeta)$ bezeichnet. Die Integrale von $\Gamma_m(y, \zeta) = 0$ erfüllen $\Psi_N(y, \zeta) = 0$. Aus No. 5 IV folgt daher:

Der Differentialausdruck $\Gamma_m(y, \zeta)$ ist durch ein System normaler Elementardifferentialausdrücke darstellbar.

In Bezug auf eine Darstellung des Differentialausdruckes $\Gamma_m(y, \zeta)$ durch ein System normaler Elementardifferentialausdrücke gilt nun Folgendes:

Man kann direct aus dem Differentialausdrucke $\Gamma_m(y, \zeta)$ die determinirenden Factoren in den normalen Elementardifferentialausdrücken des Systems, sodann die Wurzel der zu jedem determinirenden Factor gehörenden Exponentengleichung, abgesehen von einer zu addirenden ganzen Zahl, bestimmen.

Setzt man in ein System normaler Elementardifferentialausdrücke, wie No. 5 (2), welches den Differentialausdruck $G(y, x)$ darstellen soll, $y = e^w y'$ ein, so ergiebt sich $e^{-w} G(e^w y', x)$ dargestellt durch das System

$$(1.) \quad e^{-w} g_{(1)}(e^w y', x) = y_1, \quad e^{-w} g_{(2)}(e^w y_1, x) = y_2, \ \ldots, \ e^{-w} g_{(l)}(e^w y_{l-1}, x).$$

Dieses werde auf das System für $\Gamma_m(y, \zeta)$ angewandt, so ergiebt sich nach Abh. Bd. 96 No. 3 III (12.):

Die determinirenden Factoren in den normalen Elementardifferentialausdrücken des Systems für $\Gamma_m(y, \zeta)$ sind die fundamentalen determinirenden Factoren von $\Gamma_m(y, \zeta)$ bei $\zeta = 0$. Die zu einem und demselben determinirenden Factor in den normalen Elementardifferentialausdrücken des Systems für $\Gamma_m(y, \zeta)$ gehörenden Exponentengleichungen haben Wurzeln,

welche, abgesehen von zu addirenden ganzen Zahlen, zusammenfallen mit den Wurzeln der zu dem fundamentalen determinirenden Factor gehörenden Exponentengleichung. Diese fundamentalen determinirenden Factoren von $\Gamma_m(y, \zeta)$ bei $\zeta = 0$ werden nach den Angaben in Abh. Bd. 96 No. 4 (vergl. Abh. Bd. 117 No. 2) bestimmt. Die zugehörigen Exponentengleichungen werden aufgestellt und deren Wurzeln ermittelt.

Ein System normaler Elementardifferentialausdrücke, welches den Differentialausdruck $\Gamma_m(y, \zeta)$ darstellt, sei

$$(2.) \qquad \chi_{(1)}(y, \zeta) = y_1, \quad \chi_{(2)}(y_1, \zeta) = y_2, \ \ldots, \ \chi_{(m)}(y_{m-1}\zeta),$$

wo

$$(3.) \qquad \chi_{(\alpha)}(y, \zeta) = \frac{dy}{d\zeta} - \frac{d\log\sigma_\alpha}{d\zeta} y \qquad (\alpha = 1 \ldots m)$$

und σ_α von der Form ist

$$(4.) \qquad e^w \zeta^r c_0 \left(1 + \sum_1^\infty c_\alpha \zeta_\alpha\right),$$

w gleich Null oder von der Form $\sum_1^n c_{-\alpha}\zeta^{-\alpha}$. Die Integrale von $\Gamma_m(y, \zeta) = 0$ sind

$$(5.) \qquad \sigma_1 \int d\zeta \sigma_1^{-1}\sigma_2 \int \cdots \int \sigma_{\alpha-1}^{-1}\sigma_\alpha d\zeta \qquad (\alpha = 1 \ldots m)$$

und werden in der Weise genommen, dass bei den successiven Integrationen in (5.) das constante Glied in der jedesmaligen Entwickelung annullirt werden soll.

Nun ist zwar die Reihenfolge der normalen Elementardifferentialausdrücke in (2.) unbekannt. Aber welches auch diese Reihenfolge sein möge, nach dem Vorgehenden sind *in den Entwickelungen der Integrale* (5.) *die Exponenten* (zu welchen beliebige ganze Zahlen addirt werden können) *bekannt. Diese Exponenten sind nämlich (abgesehen von zu addirenden ganzen Zahlen) die Wurzeln der Exponentengleichungen, welche zu den fundamentalen determinirenden Factoren von* $\Gamma_m(y, \zeta)$ *bei* $\zeta = 0$ *gehören.*

Die Integrale (5.) von $\Gamma_m(y, \zeta) = 0$ genügen andererseits der Differentialgleichung $\Psi_N(y, \zeta) = 0$. Die Integrale von $\Psi_N(y, \zeta) = 0$ gehen durch die Substitution $x - a = \zeta^R$ aus den Integralen der Connexdifferentialgleichung $\Phi_N(y, x) = 0$ hervor. Letztere Integrale brauchen nicht gerade durch die Ausdrücke No. 4 (2.) aufgestellt zu sein, sondern können unter Berücksichtigung der canonischen Form von $\Phi_N(y, x)$ z. B. auch durch die in Abh. Bd. 96 No. 21 gegebenen Systeme normaler Elementarintegrale aus-

gedrückt sein. Immer wird jedes Integral von $\Phi_N(y, x) = 0$ durch ein System normaler Elementarintegrale

$$(6.) \qquad \mu_1 \int dx \mu_1^{-1} \mu \int \cdots \int \mu_{a-1}^{-1} \mu_a dx$$

aufgestellt, wo bei den Integrationen das constante Glied in der jedesmaligen Entwickelung annullirt wird. Durch Substitution von $x - a = \zeta^R$ geht hieraus gemäss No. 4 (9.) der Ausdruck

$$(7.) \qquad M_1 \int d\zeta M_1^{-1} M_2 \int \cdots \int M_{a-1}^{-1} M_a d\zeta$$

hervor, wo auch bei den successiven Integrationen in der jedesmaligen Entwickelung das constante Glied annullirt werden muss, da die Substitution $x - a = \zeta^R$ in der Entwickelung des entsprechenden Integrales aus (6.) kein constantes Glied liefert.

Im Folgenden werde ein Exponent ϱ, zu welchem irgend eine ganze Zahl addirt sein kann, ein *Gruppenexponent* ϱ genannt; die Entwickelung eines Integrales wie (5.) oder (7.), in welcher die Exponenten der Potenzen von ζ sich von einem Exponenten ϱ nur um ganze Zahlen unterscheiden, heisse *ein Integral mit dem Gruppenexponenten* ϱ (vgl. Abh. Bd. 96 No. 22).

Von der Differentialgleichung $I'_m(y, \zeta) = 0$ sind also nun in den Integralen bei $\zeta = 0$ die Gruppenexponenten bekannt. Diese Integrale genügen der Differentialgleichung $\Psi_N(y, \zeta) = 0$, deren Integrale bekannt sind. Ein Integral von $I'_m(y, \zeta) = 0$ mit dem Gruppenexponenten ϱ wird linear und homogen mit constanten Coefficienten durch die Integrale von $\Psi_N(y, \zeta) = 0$ bei $\zeta = 0$ mit demselben Gruppenexponenten ausgedrückt. (Abh. Bd. 74 No. 1 (5.)). *Wie diese constanten Coefficienten zu ermitteln sind, wird in* II, III *und* IV *gezeigt und ein besonderer Fall in* V *behandelt.*

In der Entwickelung eines Integrals von $I'_m(y, \zeta) = 0$ bei $\zeta = 0$ mit einem Gruppenexponenten ϱ (ohne oder mit Logarithmen) werde $\zeta = (x - a)^{\frac{1}{R}}$ gesetzt, so zerfällt diese Entwickelung, indem $\varrho = \varrho_1 + g$ genommen wird, wo ϱ_1 ein einzelner Werth von ϱ, g eine beliebige ganze Zahl ist, in die linearunabhängigen Entwickelungen mit den verschiedenen Gruppenexponenten $\frac{\varrho_1}{R}, \frac{\varrho_1 + 1}{R} \cdots \frac{\varrho_1 + R - 1}{R}$; die eine oder die andere dieser Entwickelungen kann auch identisch verschwinden. Die hieraus hervorgehenden Entwickelungen sind bei einem Zweige von $(x - a)^{\frac{1}{R}}$ eben so viele linearunabhängige Integrale der Connexdifferentialgleichung (Abh. Bd. 74

No. 1 (5.)). Wird in denselben wieder $x-a=\zeta^R$ gesetzt, so ergeben sich hieraus ebensoviele linearunabhängige Integrale mit dem Gruppenexponenten ϱ der Differentialgleichung $\Psi_N(y,\zeta)=0$.

II. ***Der Gruppenexponent*** ϱ eines Integrales von $\Gamma_m(y,\zeta)=0$ bei $\zeta=0$ soll nur in *einem* Integrale von $\Gamma_m(y,\zeta)=0$ bei $\zeta=0$ vorkommen — ***einfacher Gruppenexponent.*** Dieses ist bei den homogenen linearen Differentialgleichungen mit in der Umgebung eines singulären Punktes, abgesehen von diesem Punkte, einwerthigen und stetigen Coefficienten der gewöhnliche Fall. (In dem Beispiele in No. 3 I findet dieses in folgendem Falle bei jedem Gruppenexponenten in $\Gamma_m(y,\zeta)=0$ statt. In den in No. 3 (9.) vorkommenden regulären Ausdrücken $h^{(\lambda)}(y,u,v,w,x)$, $(\lambda=1,\ldots,\varepsilon)$ sollen, nachdem $x-a=\zeta^R$ gesetzt ist, die Wurzeln der Exponentengleichungen bei $\lambda=1,\ldots,\varepsilon$ sich nicht um ganze Zahlen unterscheiden, und in einem Systeme normaler Differentialausdrücke für f_r No. 3 (1.) sollen die in den normalen Bestandtheilen vorkommenden regulären Differentialausdrücke bei $x=a$ Exponentengleichungen haben, deren Wurzeln mit R multiplicirt, sich unter einander und von den vorhin genannten Wurzeln nicht um ganze Zahlen unterscheiden. Zu dem Beweise wird in den Ausdruck in No. 3 (1.) $x-a=\zeta^R$ eingeführt, dabei um in $g_s(y,u,v,w,x)=0$ ζ einzuführen, in den $h^{(\lambda)}(y,u,v,w,x)=0$ $(\lambda=1,\ldots,\varepsilon)$ $x-a=\zeta^R$ eingesetzt und unter Bezugnahme auf das in in No. 5 III Gesagte der Satz, der Abh. Bd. 96 No. 8 II C a entspricht, angewandt; auf diese Weise wird der Ausdruck in No. 3 (1.) für $x-a=\zeta^R$ durch ein System normaler Elementardifferentialausdrücke dargestellt.)

A. Das ***eine*** Integral von $\Gamma_m(y,\zeta)=0$ bei $\zeta=0$ mit dem Gruppenexponenten ϱ sei durch Y bezeichnet. Dieses Integral Y ist nun linear und homogen mit constanten Coefficienten durch die Integrale der Differentialgleichung $\Psi_N(y,\zeta)=0$ mit dem Gruppenexponenten ϱ ausdrückbar, dieselben gehen aus Ausdrücken (7.) hervor. Diese Integrale seien y_1, y_2 bis y_λ, wo $\lambda \geqq 1$. Es ist daher

$$(8.) \qquad Y = k_1 y_1 + k_2 y_2 + \cdots + k_\lambda y_\lambda,$$

wo wenigstens einer der constanten Coefficienten k von Null verschieden ist, und wenn das zugehörige y durch y_1 bezeichnet wird, $\frac{k_a}{k_1}=C_a$ und für $\frac{Y}{k_1}$ wieder Y gesetzt wird, so besteht

$$(9.) \qquad Y = y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_\lambda y_\lambda$$

als Integral von $\Gamma_m(y, \zeta) = 0$ mit dem Gruppenexponenten ϱ. Bei $\lambda > 1$ müssen nun die Constanten C_2 bis C_λ die Bedingung erfüllen, dass der Ausdruck (9.) der Differentialgleichung $\Gamma_m(y, \zeta) = 0$ genügt. Es muss also die Gleichung

$$\Gamma_m(y_1, \zeta) + C_2 \Gamma_m(y_2, \zeta) + \cdots + C_\lambda \Gamma_m(y_\lambda, \zeta) = 0 \tag{10.}$$

bestehen. Eine Gleichung

$$\varkappa_2 \Gamma_m(y_2, \zeta) + \varkappa_3 \Gamma_m(y_3, \zeta) + \cdots + \varkappa_\lambda \Gamma_m(y_\lambda, \zeta) = 0 \tag{11.}$$

mit Constanten $\varkappa$, die nicht alle verschwinden, besteht nicht, weil sonst noch ein von dem vorhergehenden linearunabhängiges Integral von $\Gamma_m(y, \zeta) = 0$ mit dem Gruppenexponenten ϱ

$$\varkappa_2 y_2 + k_3 y_3 + \cdots + \varkappa_\lambda y_\lambda \tag{12.}$$

vorhanden wäre. Die $\lambda - 1$ Functionen

$$\Gamma_m(y_2, \zeta), \quad \Gamma_m(y_3, \zeta), \ \ldots, \ \Gamma_m(y_\lambda, \zeta) \tag{13.}$$

sind also linearunabhängige Functionen von ζ. Daher ist die Determinante dieser $\lambda - 1$ Functionen und ihrer $\lambda - 2$ ersten Ableitungen (Differentialdeterminante) nicht identisch Null (vgl. Abh. Bd. 96 No. 14). Und umgekehrt, wenn die Differentialdeterminante der Functionen (13.) nicht identisch verschwindet, daher eine Gleichung (11.) mit constanten Coefficienten $\varkappa$, die nicht alle verschwinden, nicht besteht, so ist ein Integral (12.) von $\Gamma_m(y, \zeta) = 0$ nicht vorhanden. Da nun überhaupt ein Integral von $\Gamma_m = 0$ mit dem Gruppenexponenten ϱ existirt, so muss es ein Integral (9.) geben und die Gleichung (10.) bestehen.

Die Gleichung (10.) *wird nun* $(\lambda-2)$*-mal differentiirt, so ergiebt sich im Ganzen ein System von* $\lambda-1$ *linearen Gleichungen mit nicht identisch verschwindender Determinante zur Bestimmung der* $\lambda-1$ *Constanten* C_2 *bis* C_λ.

Es wird also die Matrix

$$\begin{vmatrix} \Gamma_m(y_1, \zeta) & \Gamma_m(y_2, \zeta) & \cdots & \Gamma_m(y_\lambda, \zeta) \\ \frac{d\Gamma_m(y_1, \zeta)}{d\zeta} & \frac{d\Gamma_m(y_2, \zeta)}{d\zeta} & \cdots & \frac{d\Gamma_m(y_\lambda, \zeta)}{d\zeta} \\ \vdots & \vdots & & \\ \frac{d^{\lambda-2}\Gamma_m(y_1, \zeta)}{d\zeta^{\lambda-2}} & \frac{d^{\lambda-2}\Gamma_m(y_2, \zeta)}{d\zeta^{\lambda-2}} & \cdots & \frac{d^{\lambda-2}\Gamma_m(y_\lambda, \zeta)}{d\zeta^{\lambda-2}} \end{vmatrix} \tag{14.}$$

aufgestellt, dann muss wenigstens *eine* durch Wegstreichen einer Verticalzeile hervorgehende Determinante *nicht identisch verschwinden*, und zwar

jede, die durch Wegstreichen einer solchen Verticalzeile entsteht, in welcher das y_a einen von Null verschiedenen Coefficienten in (8.) hat.

B. ***In folgendem Falle kann keine der*** $(\lambda-1)$***-zeiligen Determinanten aus der Matrix*** (14.) ***identisch verschwinden.***

Das Integral Y von $I'_m(y, \zeta) = 0$ mit dem Gruppenexponenten ϱ zerfällt, wie oben (Schluss von I) bemerkt, wenn $\zeta = (x-a)^{\frac{1}{R}}$ und $\varrho = \varrho_1 + g$ gesetzt wird, wo ϱ_1 ein einzelner Werth von ϱ, g eine ganze Zahl ist, in die Summe der von $x-a$ abhängenden Ausdrücke mit den verschiedenen Gruppenexponenten

$$(15.) \qquad \frac{\varrho_1}{R}, \quad \frac{\varrho_1+1}{R}, \cdots \frac{\varrho_1+R-1}{R},$$

wobei einzelne dieser Ausdrücke auch identisch verschwinden können. Diese Ausdrücke sind ebensoviele linearunabhängige Integrale ohne Logarithmen der Connexdifferentialgleichung $\Phi_N(y, x) = 0$. ***Nun soll*** $\Phi_N(y, x) = 0$ ***ausser diesen Integralen weiter keine Integrale mit Gruppenexponenten aus der Reihe*** (15.) ***enthalten.***

Es seien die sämmtlichen Integrale von $\Phi_N(y, x) = 0$ mit Gruppenexponenten aus der Reihe (15.) aufgestellt; ein solches Integral kann sich von einem der vorhin genannten Integrale mit demselben Gruppenexponenten nur um einen constanten Factor unterscheiden. Wird $x-a = \zeta^R$ gesetzt, so gehen diese Integrale von $\Phi_N(y, x) = 0$ in ebenso viele linearunabhängige Integrale von $\Psi_N(y, \zeta) = 0$ mit dem Gruppenexponenten ϱ über. Da nun die Gruppenexponenten der Integrale von $\Phi_N(y, x) = 0$, die nicht der Reihe (15.) angehören, nach Multiplication mit R nicht den Gruppenexponenten ϱ ergeben, so kommen ausser jenen Integralen von $\Psi_N(y, \zeta) = 0$ keine anderen mit dem Gruppenexponenten ϱ vor. Daher gehen in den Ausdruck von Y (8.) alle aufgestellten Integrale von $\Psi_N(y, \zeta) = 0$ mit dem Gruppenexponenten ϱ mit nicht verschwindenden constanten Factoren k ein, ***und es kann daher keine der*** $(\lambda-1)$***-zeiligen Determinanten aus der Matrix*** (14.) ***identisch verschwinden.***

Der Gruppenexponent ϱ sollte nur in ***einem*** Integrale von $I_m = 0$ vorkommen — einfacher Gruppenexponent. Daher liefern die anderen Gruppenexponenten von $I_m = 0$, mögen sie einfach oder mehrfach vorkommen, wenn $\zeta = (x-a)^{\frac{1}{R}}$ gesetzt wird, Reihen von Gruppenexponenten wie (15.), die von den Werthen (15.) verschieden sind. Es sei nun bei jedem anderen Complex zusammenhängender Combinationen der Zweige von

u, v, w bei $x = a$ die $\Gamma_m = 0$ entsprechende Differentialgleichung $\Gamma'_m = 0$ gebildet und auf gleiche Weise, wie (15.) entsteht, seien bei jedem Complex die Reihen von Gruppenexponenten aufgestellt. *Diese Gruppenexponenten sollen alle von den Gruppenexponenten* (15.) *verschieden sein. Dann ist die oben aufgestellte Bedingung erfüllt, dass die Connexdifferentialgleichung* $\Phi_N(y, x) = 0$ *keine anderen Integrale mit Gruppenexponenten aus der Reihe* (15.) *hat, als diejenigen, welche aus dem Integrale* Y (8.) *mit dem Gruppenexponenten* ϱ *nach Substitution von* $\zeta = (x-a)^{\frac{1}{R}}$ *hervorgehen.*

C. Die Ausdrücke der Constanten C (10.) ergeben sich aus dem Systeme von $\lambda - 1$ linearen Gleichungen, welches aus Gleichung (10.) und den durch $(\lambda-2)$-malige Differentiation derselben hervorgegangenen besteht, unter der Form des Quotienten zweier Determinanten. Eine solche Determinante hat den allgemeinen Ausdruck, wenn die $\lambda - 1$ eingehenden y durch y_1 bis $y_{\lambda-1}$ bezeichnet werden,

$$(16.) \qquad \begin{vmatrix} \sum_{s=1}^{s=n} a_{1s} \frac{d^{n-s}y_1}{d\zeta^{n-s}}, & \cdots, & \sum_{s=1}^{s=n} a_{1s} \frac{d^{n-s}y_{\lambda-1}}{d\zeta^{n-s}} \\ \vdots & & \\ \sum_{s=1}^{s=n} a_{\lambda-1,s} \frac{d^{n-s}y_1}{d\zeta^{n-s}}, & \cdots, & \sum_{s=1}^{s=n} a_{\lambda-1,s} \frac{d^{n-s}y_{\lambda-1}}{d\zeta^{n-1}} \end{vmatrix} \qquad (n \geqq \lambda)$$

wo die Grössen a vermittelst der Gleichungen für u, v, w sich unter der Form $\frac{H(\zeta, u, v, w)}{K(\zeta)}$ ergeben, H und K ganze rationale Ausdrücke der angegebenen Variablen. Die Determinante (16.) ist gleich der Summe aller Producte

$$(17.) \qquad \begin{vmatrix} a_{1\alpha} & a_{1\beta} & \cdots a_{1\sigma} \\ a_{2\alpha} & a_{2\beta} & \cdots a_{2\sigma} \\ \vdots & & \\ a_{\lambda-1,\alpha} & a_{\lambda-1,\beta} & \cdots a_{\lambda-1,\sigma} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{d^{n-\alpha}y_1}{d\zeta^{n-\alpha}} & \frac{d^{n-\beta}y_1}{d\zeta^{n-\beta}} & \cdots \frac{d^{n-\sigma}y_1}{d\zeta^{n-\sigma}} \\ \vdots & \vdots & \\ \frac{d^{n-\alpha}y_{\lambda-1}}{d\zeta^{n-\alpha}} & \frac{d^{n-\beta}y_{\lambda-1}}{d\zeta^{n-\beta}} & \cdots \frac{d^{n-\sigma}y_{\lambda-1}}{d\zeta^{n-\sigma}} \end{vmatrix}$$

worin $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \sigma$ jede Zusammenstellung von $\lambda - 1$ verschiedenen Zeigern aus der Reihe $1, 2, \ldots, n$ in arithmetischer Reihenfolge bedeutet. Die Determinante der a nimmt die vorhin angegebene Form $\frac{H(\zeta, u, v, w)}{K(\zeta)}$ an. Die Integrale y_a der Differentialgleichung $\Psi_N(y, \zeta) = 0$ sind durch Systeme normaler Elementarintegrale (7.) gegeben, welche aus solchen Systemen (6.) für die Integrale der Connexdifferentialgleichung $\Psi_N(y, x) = 0$ hergeleitet waren. Letztere Integrale gehen aus gleich Null gesetzten Systemen

bei $x = a$ normaler Differentialausdrücke hervor. Daher wird der Factor von ζ^ϱ und einer Logarithmenpotenz in dem Integrale y_α von $\Psi_N(y, \zeta) = 0$ und jeder Differentialquotient dieses Factors nach dem Verfahren Abh. Bd. 96 No. 18 in einem Kreisringe um den Punkt $\zeta = 0$ als Mittelpunkt in dem Bezirke dieses Punktes bei $\Gamma_m(y, \zeta) = 0$ und $\Psi_N(y, \zeta) = 0$ mit vorgeschriebener Annäherung durch einen ganzen rationalen Ausdruck von ζ und ζ^{-1} mit Coefficienten, die sich rational aus gegebenen Constanten zusammensetzen, bezüglich dessen Differentialquotienten ausgedrückt. Dadurch gelangt man in einem solchen Kreisringe zur Berechnung der Determinante (16.) mit vorgeschriebener Annäherung. Auf diese Weise ist eine der nicht identisch verschwindenden $(\lambda - 1)$-reihigen Determinanten aus der Matrix (14.) zu ermitteln, bezüglich ein Punkt zu bestimmen, in welchem dieselbe von Null verschieden ist. Alsdann können in derselben Weise die Werthe der Constanten C (10.) mit vorgeschriebener Annäherung berechnet werden.

In dem betrachteten Integral Y von $\Gamma_m(y, \zeta) = 0$ mit einfachem Gruppenexponenten kommt (vgl. (5.)) kein Logarithmus vor. Daher sind nach geschehener Berechnung der Constanten C_2 bis C_λ die in den Ausdrücken der Integrale y_1 bis y_λ (9.) von $\Psi_N(y, \zeta) = 0$ thatsächlich oder formell enthaltenen logarithmischen Glieder aus dem Ausdruck (9.) wegzulassen.

Wenn alle Gruppenexponenten von $\Gamma_m(y, \zeta) = 0$ bei $\zeta = 0$ einfach sind, und wenn dasselbe in Bezug auf die $\Gamma_m(y, \zeta) = 0$ entsprechende Differentialgleichung $\Gamma'_m = 0$ bei jedem anderen Complex bei $x = a$ zusammenhängender Combinationen der Zweige von u, v, w stattfindet, so kommt wenn wieder x eingeführt wird, in ***keinem Integrale der Connexdifferentialgleichung*** $\Phi_N(y, x) = 0$ ***bei*** $x = a$ ***ein Logarithmus vor.*** Alsdann sind auch die in den Ausdrücken der Integrale von $\Psi_N(y, \zeta) = 0$ formell enthaltenen logarithmischen Glieder wegzustreichen.

III. Der ***Gruppenexponent*** ϱ eines Integrales von $\Gamma_m(y, \zeta) = 0$ bei $\zeta = 0$ soll in ***mehreren*** linearunabhängigen Integralen von $\Gamma_m(y, \zeta) = 0$ bei $\zeta = 0$ vorkommen — ***mehrfacher Gruppenexponent.*** ϱ sei ein ε-facher Gruppenexponent, $\varepsilon > 1$. Die Integrale von $\Psi_N(y, \zeta) = 0$ mit dem Gruppenexponenten ϱ seien (ohne besondere Reihenfolge) y_1, y_2 bis y_λ. Die Integrale von $\Gamma_m(y, \zeta) = 0$ mit dem Gruppenexponenten ϱ werden linear und homogen mit constanten Coefficienten durch y_1 bis y_λ ausgedrückt. Unter diesen Ausdrücken sei ein Integral von $\Gamma_m = 0$, welches y_1 mit nicht verschwindendem

Coefficienten enthält. Dann lassen sich neben diesem Integral noch $\varepsilon-1$ andere Integrale von $\Gamma_m = 0$ mit dem Gruppenexponenten ϱ herstellen, in deren Ausdrücken y_1 nicht vorkommt. Indem man so weiter verfährt, ergiebt sich, dass es ε Integrale von $\Gamma_m = 0$ mit dem Gruppenexponenten ϱ giebt, deren Ausdrücke sind

$$(18.)\qquad \begin{cases} y_1 + C_{\varepsilon+1}^{(1)} y_{\varepsilon+1} + \cdots + C_{\lambda}^{(1)} y_{\lambda}, \\ y_2 + C_{\varepsilon+1}^{(2)} y_{\varepsilon+1} + \cdots + C_{\lambda}^{(2)} y_{\lambda}, \\ \vdots \\ y_{\varepsilon} + C_{\varepsilon+1}^{(\varepsilon)} y_{\varepsilon+1} + \cdots + C_{\varepsilon+1}^{(\varepsilon)} y_{\lambda}. \end{cases}$$

Es ist also die Gleichung

$$(19.)\qquad \Gamma_m(y_{\mathfrak{a}}, \zeta) + C_{\varepsilon+1}^{(\mathfrak{a})} \Gamma(y_{\varepsilon+1}, \zeta) + \cdots + C_{\lambda}^{(\mathfrak{a})} \Gamma(y_{\lambda}, \zeta) = 0 \qquad (\mathfrak{a} = 1, \ldots, \varepsilon)$$

erfüllt. Ein Integral

$$(20.)\qquad z_{\varepsilon+1} y_{\varepsilon+1} + z_{\varepsilon+2} y_{\varepsilon+2} + \cdots + z_{\lambda} y_{\lambda}$$

mit Constanten z, die nicht alle verschwinden, besteht nicht, weil dieses von den Integralen (18.) linearunabhängig wäre. Also besteht auch eine Gleichung

$$(21.)\qquad z_{\varepsilon+1} \Gamma_m(y_{\varepsilon+1}, \zeta) + z_{\varepsilon+2} \Gamma_m(y_{\varepsilon+2}, \zeta) + \cdots + z_{\lambda} \Gamma_m(y_{\lambda}, \zeta) = 0,$$

in welcher die Constanten z nicht alle verschwinden, nicht. Die $\lambda-\varepsilon$ Functionen

$$(22.)\qquad \Gamma_m(y_{\varepsilon+1}, \zeta), \quad \Gamma_m(y_{\varepsilon+2}, \zeta), \ \ldots, \ \Gamma_m(y_{\lambda}, \zeta)$$

sind linearunabhängig, mithin verschwindet ihre Differentialdeterminante nicht identisch. Und umgekehrt, wenn letzteres der Fall ist, daher eine Gleichung (21.) nicht besteht, so ist ein Integral (20.) von $\Gamma_m(y, \zeta) = 0$ nicht vorhanden. Da nun ε Integrale von $\Gamma_m = 0$ mit dem Gruppenexponenten ϱ existiren, so muss es auch ε solche Integrale der Form (18.) geben, es muss also die Gleichung (19.) bestehen.

Diese Gleichung wird $(\lambda-\varepsilon-1)$-mal differentiirt; so erhält man im ganzen ein System von $\lambda-\varepsilon$ linearen Gleichungen mit nicht identisch verschwindender Determinante zur Bestimmung der $\lambda-\varepsilon$ Constanten $C_{\varepsilon+1}^{(\mathfrak{a})}$ bis $C_{\lambda}^{(\mathfrak{a})}$ und damit für $\mathfrak{a} = 1, \ldots, \varepsilon$ die ε Integrale (18.).

Die Matrix

$$(23.)\quad \begin{vmatrix} \Gamma_m(y_1,\zeta) & \Gamma_m(y_2,\zeta) & \cdots & \Gamma_m(y_\lambda,\zeta) \\ \frac{d\Gamma_m(y_1,\zeta)}{d\zeta} & \frac{d\Gamma_m(y_2,\zeta)}{d\zeta} & \cdots & \frac{d\Gamma_m(y_\lambda,\zeta)}{d\zeta} \\ \vdots & \vdots & & \\ \frac{d^{\lambda-\varepsilon-1}\Gamma_m(y_1,\zeta)}{d\zeta^{\lambda-\varepsilon-1}} & \frac{d^{\lambda-\varepsilon-1}\Gamma_m(y_2,\zeta)}{d\zeta^{\lambda-\varepsilon-1}} & \cdots & \frac{d^{\lambda-\varepsilon-1}\Gamma_m(y_\lambda,\zeta)}{d\zeta^{\lambda-\varepsilon-1}} \end{vmatrix}$$

ergiebt demnach dadurch, dass ε Verticalzeilen weggestrichen werden, wenigstens *eine* Determinante, die nicht identisch verschwindet, und zwar hat *jede* Determinante diese Eigenschaft, welche durch Wegstreichen von solchen ε Verticalzeilen entsteht, in denen die bezüglichen y in einem Systeme von ε Integralen von $\Gamma_m = 0$ mit dem Gruppenexponenten ϱ von der Form (18.) zu Anfang stehen. Die weitere Behandlung ist dann wie in IIC.

IV. In den normalen Elementardifferentialausdrücken des Systems (2.) für $\Gamma_m(y,\zeta)$ sind determinirender Factor und zugehöriger Gruppenexponent bekannt. Nach Satz No. 5 IIIA kommen in einem Systeme normaler Elementardifferentialausdrücke für $\Psi_N(y,\zeta)$ solche Bestandtheile vor, welche denen in dem Systeme für $\Gamma_m(y,\zeta)$ ähnlich sind. Wenn sich solche Elementardifferentialausdrücke nur unter den M ersten Bestandtheilen des Systems für $\Psi_N(y,\zeta)$ finden, deren System durch $S_M(y,\zeta)$ bezeichnet werde, so ergiebt das Verfahren, welches zu dem Satze No. 5 IIIA führte, *dass die Integrale von* $\Gamma_m(y,\zeta)=0$ *die Differentialgleichung* $S_M(y,\zeta)=0$ *erfüllen.* Dann brauchen in II (14.) und III (23.) auch nur die Integrale aus $S_M = 0$ mit dem Gruppenexponenten ϱ aufgenommen zu werden.

V. Ein Gruppenexponent ϱ von Integralen der Differentialgleichung $\Gamma_m(y,\zeta)=0$ bei $\zeta=0$ soll ***nur*** in denjenigen normalen Elementarintegralen M_α der Ausdrücke No. 4 (10.) der Integrale von $\Psi_N(y,\zeta)=0$ vorkommen, deren entsprechende Grössen μ_α No. 4 (2.) aus den Integralen der Differentialgleichung hervorgegangen sind, in welcher der ***erste*** canonische Bestandtheil von $\Phi_N(y,x)$ (No. 1 (4.)) gleich Null gesetzt ist. In dem Falle IV tritt dabei $S_M = 0$ an Stelle von $\Psi_N = 0$.

Die Integrale von $\Gamma_m(y,\zeta)=0$ bei $\zeta=0$ mit dem Gruppenexponenten ϱ erfüllen dann die Differentialgleichung $F_{(1)}(y,x)=0$, in welcher $x-a=\zeta^R$ gesetzt ist, wo $F_{(1)}(y,x)$ der erste canonische Bestandtheil ist. Die Integrale von $F_{(1)}(y,x)=0$ sind aber durch die Integrale der Hauptunterdifferential-

gleichungen von $F_{(1)} = 0$ ausdrückbar. Daher sind die Integrale mit dem Gruppenexponenten ϱ von $\Gamma_m(y, \zeta) = 0$ bei $\zeta = 0$ darstellbar durch homogene lineare Verbindungen mit constanten Coefficienten von ***normalen Integralen*** der Hauptunterdifferentialgleichungen für $x - a = \zeta^R$. Ein normales Integral hat den Ausdruck $e^w y$; w in dem determinirenden Factor e^w ist gleich Null oder von der Form $\sum_1^n c_{-\alpha}\zeta^{-\alpha}$, y hat den Ausdruck eines regulären Integrales (Abh. Bd. 115, S. 145). Wenn eine homogene lineare Verbindung solcher Functionen mit dem Gruppenexponenten ϱ die Differentialgleichung $\Gamma_m(y, \zeta) = 0$ erfüllt, so ist die Summe derjenigen Ausdrücke, welche denselben determinirenden Factor enthalten, für sich Integral von $\Gamma_m(y, \zeta) = 0$, also ein normales Integral (l. c. S. 146). Falls der Gruppenexponent ϱ in ε linearunabhängigen Integralen von $\Gamma_m(y, \zeta) = 0$ vorkommt, müssen daher in den genannten ε linearen Verbindungen *ε linearunabhängige normale Integrale von $\Gamma_m(y, \zeta) = 0$ mit dem Gruppenexponenten ϱ vorkommen.*

Nachdem unter der gemachten Voraussetzung bei einem ε-fachen Gruppenexponenten von $\Gamma_m(y, \zeta) = 0$ die Existenz dieser ε linearunabhängigen normalen Integrale von $\Gamma_m(y, \zeta) = 0$ nachgewiesen ist, werden dieselben *direct aus $\Gamma_m(y, \zeta) = 0$ bestimmt.*

Ein normales Integral von $\Gamma_m = 0$ mit dem Gruppenexponenten ϱ hat zum determinirenden Factor einen fundamentalen determinirenden Factor von $\Gamma_m = 0$, dessen Exponentengleichung unter ihren Wurzeln den Gruppenexponenten ϱ (abgesehen von einer zu addirenden ganzen Zahl) enthält (vergl. I). Ein solcher fundamentaler determinirender Factor e^{w_1} sei herausgenommen. Die zugehörige Exponentengleichung von $e^{-w_1}\Gamma_m(e^{w_1}y, \zeta) = 0$ enthalte $\varkappa$ Wurzeln, die sich von ϱ nur um ganze Zahlen unterscheiden; so müssen unter jenen ε normalen Integralen von $\Gamma_m = 0$ mit dem Gruppenexponenten ϱ $\varkappa$ mit dem determinirenden Factor e^{w_1} sein. (Es kann deren nicht mehr geben, weil $e^{-w_1}\Gamma_m(e^{w_1}y, \zeta) = 0$ nicht mehr als $\varkappa$ reguläre Integrale mit dem Gruppenexponenten ϱ enthalten kann, und daher auch nicht weniger, weil man sonst nicht die Anzahl ε normaler Integrale mit dem Gruppenexponenten ϱ erreicht). Wenn aber eine homogene lineare Differentialgleichung $f(y, \zeta) = 0$ mit in der Umgebung von $\zeta = 0$, abgesehen von diesem Punkte, einwerthigen und stetigen Coefficienten, die für $\zeta = 0$ in endlicher Ordnung unendlich werden, und dem Coefficienten der höchsten Ableitung gleich 1, so viele linearunabhängige reguläre Integrale mit

einem Gruppenexponenten ϱ hat, als die Exponentengleichung Wurzeln besitzt, die sich von ϱ nur um ganze Zahlen unterscheiden, so lassen sich diese Integrale aus $f(y, \zeta) = 0$ vollständig bestimmen.

Die Gesammtanzahl dieser Wurzeln sei $\varkappa$. Ueber deren Reihenfolge wird zunächst nichts bestimmt, dieselben seien durch r_1 bis $r_\varkappa$ bezeichnet. Dann giebt es (vgl. Abh. Bd. 96, No. 1) $\varkappa$ Integrale der Differentialgleichung $f(y, \zeta) = 0$ der Form

$$(24^a.) \qquad v_1, \quad v_1 \int v_2 d\zeta, \quad \cdots v_1 \int d\zeta v_2 \int \cdots \int v_\varkappa d\zeta,$$

$$(24^b.) \qquad v_1 = \zeta^{r_1} \chi_1(\zeta), \qquad v_\mathfrak{a} = \zeta^{r_\mathfrak{a} - r_{\mathfrak{a}-1}^{-1}} \chi_\mathfrak{a}(\zeta), \qquad (\mathfrak{a} = 2, \ldots, \varkappa)$$

wo die χ von der Form $c_0(1 + \sum_1^\infty c_\mathfrak{a} \zeta^\mathfrak{a})$ sind. Aus den Ausdrücken (24.) der $\varkappa$ Integrale folgt, dass dieselben einer homogenen linearen Differentialgleichung $\varkappa$-ter Ordnung genügen, die bei $\zeta = 0$ den charakteristischen Index gleich Null hat und deren Exponentengleichung wieder die Wurzeln r_1 bis $r_\varkappa$ besitzt (Abh. Bd. 75, No. 5 (2.) und S. 274). Und nun folgt aus letzterer Differentialgleichung, dass auch Integrale derselben unter der Form (24.) bestehen, wenn die $\varkappa$ Wurzeln r_1 bis $r_\varkappa$ so geordnet sind, dass der reelle Theil der vorhergehenden nicht kleiner als der der folgenden ist, und dieselben in dieser Anordnung wieder durch r_1 bis $r_\varkappa$ bezeichnet werden. Alsdann aber sind in den Entwickelungen der χ die Coefficienten $c_\mathfrak{a} (\mathfrak{a} \geqq 1)$ eindeutig aus der ursprünglichen Differentialgleichung $f(y, \zeta) = 0$ bestimmt, die c_0 sind willkürlich (vgl. Abh. Bd. 115, S. 147).

Damit sind die dem ε-fachen Gruppenexponenten ϱ entsprechenden ε normalen Integrale von $\Gamma_m(y, \zeta) = 0$ ermittelt.

Ein solches normales Integral wird nun durch die Integrale mit demselben Gruppenexponenten derjenigen Hauptunterdifferentialgleichungen von $F_{(1)}(y, x) = 0$, $x - a = \zeta^R$, linear und homogen mit constanten Coefficienten ausgedrückt, die bei $\zeta = 0$ denselben determinirenden Factor enthalten. Nachdem in einer solchen Gleichung durch den determinirenden Factor dividirt ist, erhält man durch Differentiation der Gleichung ein System linearer Gleichungen zur Bestimmung der Constanten. Die Differentialdeterminante ändert sich beim Umgange um $\zeta = 0$ um einen constanten Factor, die Determinante der Substitutionsconstanten; daher fallen die Logarithmen aus derselben aus. In den Ausdrücken der Constanten ist der

Uebergang auf $\zeta = 0$ zu vollziehen, wodurch dieselben *rationale Ausdrücke gegebener Constanten* werden.

7.

Discussion der ermittelten Integrale der homogenen linearen Differentialgleichung mit mehrwerthigen algebraischen Coefficienten.

Die Differentialgleichung No. 1 (1.)

$$(1.) \qquad F_m(y, u, v, w, x) = 0$$

wird mit Bezugnahme auf die allgemeinen in Abh. Bd. 115 No. 3 angestellten Untersuchungen hier weiter behandelt.

Bei einem Complex von R bei dem singulären Punkte $x = a$ zusammenhängenden Combinationen der Zweige von u, v, w wird Differentialgleichung (1.) durch die Substitution $x - a = \zeta^R$ in die Differentialgleichung

$$(2.) \qquad G_m(y, u, v, w, \zeta) = 0$$

gemäss No. 4 (1.) übergeführt, die in No. 6 durch $\Gamma_m(y, \zeta) = 0$ bezeichnet worden ist.

I. Die Integrale der Differentialgleichung $\Gamma_m(y, \zeta)$ bei $\zeta = 0$ mit dem Gruppenexponenten ϱ seien nach den in No. 6 gemachten Angaben durch homogene lineare Verbindungen mit constanten Coefficienten von Integralen der Differentialgleichung $\Psi_N(y, \zeta) = 0$ mit demselben Gruppenexponenten dargestellt, welche durch Substitution von $x - a = \zeta^R$ aus der Connexdifferentialgleichung von (1.) $\Phi_N(y, x) = 0$ hervorgegangen ist. Die Anzahl der linearunabhängigen Integrale von $\Gamma_m(y, \zeta) = 0$ mit dem Gruppenexponenten ϱ sei ε.

A. Wird in den Entwickelungen dieser ε linearunabhängigen Integrale von $\Gamma_m(y, \zeta) = 0$ $\zeta = (x-a)^{\frac{1}{R}}$ gesetzt und nimmt man in den hieraus entstehenden Ausdrücken 0, 1 bis $R-1$ Umgänge um $x = a$ vor, so erhält man (Abh. Bd. 115 No 3 I) R Systeme von ε linearunabhängigen Integralen der Differentialgleichung (1.), welche den R Combinationen der Zweige von u, v, w des Complexes zukommen.

Es sei der Gruppenexponent $\varrho = \varrho_1 + g$, wo ϱ_1 ein einzelner Werth von ϱ, g eine ganze Zahl. Jeder in dem Ausdruck eines Integrales von $\Gamma_m(y, \zeta) = 0$ vorkommende Factor einer Logarithmenpotenz von der Form $\zeta^{\varrho_1}\left(\sum_{0}^{\infty} c_\alpha \zeta^\alpha + \sum_{-1}^{-\infty} c_\alpha \zeta^\alpha\right)$ zerfällt als Potenzreihe durch die Substitution $\zeta = (x-a)^{\frac{1}{R}}$

in eine Summe der Form

$$(3.)\quad (x-a)^{\frac{\varrho_1}{R}}\left(\Phi(x-a)+\Phi_1(x-a)(x-a)^{\frac{1}{R}}+\cdots+\Phi_{R-1}(x-a)\,(x-a)^{\frac{R-1}{R}}\right),$$

wo die Entwicklungen Φ Potenzreihen mit ganzzahligen Exponenten sind. Die Integrale der Differentialgleichung $\Psi_N(y,\zeta)=0$ waren durch Substitution von $x-a=\zeta^R$ aus denen der Connexdifferentialgleichung $\Phi_N(y,x)=0$ hervorgegangen. Wird also $\zeta=(x-a)^{\frac{1}{R}}$ gesetzt, so erhält man die Integrale von $\Phi_N(y,x)=0$ wieder. Jedes dieser Integrale enthält nur einen Gruppenexponenten. *Also ist vermittelst dieser Darstellung von Integralen der Differentialgleichung* (1.) *durch homogene lineare Verbindungen mit constanten Coefficienten von Integralen der Connexdifferentialgleichung* $\Phi_N(y,x)=0$ *die Zerfällung* (3.) *zugleich ausgedrückt.*

B. *Die bei einem Integrale der Connexdifferentialgleichung mit einem beliebigen Gruppenexponenten* σ *in einem Factor* $(x-a)^\sigma\chi(x-a)$ *einer Logarithmenpotenz vorkommende Function* $\chi(x-a)$ *bleibt in dem* in Abh. Bd. 115, No. 3 III *genannten beliebigen Kreise C in der einblättrigen x-Ebene, in dessen Inneren ausser* $x=a$ *kein singulärer Punkt der Differentialgleichung* (1.) *liegt, abgesehen von* $x=a$ *einwerthig und stetig.* Dies folgt daraus, dass die Integrale der Differentialgleichung (1.) diejenigen der Connexdifferentialgleichung sind. Bei jedem Complex von R bei $x=a$ zusammenhängenden Combinationen der Zweige von u, v, w und der zugehörigen Differentialgleichung $\Gamma_m(y,\zeta)=0$ bleibt in einem Factor $\zeta^r\varphi(\zeta)$ einer Logarithmenpotenz in einem Integrale von $\Gamma_m=0$ mit dem Gruppenexponenten r die Function $\varphi(\zeta)$, abgesehen von $\zeta=0$, einwerthig und stetig in dem in Abh. Bd. 115 No. 3 III durch Z bezeichneten einfach zusammenhängenden einblättrigen Gebiete von ζ, wie dort gezeigt ist, wo Z dem Gebiete der Werthe x in dem Kreise C und in einer R-blättrigen Windungsfläche um $x=a$ vermöge $\zeta=(x-a)^{\frac{1}{R}}$ entspricht. $\varphi(\zeta)$ hat in einem gewissen Kreise um $\zeta=0$ als Mittelpunkt die Entwicklung nach Potenzen von ζ mit ganzzahligen Exponenten. Hieraus ergiebt sich durch $\zeta=(x-a)^{\frac{1}{R}}$:

$$(4.)\quad \varphi\left((x-a)^{\frac{1}{R}}\right)=\Phi(x-a)+\Phi_1(x-a)(x-a)^{\frac{1}{R}}+\cdots+\Phi_{R-1}(x-a)(x-a)^{\frac{R-1}{R}},$$

wo die Functionen Φ, Φ_1 bis Φ_{R-1} in der Umgebung von $x=a$, abgesehen von diesem Punkte, einwerthig und stetig sind. Die R-Zweige von $(x-a)^{\frac{1}{R}}$

gehen, indem $e^{\frac{2\pi i}{R}} = \omega$ gesetzt wird, aus einem derselben $[(x-a)^{\frac{1}{R}}]$ als $[(x-a)^{\frac{1}{R}}]\omega^{R'}$ $(R' = 0, \ldots, R-1)$ hervor, und man erhält aus (4.)

$$(5.)\quad \begin{cases} \varphi\left([(x-a)^{\frac{1}{R}}]\,\omega^{R'}\right) = \Phi(x-a) + \Phi_1(x-a)[(x-a)^{\frac{1}{R}}]\,\omega^{R'} + \cdots \\ \qquad + \Phi_{R-1}(x-a)\left([(x-a)^{\frac{1}{R}}]\,\omega^{R'}\right)^{R-1} \quad (R' = 0, \ldots, R-1). \end{cases}$$

Durch Auflösen dieses Systemes von R linearen Gleichungen in Bezug auf Φ, Φ_1 bis Φ_{R-1}, wobei die Determinante des Gleichungssystems in dem zu betrachtenden Gebiete um $x = a$ nicht verschwindet, ergiebt sich, dass die in der Umgebung von $x = a$ (abgesehen von diesem Punkte) einwerthigen und stetigen Functionen Φ, Φ_1 bis Φ_{R-1} diese Beschaffenheit in dem Kreise C behalten. Hieraus folgt (vgl. No. 6 I Schluss) für die Integrale der Connexdifferentialgleichung die aufgestellte Behauptung.

C. Die Darstellung der Integrale der Connexdifferentialgleichung vermittelst bestimmter Integrale und ihre Entwickelung durch Potenzreihen geschieht nach Abh. Bd. 96 dritte Abtheilung. Dasselbe findet für die Integrale der Differentialgleichung $\Psi_N(y, \zeta) = 0$ statt, gemäss No. 4 (10), No. 6 (7.). Die Darstellung dieser Integrale kommt bei den Untersuchungen in No. 6 II C, III und hier in D. vor.

Ueber das Vorkommen von Logarithmen in den Integralen der Connexdifferentialgleichung vgl. No. 6 II C.

D. Der Umgang um $x = a$ in den in A. aufgestellten Ausdrücken der Integrale. — Was diesen Umgang angeht, so hat man nach Abh. Bd. 115 No. 3 II einen R-maligen Umgang um $x = a$ in den von $x-a$ abhängenden Ausdrücken der Integrale der Differentialgleichung (1.) oder einen einmaligen Umgang um $\zeta = 0$ in den von ζ abhängenden Ausdrücken der Integrale von $\Gamma_m(y, \zeta) = 0$ vorzunehmen und das Resultat durch die ursprünglichen Integrale auszudrücken. In dem Falle No. 6 II kommt in dem betrachteten Integral Y von $\Gamma_m(y, \zeta) = 0$ kein Logarithmus vor. Bei dem Umgange um $\zeta = 0$ tritt daher, wenn der Gruppenexponent ϱ war, der Factor $e^{\pm 2\pi i \varrho}$ zu dem ursprünglichen Integrale hinzu. In dem Falle No. 6 III kann man zu ermitteln versuchen, ob in den dort (No. 6 (18.)) eingehenden Integralen von $\Psi_N(y, \zeta) = 0$, bezüglich $\Phi_N(y, x) = 0$ kein Logarithmus vorkommt (Abh. Bd. 96 No. 22). Dann tritt wie in dem vorigen

Falle der Factor $e^{\pm 2\pi i\varrho}$ zu dem ursprünglichen Integral hinzu. Sonst ist einerseits das Resultat des Umganges zu bilden, indem $\log\zeta \pm 2\pi i$ für $\log\zeta$ in den Ausdrücken der Integrale (bei $e^{\varrho\log\zeta}$, $\log\zeta$) gesetzt wird. Andererseits ist dieses Resultat linear und homogen mit constanten Coefficienten durch die ursprünglichen Integrale von $\Gamma_m = 0$ mit dem Gruppenexponenten ϱ (No. 6 (18.)) auszudrücken. Da diese Integrale linearunabhängig sind, so ist ihre Differentialdeterminante nicht identisch Null. Die Bestimmung der Constanten geschieht dann aus dem durch Differentiation hervorgehenden Systeme linearer Gleichungen entsprechend dem Verfahren in No. 6 II C.

II. Die Integrale der Differentialgleichung $\Gamma_m(y, \zeta) = 0$ bei $\zeta = 0$ mit dem Gruppenexponenten ϱ sind, wenn die in No. 6 V gemachte Voraussetzung zutrifft, als normale Integrale direct aus $\Gamma_m(y, \zeta) = 0$ bestimmt. Jedes dieser Integrale ist linear und homogen mit constanten Coefficienten durch die Integrale mit demselben Gruppenexponenten derjenigen Hauptunterdifferentialgleichungen von $F_{(1)}(y, x) = 0$, $x - a = \zeta^R$, dargestellt, welche denselben determinirenden Factor bei $\zeta = 0$ enthalten; wo $F_{(1)}(y, x)$ der erste canonische Bestandtheil in der canonischen Form des Differentialausdruckes in der Connexdifferentialgleichung ist. Wird $\zeta = (x-a)^{\frac{1}{R}}$ gesetzt, so erhält man die Integrale dieser Hauptunterdifferentialgleichungen wieder und damit die in I A angegebene Zerfällung ausgedrückt.

Die Integrale dieser Hauptunterdifferentialgleichungen von $F_{(1)}(y, x) = 0$ sind Integrale der Connexdifferentialgleichung. Es gilt daher in Betreff derselben das in I B Bemerkte. Jedes solches Integral besteht aus dem Product des determinirenden Factors in der Hauptunterdifferentialgleichung und dem Integrale einer regulären Differentialgleichung. Letzteres Integral muss daher auch die in I B angegebene Eigenschaft haben.

Der Umgang in den normalen Integralen um $\zeta = 0$ wird an den Ausdrücken der regulären Theile in derselben No. 6 (24.) vollzogen gemäss Abh. Bd. 96 No. 19 (2.).

Hierher gehört der in No. 2 angegebene, in Abh. Bd. 115 No. 9 behandelte Fall, wo der Differentialausdruck der Connexdifferentialgleichung in der canonischen Form einen einzigen canonischen Bestandtheil enthält. Die frühere Behandlung ist hier vervollständigt durch Darstellung der Integrale vermittelst der Integrale der Connexdifferentialgleichung und den

Nachweis, dass jedes der letzteren Integrale die in I. B angegebene Eigenschaft besitzt.

III. Die Differentialdeterminante der Integrale von $I'_m(y, \zeta) = 0$. — Der Coefficient $\frac{d^{m-1}y}{d\zeta^{m-1}}$ in $I'_m(y, \zeta)$ sei P_1. P_1 ist von der Form $\frac{H(\zeta, u, v, w)}{\zeta^\varkappa K(\zeta)}$, H und K ganze rationale Ausdrücke der eingehenden Variablen, $K(0)$ von Null verschieden. Aus der Darstellung von $I'_m(y, \zeta)$ durch ein System normaler Elementardifferentialausdrücke geht nach No. 6 I in Bezug auf den Ausdruck P_1 dieses hervor. Jeder fundamentale determinirende Factor e^w von $I'_m(y, \zeta)$ werde so oft als Factor aufgenommen, als die Anzahl der Wurzeln der zugehörigen Exponentengleichung beträgt, und das Product $e^{\sum_1^m w_a}$ gebildet. Ferner werde die Summe aller Wurzeln der Exponentengleichungen durch λ bezeichnet. Dann ist

$$P_1 = -\frac{d\sum_1^m w_a}{d\zeta} - \frac{\lambda + g}{\zeta} + P(\zeta), \tag{6.}$$

wo g eine ganze Zahl, $P(\zeta)$ von der Form $\sum_0^\infty c_a \zeta^a$. Die Function $P(\zeta)$ hat einen Ausdruck der Form $\frac{L(\zeta, u', v', w')}{K(\zeta)}$, L ein ganzer rationaler Ausdruck der eingehenden Variablen; u', v', w', sind algebraische Functionen, die hervorgehen indem $u = \sum_0^z c_a \zeta^a + \zeta^{z+1} u'$ gesetzt wird, ebenso bei v und w. Dieselben bleiben in dem in Abh. Bd. 115 No. 3 III durch Z bezeichneten, in I. B genannten, einfach zusammenhängenden einblättrigen Gebiete von ζ, welches den Punkt $\zeta = 0$ im Innern enthält, einwerthig und stetig. $K(\zeta)$ ist innerhalb dieses Gebietes in keinem Punkte gleich Null (vgl. l. c.). Aus (6.) ergiebt sich für die Differentialdeterminante der Ausdruck

$$e^{-\int P_1 d\xi} = e^{\sum_1^m w_a} \zeta^{\lambda+g} c e^{-\int_0^\zeta P(\zeta)\, d\zeta}, \tag{7.}$$

wo c ein constanter Factor. Dieser constante Factor ist direct durch den Werth der Differentialdeterminante in einem Punkt ζ mit vorgeschriebener Annäherung zu bestimmen nach No. 6 II C. Wenn der in II besprochene Fall bei allen Integralen der Differentialgleichung $I'_m(y, \zeta)$ eintritt, so ergiebt sich der constante Factor c durch Uebergang auf $\zeta = 0$ als rationaler Ausdruck gegebener Constanten.

Die Differentialdeterminante der entsprechenden Integrale von (1.) geht aus (7.) durch Substitution von $\zeta = (x-a)^{\frac{1}{R}}$ und Multiplication mit $\left(\frac{d\zeta}{dx}\right)^{\frac{m(m+1)}{2}}$ hervor (vgl. Abh. Bd. 115, S. 127).

IV. Die Fortsetzung der Integrale der Differentialgleichung (1.) wird unter Zugrundelegung der in Abh. Bd. 115 No. 3 III gemachten Angaben vermittelst einer linearen Substitution für $x = f(\xi)$ vollzogen. Die Einführung dieser linearen Substitution geschieht hier unmittelbar an den Integralen der Connexdifferentialgleichung, wobei die in I. B. nachgewiesene Eigenschaft derselben zur Anwendung kommt. Das Verfahren hierzu ist in Abh. Bd. 96 No. 20 I B. angegeben. Die Fortsetzung der algebraischen Functionen u, v, w geschieht nach Abh. Bd. 104, No. 9.

Die Constanten in den Substitutionen bei der Fortsetzung sind mit vorgeschriebener Annäherung zu berechnen. Hierzu ist die Werthberechnung der Integrale der Connexdifferentialgleichung und ihrer Ableitungen, die bei einem singulären Punkte der Differentialgleichung (1.) entwickelt sind, in einem nicht singulären Punkte erforderlich; bezüglich die der Integrale der Differentialgleichung $\Psi_N(y, \zeta) = 0$ (vgl. No. 6 II C.), durch $\zeta = (x-a)^{\frac{1}{R}}$ erfolgt aus letzteren diejenige der von x abhängenden Integrale. Diese Werthberechnung geschieht nach Abh. Bd. 96 No. 18. Ferner ist die Werthberechnung der bei einem nicht singulären Punkte entwickelten Integrale der Differentialgleichung (1.) im Bezirke dieses Punktes erforderlich. Dieselbe erfolgt nach Abh. Bd. 96 No. 18 (6.) etc., indem für die dortige Differentialgleichung (6.) mit bei $x = a$ einwerthigen Coefficienten das angegebene Verfahren gilt, da ein Werth für die dortige Grösse M_0 sich hier unmittelbar aus den Coefficienten der Differentialgleichung ergiebt.

Damit ist gemäss den allgemeinen Betrachtungen in Abh. Bd. 115 erste Abtheilung die Integration der homogenen Differentialgleichung (1.) erzielt.

8.

Die nicht homogene lineare Differentialgleichung mit mehrwerthigen algebraischen Coefficienten.

Die vorgelegte Differentialgleichung sei

$$(1.) \qquad F_m(y, u, v, w, x) = q,$$

wo F_m der homogene lineare Differentialausdruck No. 1 (1.) ist, bei welchem

die Voraussetzung aus No. 1 stattfindet, über den zweiten Theil q die Voraussetzungen aus Abh. Bd. 107 gemacht werden. Für die Differentialgleichung (1.) gelten die in Abh. Bd. 115 No. 1 und No. 4 gemachten Betrachtungen, auf welche hier Bezug genommen wird. Diesen Untersuchungen gemäss kommt es darauf an, ein Integral der Differentialgleichung

$$(2.) \qquad \Gamma_m(y, \zeta) = \left(\frac{dx}{d\zeta}\right)^m q_\alpha$$

zu ermitteln, wo $\Gamma_m(y, \zeta)$ der homogene lineare Differentialausdruck aus No. 6 ist, q_α durch $x - a = \zeta^R$ eine Function von ζ, welche die Form eines Integrales mit einem einzigen Gruppenexponenten (No. 6 I) hat.

I. Wenn alle Integrale von $\Gamma_m(y, \zeta) = 0$ bei $\zeta = 0$ als normale Integrale nach No. 6 V ermittelt sind, so tritt zur Integration von (2.) das in Abh. Bd. 115 No. 9 II. B. aufgestellte Verfahren ein (hierhin gehört der in No. 2 angegebene Fall des homogenen Differentialausdruckes F_m).

Auf die nicht homogene lineare Differentialgleichung (2.) wird die Methode der successiven Integrationen vermittelst integrirender Factoren angewandt.

II. Sind die Integrale von $\Gamma_m(y, \zeta) = 0$ bei $\zeta = 0$ allgemein nach No. 6 aufgestellt, so ist auf die nicht homogene lineare Differentialgleichung (2.) die Methode der Variation der Constanten anzuwenden.

Ein Integral von (2.) sei durch y_α bezeichnet. m linearunabhängige Integrale von $\Gamma_m(y, \zeta) = 0$ seien Y_1 bei Y_m. Durch die Methode der Variation der Constanten erhält man

$$(3.) \qquad y_\alpha = Y_1 \int \frac{L_1}{D}\left(\frac{dx}{d\zeta}\right)^m q_\alpha d\zeta + \cdots + Y_m \int \frac{L_m}{D}\left(\frac{dx}{d\zeta}\right)^m q_\alpha d\zeta,$$

wo D die Differentialdeterminante von Y_1, Y_2 bis Y_m ist, L_r die Determinante

$$(4.) \qquad L_r = \begin{vmatrix} Y_1 & \cdots & Y_{r-1} & 0 & Y_{r+1} & \cdots & Y_m \\ \frac{dY_1}{d\zeta} & \cdots & \frac{dY_{r-1}}{d\zeta} & 0 & \frac{dY_{r+1}}{d\zeta} & \cdots & \frac{dY_m}{d\zeta} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & & \\ \frac{d^{m-2}Y_1}{d\zeta^{m-2}} & \cdots & \frac{d^{m-2}Y_{r-1}}{d\zeta^{m-2}} & 0 & \frac{d^{m-2}Y_{r+1}}{d\zeta^{m-2}} & \cdots & \frac{d^{m-2}Y_m}{d\zeta^{m-2}} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}.$$

A.) Die Differentialdeterminante D hat nach No. 7 III den Ausdruck $\zeta^{\lambda+g}\omega$, wo ω in dem dort genannten Gebiete Z, welches den Punkt $\zeta = 0$ im Innern enthält, abgesehen von diesem Punkte einwerthig, stetig und von Null ver-

schieden ist. Die Grösse L_r hat den Ausdruck von der Form eines Integrales, in welchem ein und derselbe Gruppenexponent τ_r (No. 6 I) vorkommt. Wenn der Gruppenexponent in Y_α durch ϱ_α bezeichnet wird, so ist $\tau_r = \sum_1^m \varrho_\alpha - \varrho_r$. Die Factoren der Logarithmenpotenzen in L_r sind von der Form $\zeta^{\tau_r}\eta$, wo η in dem genannten Gebiete Z abgesehen von $\zeta = 0$ einwerthig und stetig ist (No. 7 I B.). Die Grösse q_α ist ebenso beschaffen, wie die L in einem Gebiete Z', welches wie Z in No. 7 I B. festgestellt wird, indem jetzt der dort genannte Kreis C ausser $x = a$ keinen singulären Punkt der nichthomogenen Differentialgleichung (1.) im Innern enthalten soll; Z' ist in Z enthalten. Der Gruppenexponent in q_α sei σ, der Gruppenexponent in $\frac{L_r}{D}\left(\frac{dx}{d\zeta}\right)^m q_\alpha$ ist alsdann $\sigma - \varrho_r = \varkappa$. Bei Herstellung der Entwickelung des Ausdruckes $\int \frac{L_r}{D}\left(\frac{dx}{d\zeta}\right)^m q_\alpha d\zeta$, in welcher Entwickelung das constante Glied annullirt wird, (Abh. Bd. 96 No. 13 (11.) (12)), kommen mit Logarithmenpotenzen multiplicirt vor Integrale der Art $\int \zeta^\varkappa \chi(\zeta) d\zeta$, wo $\chi(\zeta)$, abgesehen von $\zeta = 0$, in dem Gebiete Z' einwerthig und stetig bleibt, das constante Glied in der Entwickelung zu annulliren ist. Wenn $\varkappa$ nicht ganzzahlig ist, so wird dieses Integral $\zeta^{\varkappa+1}\psi(\zeta)$, wo $\psi(\zeta)$ in dem Gebiete Z', abgesehen von $\zeta = 0$, einwerthig und stetig. Ist $\varkappa$ ganzzahlig und aus der Entwickelung von $\zeta^\varkappa \chi(\zeta)$ das Glied, welches ζ^{-1} enthält, herausgenommen, der übrige Theil durch $\psi(\zeta)$ bezeichnet, so ist $\int \psi(\zeta) d\zeta$ in dem Gebiete Z' abgesehen von $\zeta = 0$ einwerthig und stetig.

Das Integral y_α (3.) erhält daher eine der Formen

$$(5.) \qquad \begin{cases} \zeta^\sigma \varphi(\zeta), \\ \zeta^\sigma (\varphi_1(\zeta) + \varphi_2(\zeta)\log(\zeta) + \cdots + \varphi_\tau(\zeta)(\log\zeta)^{\tau-1}), \end{cases}$$

wo σ der Gruppenexponent aus q_α, *die Functionen φ in dem Gebiete Z', abgesehen von $\zeta = 0$, einwerthig und stetig sind.*

B.) Diese Functionen φ sind vermittelst bestimmter Integrale (Abh. Bd. 96 No. 16) darzustellen.

Die in L_r nach No. 6 vorkommenden Differentialquotienten von Integralen der Differentialgleichung $\Psi_N(y, \zeta) = 0$ werden an den Ausdrücken dieser Integrale durch Systeme normaler Elementarintegrale No. 6 (7) gebildet, wodurch man wieder auf eine Summe von solchen Systemen kommt.

Jedes solche System wird (s. l. c.) durch eine Summe von bestimmten Integralen ausgedrückt. In einem Producte von bestimmten Integralen werden, indem in jedem Factor die Integrationsvariablen anders bezeichnet werden, alle unter den Integrationszeichen vorkommenden Grössen unter die Gesammtheit der Integralzeichen gestellt. Eine Integralfunction wird dann wieder in der l. c. angegebenen Weise vermittelst bestimmter Integrale ausgedrückt. Auf diese Weise ergiebt sich nach Abh. Bd. 96 No. 16 die Darstellung der Functionen φ durch bestimmte Integrale.

Aus dieser Darstellung erfolgt die Entwickelung dieser Functionen nach Potenzen von ζ nach Abh. Bd. 96 No. 17. Eine Recursionsformel für die Coefficienten in dieser Entwickelung mit constanter Anzahl der Glieder ergiebt sich gemäss den Angaben Abh. Bd. 115, S. 137, 138.

C.) Der Umgang in dem Integrale y_α (3.) um $\zeta = 0$ wird in folgender Weise ausgedrückt. Bei dem einmaligen Umgange um $\zeta = 0$ geht q_α über in

$$q'_\alpha = k_1 q_1 + k_2 q_2 + \cdots + k_s q_s, \tag{6.}$$

wo die Grössen $q_\alpha (\alpha = 1, \ldots, s)$ linearunabhängige Ausdrücke mit einem und demselben Gruppenexponenten sind, die k gegebene Constanten. Der Grösse $q_\alpha (\alpha = 1, \ldots, s)$ in (2.) entspricht das Integral $y_\alpha (\alpha = 1, \ldots, s)$ (3.). Daher geht das Integral y_α (3.) durch denselben Umgang in

$$y'_\alpha = k_1 y_1 + k_2 y_2 + \cdots + k_s y_s + \omega_\alpha \tag{7.}$$

über, wo ω_α eine homogene lineare Verbindung mit constanten Coefficienten der Integrale Y_1, Y_2 bis Y_m der Differentialgleichung $\Gamma_m(y, \zeta) = 0$ ist. Die Constanten in ω_α werden nun in folgender Weise bestimmt. Durch denselben Umgang um $\zeta = 0$ geht Y_α in Y'_α über, wo

$$Y'_\alpha = c_{\alpha 1} Y_1 + c_{\alpha 2} Y_2 + \cdots + c_{\alpha m} Y_m, \tag{8.}$$

die c Constanten, die nach No. 7 I. D; II bestimmt werden. L_r gehe in L'_r über, wo L'_r aus (4.) entsteht, wenn Y durch Y' ersetzt wird. Die Differentialdeterminante D gehe in D' über; wird die Determinante der $c (\alpha = 1, \ldots, m)$ in (8.) durch k bezeichnet, so ist $D' = kD$. Das Integral $\int \frac{L_r}{D} \left(\frac{dx}{d\zeta}\right)^m q_\alpha \, d\zeta$, in dessen Entwickelung das constante Glied annullirt ist, geht über in

$$\int \frac{L'_r}{D'} \left(\frac{dx}{d\zeta}\right)^m q'_\alpha \, d\zeta + K_r, \tag{9.}$$

wo in der Entwickelung des in (9.) vorkommenden Integrales das constante

Glied annullirt ist, K_r das constante Glied in dem Resultate des Umganges in der Entwickelung von $\int \frac{L_r}{D}\left(\frac{dx}{d\zeta}\right)^m q_\mathfrak{a}\, d\zeta$ ist. K_r wird bestimmt vermittelst einer Summe von bestimmten Integralen (vgl. B). Ist der Gruppenexponent in dieser Entwickelung nicht ganzzahlig, so ist $K_r = 0$. Nun besteht die Gleichung

$$(10.)\qquad \sum_{r=1}^{r=m} Y'_r \int \frac{L'_r}{D'}\left(\frac{dx}{d\zeta}\right)^m q'_\mathfrak{a}\, d\zeta = \sum_{r=1}^{r=m} Y_r \int \frac{L_r}{D}\left(\frac{dx}{d\zeta}\right)^m q'_\mathfrak{a}\, d\zeta,$$

wo in der Entwickelung jedes Integrales das constante Glied annullirt ist. Denn wird in (10.) für $Y'_\mathfrak{a}(\mathfrak{a} = 1, \ldots, m)$ der Ausdruck (8.) gesetzt, so ergiebt sich jedes Y_r multiplicirt mit einem Integral, bei welchem unter dem Integralzeichen der Ausdruck

$$(11.)\qquad (c_{1r} L'_1 + c_{2r} L'_2 + \cdots + c_{mr} L'_m)\frac{1}{D'}\left(\frac{dx}{d\zeta}\right)^m q'_\mathfrak{a}$$

steht. Die Grösse in der Klammer in (11.) ist

$$(12.)\qquad \begin{vmatrix} Y'_1 & Y'_2 & \cdots & Y'_m \\ \frac{dY'_1}{d\zeta} & \frac{dY'_2}{d\zeta} & \cdots & \frac{dY'_m}{d\zeta} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{d^{m-2}Y'_1}{d\zeta^{m-2}} & \frac{d^{m-2}Y'_2}{d\zeta^{m-2}} & \cdots & \frac{d^{m-2}Y'_m}{d\zeta^{m-2}} \\ c_{1r} & c_{2r} & \cdots & c_{mr} \end{vmatrix}$$

und diese Determinante wird durch Einsetzen der Ausdrücke (8.) gleich dem Producte der Determinante k der $c(\mathfrak{a} = 1, \ldots, m)$ in (8.) und der Determinante

$$(13.)\qquad \begin{vmatrix} Y_1 & \cdots & Y_{r-1} & Y_r & Y_{r+1} & \cdots & Y_m \\ \frac{dY_1}{d\zeta} & \cdots & \frac{dY_{r-1}}{d\zeta} & \frac{dY_r}{d\zeta} & \frac{dY_{r+1}}{d\zeta} & \cdots & \frac{dY_m}{d\zeta} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ \frac{d^{m-2}Y_1}{d\zeta^{m-2}} & \cdots & \frac{d^{m-2}Y_{r-1}}{d\zeta^{m-2}} & \frac{d^{m-2}Y_r}{d\zeta^{m-2}} & \frac{d^{m-2}Y_{r+1}}{d\zeta^{m-2}} & \cdots & \frac{d^{m-2}Y_m}{d\zeta^{m-2}} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix},$$

welche gleich L_r ist. Also ist die Grösse (11.) gleich $\frac{L_r}{D}\left(\frac{dx}{d\zeta}\right)^m q'_\mathfrak{a}$. Wird nun in (10.) für $q'_\mathfrak{a}$ der Ausdruck (6.) eingesetzt, so ergiebt sich aus (7.), (9.) und (10.) für $\omega_\mathfrak{a}$ (7.) der Ausdruck

$$(14.)\qquad \omega_\mathfrak{a} = K_1 Y'_1 + K_2 Y'_2 + \cdots + K_m Y'_m,$$

wo die Constanten K aus (9.) hervorgehen, hier sind für die Y' die Ausdrücke (8.) einzusetzen.

III. Nachdem ein Integral der Differentialgleichung (2.) ermittelt ist, wird in der Entwickelung (I, II B) des von ζ abhängenden Integrales, welches von der Form (5.) ist, $\zeta = (x-a)^{\frac{1}{R}}$ gesetzt, wodurch die Factoren der Logarithmenpotenzen in einen Ausdruck wie No. 7 (3.) zerfallen. Die eingehenden Reihen der Potenzen von $x-a$ mit ganzzahligen Exponenten convergiren in dem Bezirke von a bei der Differentialgleichung (1.) (die mit negativen Exponenten abgesehen von $x=a$).

Mittelst der Integrale $y_\alpha (\alpha = 1, \ldots, s)$ der Differentialgleichung (2.) für $\alpha = 1, \ldots, s$, die in II. C. genannt sind, wird, nachdem $\zeta = (x-a)^{\frac{1}{R}}$ gesetzt ist, nach den Angaben in Abh. Bd. 115 No. 4 das Integral der Differentialgleichung (1.) für den Complex der R bei $x=a$ zusammenhängenden Combinationen der Zweige von u, v, w bei einer und derselben Function q_α hergestellt. Der Umgang in diesem Integrale um $x=a$ erfolgt nach den dortigen Angaben unter Zugrundelegung des Umganges um $\zeta = 0$ (I, II C).

Die Fortsetzung des Integrales der Differentialgleichung (1.) wird gemäss Abh. Bd. 115 No. 3, 4 vermittelst einer linearen Substitution für x $x = f(\xi)$ bewerkstelligt. Diese Substitution wird bei den von ζ abhängenden bestimmten Integralen für die Functionen φ (II B) vorgenommenen (vgl. Abh. Bd. 115 No. 7 III). Es kommt dabei für die Entwickelung die in II A nachgewiesene Eigenschaft dieser Functionen in Betracht. Für die Coefficienten in den Entwickelungen erhält man eine Recursionsformel mit constanter Anzahl der Glieder wie in II. B.

Die Werthberechnung der Constanten in den Substitutionen mit vorgeschriebener Annäherung geschieht entsprechend den Angaben in No. 7 IV. Das hierzu eintretende Verfahren bei dem Uebergange von einem nicht singulären Punkte zu einem anderen solchen bei der nicht homogenen linearen Differentialgleichung ist in Abh. Bd. 107 No. 4 auseinandergesetzt.

Die in den allgemeinen Betrachtungen in Abh. Bd. 115 erste Abtheilung für die Integration der nicht homogenen Differentialgleichung (1.) gemachten Anforderungen sind damit erfüllt.

Ueber die Anzahl der Idealklassen in reinen kubischen Zahlkörpern.

Von *R. Dedekind* in Braunschweig.

Die vorliegende Abhandlung ist im Laufe des Winters 1897/98 durch Umarbeitung eines aus dem Jahre 1871 oder 1872 stammenden Entwurfes entstanden; ihr Hauptergebniss habe ich (Februar 1873) in meiner Anzeige*) der Vorlesungen über die Kreistheilung von *P. Bachmann* bei Besprechung des kubischen Reciprocitätsgesetzes mit den folgenden Worten kurz angedeutet: „Bedeutet k eine ganze rationale Zahl, deren Kubikwurzel irrational ist, so entspringt aus der Gleichung $x^3 = k$ ein reiner kubischer Körper, dessen Grundzahl die Form $D = -3g^2$ hat, wo g eine aus k leicht abzuleitende ganze Zahl ist. Fragt man nun nach allen in k nicht aufgehenden Primzahlen p von der Form $3n+1$, von welchen die gegebene Zahl k kubischer Rest ist, so gelangt man mit Hülfe des Reciprocitätssatzes zu folgendem interessanten Resultat, welches im Wesentlichen schon *Gauss* bekannt gewesen ist (und sich auf beliebige kubische Körper ausdehnen lässt): Die sämmtlichen nicht äquivalenten, ursprünglichen positiven quadratischen Formen $ax^2+bxy+cy^2$, in welchen $b^2-4ac = D$, zerfallen in drei Abtheilungen von gleich vielen Individuen, deren erste eine Gruppe bildet, durch deren Formen alle und nur solche Primzahlen p dargestellt werden, von welchen k kubischer Rest ist. Mit Hülfe desselben wird die Bestimmung der Anzahl der Idealklassen des kubischen Körpers auf einen bekannten Theil der Theorie der Thetafunctionen zurückgeführt.“ Zur Vergleichung bemerke ich, dass die hier gebrauchten Zeichen k, x, g in der folgenden Abhandlung resp. durch ∂, Θ, k ersetzt sind; der Satz über die für den kubischen Körper charakteristische Drittelung der Gruppe der quadratischen Formen von der Discriminante D findet sich in § 11. Die

*) *Schlömilchs* Zeitschrift für Mathematik und Physik, Jahrgang 18; 1873. Literaturzeitung S. 22, 43.

eingeklammerten Worte, welche sich auf die Ausdehnung dieses Satzes auf alle kubischen Körper beziehen, habe ich damals, weil ich im Besitze des Beweises zu sein glaubte, dem Manuscripte der Anzeige gleich nachgeschickt, ihre Einfügung an der bezeichneten Stelle ist aber über dem grossen Leipziger Setzerstrike versäumt, und sie sind erst im folgenden Hefte der Literaturzeitung (S. 43) abgedruckt. Durch Ueberhäufung mit Amtsgeschäften wurde ich in jener Zeit für mehrere Jahre an jeder wissenschaftlichen Thätigkeit gehindert, und erst später habe ich erkannt, dass die mir zu Gebote stehenden Mittel zum Beweise der Allgemeingültigkeit des Satzes nicht ausreichten. Seitdem bin ich nur vorübergehend und ohne den gewünschten Erfolg zu dieser Untersuchung zurückgekehrt; doch zweifle ich auch heute nicht an der Wahrheit des Satzes, den ich in allen Beispielen bestätigt gefunden habe, und ich glaube auch, dass für Körper von negativer Grundzahl die jetzt mehr ausgebildete Theorie der complexen Multiplication der elliptischen Functionen zum Beweise wohl ausreichen wird; vielleicht wird, wenn dies gelingt, hierdurch auch ein Weg zur Lösung des grossen Räthsels gebahnt, welche algebraische Zahlkörper den Klassen der binären quadratischen Formen (oder Moduln) von positiver Discriminante entsprechen. Meine bisherigen, auf diese Fragen bezüglichen Versuche gedenke ich in einer Abhandlung über die Invarianten beliebiger kubischer Körper mitzutheilen. Die gegenwärtige Abhandlung, welche sich ausschliesslich mit den reinen kubischen Körpern beschäftigt, verfolgt lediglich das in der oben erwähnten Anzeige vom Jahre 1873 angedeutete Ziel und endigt mit der Einmündung der Untersuchung in die Theorie der complexen Multiplication. Ich erwähne schliesslich, dass die Theorie der reinen kubischen Körper meines Wissens bisher nur von *A. Markoff* behandelt ist; seine Abhandlung*) „Sur les nombres entiers dépendants d'une racine cubique d'un nombre entier ordinaire" beschränkt sich im Wesentlichen auf die (von mir in §§ 1—5 behandelte) Bestimmung der in dem Körper vorhandenen Ideale, wobei die Auffassung von *Zolotareff* zu Grunde gelegt ist; ausserdem giebt sie am Schlusse eine sehr werthvolle Tabelle von Einheiten (vergl. unten § 13).

*) Mémoires de l'Académie impériale des sciences de St.-Pétersbourg, VIIe série, tome 38.

§ 1.

Reine kubische Zahlkörper.

Ist die rationale Zahl ∂ nicht die dritte Potenz einer rationalen Zahl, so sind die drei Kubikwurzeln $\Theta = \sqrt[3]{\partial}$ irrational, und es kann auch keine von ihnen die Wurzel einer quadratischen Gleichung $\Theta^2 + m\Theta + n = 0$ mit rationalen Coefficienten m, n sein; multiplicirt man nämlich mit Θ, so würde hieraus $(n - m^2)\Theta + (\partial - mn) = 0$, also, weil Θ irrational ist, $n = m^2$ und $\partial = mn = m^3$ folgen, was im Widerspruch mit unserer Annahme über ∂ steht. Mithin ist jede der drei Wurzeln Θ eine algebraische Zahl dritten Grades (vergl. § 167. S. 492 der vierten Auflage von *Dirichlet*s Zahlentheorie, die ich mit D. citiren werde). Im Folgenden bezeichnen wir mit Θ die *reelle* Kubikwurzel aus ∂, mit Θ', Θ'' die beiden *imaginären* Wurzeln

$$\Theta' = \Theta\varrho, \quad \Theta'' = \Theta\varrho^2$$

wo ϱ eine imaginäre dritte Einheitswurzel, also

$$\varrho^2 + \varrho + 1 = 0$$

ist.

Aus dem Körper R der rationalen Zahlen entsteht durch Adjunction der Zahl Θ der *reine kubische Zahlkörper* $K = R(\Theta)$ vom Grade $(K, R) = 3$; er besteht aus allen Zahlen von der Form

$$\varkappa = x_1\Theta^2 + x_2\Theta + x_3,$$

wo x_1, x_2, x_3 beliebige Zahlen in R bedeuten, und jede Zahl $\varkappa$ kann auch nur auf eine einzige Art in dieser Form dargestellt werden, weil die drei Potenzen $\Theta^2, \Theta, 1$ eine irreducibele Basis von K bilden (D. § 164. S. 472). Die beiden Körper R und K sind die einzigen Divisoren von K; denn wenn der Körper L in K enthalten ist, so folgt (nach D. § 164. S. 473), dass $(K, L)(L, R) = (K, R) = 3$, also entweder $(K, L) = 3$, $(L, R) = 1$, $L = R$ oder $(K, L) = 1$, $(L, R) = 3$, $L = K$ ist. Betrachtet man nun irgend eine in K enthaltene Zahl $\varkappa$ von der obigen Form, so ist der von ihr erzeugte Körper $R(\varkappa)$ jedenfalls Divisor von K, und zwar tritt der Fall $R(\varkappa) = R$ immer und nur dann ein, wenn $\varkappa$ rational, also $x_1 = x_2 = 0$ ist; jede irrationale Zahl $\varkappa$ des Körpers K erzeugt daher stets denselben Körper $R(\varkappa) = K$ und ist folglich eine algebraische Zahl dritten Grades.

Diese Schlüsse sind offenbar unabhängig von der Voraussetzung, dass Θ reell ist, und gelten daher ebenso für die beiden reinen kubischen Körper $K' = R(\Theta')$ und $K'' = R(\Theta'')$. Bedeutet z. B. $\varkappa'$ eine irrationale Zahl des Körpers K', so ist $R(\varkappa') = K'$, und folglich kann $\varkappa'$ nicht reell sein,

weil sonst K' aus lauter reellen Zahlen bestehen würde, während doch die imaginäre Zahl $\Theta' = \Theta\varrho$ in K' enthalten ist; mithin enthalten die Körper K', K'' ausser den rationalen nur imaginäre Zahlen, während K nur aus reellen Zahlen besteht. Die beiden Körper K', K'' sind aber nicht allein von K, sondern auch von einander verschieden; denn wäre $K' = K''$, so müsste die Zahl $\Theta'' = \Theta'\varrho$, also auch die Zahl $\varrho = \Theta'' : \Theta'$ in K' enthalten sein, was nach dem Obigen nicht angeht, weil ϱ eine algebraische Zahl zweiten Grades ist.

Der Körper K besitzt drei Permutationen (D. § 165), durch welche er in die drei conjugirten Körper K, K', K'' übergeht; jede in K enthaltene Zahl z von der obigen Form

$$z = x_1\Theta^2 + x_2\Theta + x_3$$

geht durch die erste, die identische Permutation in sich selbst, durch die zweite und dritte in die conjugirten Zahlen $z' = x_1\Theta'^2 + x_2\Theta' + x_3$ und $z'' = x_1\Theta''^2 + x_2\Theta'' + x_3$ über; ist $z' = u + vi$, wo u, v reelle Zahlen bedeuten, während $i = \sqrt{-1}$ ist, so ist $z'' = u - vi$.

§ 2.

Invarianten des Körpers K.

Jede von Null verschiedene rationale Zahl ∂ kann offenbar immer und nur auf eine einzige Weise in der Form

$$\partial = ab^2c^3$$

dargestellt werden, wo c rational ist, und a, b natürliche Zahlen bedeuten, deren Product ab durch kein Primzahl-Quadrat theilbar ist; da in unserem Falle ∂ nicht die dritte Potenz einer rationalen Zahl ist, so ist ausserdem

$$ab > 1.$$

Setzt man nun $\Theta = c\alpha$, so wird die positive Zahl $\alpha = \sqrt[3]{ab^2}$, und da α irrational und in K enthalten ist, so ist auch $K = R(\alpha)$; da ferner $\alpha^2 = \sqrt[3]{a^2b^4} = b\sqrt[3]{a^2b}$ ist, so wird, wenn man $\sqrt[3]{a^2b} = \beta$ setzt,

$$\alpha^2 = b\beta,\ \beta^2 = a\alpha,\ \alpha\beta = ab;$$

$$\alpha^3 = ab^2,\ \beta^3 = a^2b,$$

und die allgemeine Form aller in K enthaltenen Zahlen z ist:

$$z = z + x\alpha + y\beta,$$

wo z, x, y beliebige Zahlen in R bedeuten.

Die mit α und die mit β conjugirten Zahlen α', α'' und β', β'' ergeben sich aus

$$c\alpha = \Theta, \quad c\alpha' = \Theta' = \Theta\varrho = c\alpha\varrho, \quad c\alpha'' = \Theta'' = \Theta\varrho^2 = c\alpha\varrho^2$$

und aus

$$ab = \alpha\beta = \alpha'\beta' = \alpha''\beta'',$$

nämlich

$$\alpha' = \alpha\varrho, \quad \alpha'' = \alpha\varrho^2, \quad \beta' = \beta\varrho^2, \quad \beta'' = \beta\varrho,$$

und hieraus folgt allgemein

$$\varkappa' = z + x\alpha\varrho + y\beta\varrho^2, \; \varkappa'' = z + x\alpha\varrho^2 + y\beta\varrho$$

oder

$$\varkappa' = (x\alpha - z)\varrho + (y\beta - z)\varrho^2, \; \varkappa'' = (x\alpha - z)\varrho^2 + (y\beta - z)\varrho.$$

Für das Supplement und die Norm der Zahl $\varkappa$ erhält man daher (nach D. § 176. S. 542 und § 167. S. 486) die Darstellungen

$$\begin{aligned}\varkappa'\varkappa'' &= (x\alpha - z)^2 - (x\alpha - z)(y\beta - z) + (y\beta - z)^2 \\ &= (z^2 - abxy) + (ay^2 - zx)\alpha + (bx^2 - zy)\beta\end{aligned}$$

und

$$N(\varkappa) = \varkappa\varkappa'\varkappa'' = z^3 - 3abzxy + ab^2x^3 + a^2by^3.$$

Wir stellen uns jetzt die Aufgabe, alle diejenigen Zahlen $\varkappa$ in K zu finden, deren dritte Potenz *rational* ist. Nehmen wir an, es sei $\varkappa^3 = e$, wo e eine rationale Zahl bedeutet, so folgt auch $\varkappa'^3 = e$, also muss

$$\varkappa' = \varkappa \text{ oder } \varkappa' = \varkappa\varrho \text{ oder } \varkappa' = \varkappa\varrho^2$$

sein; da aber allgemein

$$\begin{aligned}\varkappa' - \varkappa &= (1 - \varrho^2)(x\alpha\varrho - y\beta), \\ \varkappa' - \varkappa\varrho &= (1 - \varrho)(z - y\beta\varrho), \\ \varkappa' - \varkappa\varrho^2 &= (\varrho^2 - \varrho)(z\varrho - x\alpha),\end{aligned}$$

und ausserdem die Zahl ϱ nicht in K enthalten ist, so muss im ersten, zweiten, dritten Falle entsprechend

$$\begin{aligned} x = y = 0, &\quad \varkappa = z, &\quad e = z^3, \\ z = y = 0, &\quad \varkappa = x\alpha, &\quad e = ab^2x^3, \\ z = x = 0, &\quad \varkappa = y\beta, &\quad e = a^2by^3 \end{aligned}$$

sein. Im ersten Falle ist $\varkappa$ rational, also $R(\varkappa) = R$, und dasselbe gilt auch für den zweiten und dritten Fall, wenn x, resp. $y = 0$ ist; in allen diesen Fällen ist e die dritte Potenz einer rationalen Zahl. Soll also die Zahl $\varkappa$

(ebenso wie Θ) die Kubikwurzel aus einer rationalen Zahl e sein, welche (wie ∂) nicht die dritte Potenz einer rationalen Zahl ist, so geschieht dies nur im zweiten oder dritten Falle, wenn x, resp. y von Null verschieden gewählt wird, und gleichzeitig wird $R(\varkappa) = K$; vergleicht man ferner die Formen $e = ab^2x^3$, $e = ba^2y^3$ der Zahl e mit der Form $\partial = ab^2c^3$, so ergiebt sich, dass alle diese irrationalen Zahlen $\varkappa$ des Körpers K, deren dritte Potenz e rational ist, auf *dasselbe Paar* a, b oder b, a führen. Wir nennen daher diese beiden natürlichen Zahlen a, b, durch welche der reine kubische Körper K vollständig bestimmt ist, die *Invarianten des Körpers* K.

Da der Körper K durch Vertauschung von a mit b nicht geändert wird, so kann man, um alle reinen kubischen Körper K und jeden nur einmal zu erhalten, so verfahren: man betrachte alle natürlichen Zahlen,

Nr.	ab	a	b	ab^2	a^2b	k	k''	h
1	2	2	1	2	4	6	1	1
2	3	3	1	3	9	9	1	1
3	5	5	1	5	25	15	2	1
4	6	6	1	6	36	18	3	1
5	6	3	2	12	18	18	3	1
6	7	7	1	7	49	21	2	3
(7)	10	10	1	10	100	10	2	1
8	10	5	2	20	50	30	6	3
9	11	11	1	11	121	33	4	2
10	13	13	1	13	169	39	4	3
11	14	14	1	14	196	42	6	3
(12)	14	7	2	28	98	14	2	3
13	15	15	1	15	225	45	6	2
14	15	5	3	45	75	45	6	1
(15)	17	17	1	17	289	17	2	1
(16)	19	19	1	19	361	19	2	3
17	21	21	1	21	441	63	6	3
18	21	7	3	63	147	63	6	6
19	22	22	1	22	484	66	12	3
(20)	22	11	2	44	242	22	4	1
21	23	23	1	23	529	69	8	1

welche >1 und durch kein Primzahl-Quadrat theilbar sind, und zerlege jede auf alle Arten in zwei Factoren a, b, von denen a der grössere ist; bezeichnet man dann mit α und β die positiven Kubikwurzeln aus ab^2 und a^2b, so ist $R(\alpha) = R(\beta)$ ein reeller reiner kubischer Körper K, zu welchem jedesmal zwei conjugirte imaginäre reine kubische Körper K', K'' gehören. Hier folgt der Anfang einer solchen Tabelle (s. S. 45) aller reinen kubischen Körper K; die in ihr auftretenden Spalten k und k'' werden später (§§ 3, 4, 9) erklärt werden, und h bedeutet die Anzahl der Idealklassen des Körpers.

§ 3.

Die in $3ab$ aufgehenden Primideale.

Es sei $\mathfrak{o}$ die Hauptordnung des Körpers K, d. h. der Inbegriff aller in ihm enthaltenen *ganzen* algebraischen Zahlen, und

$$\Delta(\mathfrak{o}) = D$$

die Discriminante oder Grundzahl von K(D. § 175. S. 538). Um $\mathfrak{o}$ und D zu bestimmen, betrachten wir zunächst den Modul

$$\mathfrak{n} = [1, \alpha, \beta],$$

d. h. den Inbegriff aller derjenigen Zahlen $\varkappa = z + x\alpha + y\beta$, welche durch beliebige *ganze* rationale Zahlen z, x, y erzeugt werden; da die Basiszahlen 1, α, β ganze (algebraische) Zahlen sind, so gilt dasselbe von allen diesen Zahlen $\varkappa$, d. h. der Modul $\mathfrak{n}$ ist theilbar durch den Modul $\mathfrak{o}$, was in Zeichen durch $\mathfrak{n} > \mathfrak{o}$ oder $(\mathfrak{n}, \mathfrak{o}) = 1$ ausgedrückt wird (D. § 171. S. 510); zugleich ist

$$\Delta(\mathfrak{n}) = D(\mathfrak{o}, \mathfrak{n})^2,$$

wo $(\mathfrak{o}, \mathfrak{n})$ die Anzahl der nach dem Modul $\mathfrak{n}$ incongruenten Zahlen in $\mathfrak{o}$ bedeutet (D. § 175. S. 539). Zufolge der Definition der Discriminante eines Moduls (D. § 175. S. 536) ist nun $\Delta(\mathfrak{n})$ das Quadrat der Determinante

$$\begin{vmatrix} 1, \alpha, & \beta \\ 1, \alpha', & \beta' \\ 1, \alpha'', & \beta'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1, \alpha, & \beta \\ 1, \alpha\varrho, & \beta\varrho^2 \\ 1, \alpha\varrho^2, & \beta\varrho \end{vmatrix} = 3\alpha\beta(\varrho^2 - \varrho),$$

und da $\alpha\beta = ab$, und $(\varrho^2 - \varrho)^2 = -3$ ist, so ergiebt sich

$$\Delta(\mathfrak{n}) = -3(3ab)^2;$$

aus der Vergleichung mit der obigen Form von $\Delta(\mathfrak{n})$ folgt, dass die Anzahl $(\mathfrak{o}, \mathfrak{n})$ ein Divisor von $3ab$, also

$$3ab = k(\mathfrak{o}, \mathfrak{n}), \quad D = -3k^2$$

ist, wo k eine natürliche Zahl bedeutet. Die Bestimmung dieser für alles Folgende sehr wichtigen Zahl k wird erleichtert, wenn wir vorher alle in $3ab$ aufgehenden Primideale des Körpers K aufsuchen, unter welchen sich jedenfalls auch alle in der Grundzahl D aufgehenden Primideale befinden; mit dieser ohnehin unerlässlichen Aufgabe wollen wir uns daher jetzt beschäftigen.

Betrachten wir zunächst ein in a aufgehendes Primideal $\mathfrak{p}$, so muss die durch $\mathfrak{p}$ theilbare natürliche Primzahl p, welche zugleich die kleinste in $\mathfrak{p}$ enthaltene natürliche Zahl ist (D. § 179. S. 563), ebenfalls in a aufgehen, und da ab nicht durch p^2 theilbar ist, so wird

$$\alpha^3 = ab^2 = pq,$$

wo q nicht durch p, also auch nicht durch $\mathfrak{p}$ theilbar ist; da nun $\mathfrak{p}$ in p, pq, α^3, also auch in α aufgeht, so muss $\mathfrak{p}^3$ in pq, also auch in p aufgehen; nach einem allgemeinen, aus der Betrachtung der Normen folgenden Satze kann aber die Anzahl der (gleichen oder verschiedenen) Primideale, deren Product $= \mathfrak{o}p$ ist, nicht grösser als der Grad des Körpers, in unserem Falle also nicht grösser als 3 sein; mithin ist

$$\mathfrak{o}p = \mathfrak{p}^3, \qquad N(\mathfrak{p}) = (\mathfrak{o}, \mathfrak{p}) = p,$$

d. h. $\mathfrak{o}p$ ist die dritte Potenz eines Primideals $\mathfrak{p}$ vom ersten Grade (D. § 180. S. 565). Ganz dasselbe gilt offenbar für alle in b aufgehenden natürlichen Primzahlen p und Primideale $\mathfrak{p}$.

Ein anderer Weg, um zu dem vorstehenden Resultate zu gelangen, stützt sich auf die Multiplication und Reduction der endlichen Moduln (D. § 170. S. 502 und § 172. S. 519); wir wollen ihn kurz andeuten, seine nähere Ausführung aber, weil sie keine Schwierigkeit darbietet, dem Leser überlassen. Jeder natürliche Divisor m von ab hat die Form $m = a_1 b_1$, wo a_1 Divisor von a, b_1 Divisor von b ist; betrachtet man nun den Modul

$$\mathfrak{m} = [m, \alpha, \beta],$$

so findet man leicht

$$\mathfrak{m}^2 = [m, a_1\alpha, b_1\beta], \quad \mathfrak{m}^3 = m\mathfrak{n};$$

da nun $\mathfrak{o}\mathfrak{n} = \mathfrak{o}$ ist, weil $\mathfrak{n}$ die Zahl 1 enthält, so ergiebt sich

$$\mathfrak{o}m = (\mathfrak{o}\mathfrak{m})^3,$$

wo $\mathfrak{o}\mathfrak{m}$ offenbar ein Ideal ist. Als specieller Fall entspringt hieraus für das oben mit $\mathfrak{p}$ bezeichnete Primideal die Darstellung

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{o}[p, \alpha, \beta].$$

Unsere Aufgabe, alle in $3ab$ aufgehenden Primideale zu finden, ist durch das Vorstehende offenbar erledigt, wenn ab durch 3 theilbar ist; im entgegengesetzten Falle, wo

$$a^2 \equiv b^2 \equiv 1 \pmod 3,$$

kommt es aber noch darauf an, die Zerlegung von $\mathfrak{o}3$ in Primideale zu finden, und hierbei werden wir auf eine wichtige Eintheilung aller reinen kubischen Körper K in zwei verschiedene Arten geführt werden. Hierzu betrachten wir die irrationale ganze Zahl

$$\mu = \alpha - a,$$

welche zufolge $\alpha^3 = ab^2$ der irreducibelen Gleichung

$$\mu^3 + 3a\mu^2 + 3a^2\mu + a(a^2 - b^2) = 0$$

genügt. Da der Coefficient $3a^2$ von μ im dritten Gliede nicht durch 9 theilbar ist, so kann μ ***nicht durch*** 3 ***theilbar*** sein (D. § 173. S. 531), aber das erste Glied μ^3 ist durch 3 theilbar, weil dies von allen folgenden Gliedern gilt. Aus der Existenz einer durch 3 nicht theilbaren Zahl μ, deren dritte Potenz durch 3 theilbar ist, folgt bekanntlich, dass $\mathfrak{o}3$ nicht ein Product von lauter verschiedenen Primidealen, sondern durch das Quadrat eines Primideals $\mathfrak{p}$ theilbar ist; setzt man demgemäss

$$\mathfrak{o}3 = \mathfrak{p}^2\mathfrak{p}_1,$$

so folgt aus der Betrachtung der Normen leicht, dass $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}_1$ Primideale ersten Grades sind; denn wenn man $N(\mathfrak{p}) = 3^m$, $N(\mathfrak{p}_1) = 3^n$ setzt, wo $m \geqq 1$, $n \geqq 0$, so folgt $N(\mathfrak{o}3) = 3^3 = 3^{2m+n}$, also $3 = 2m+n$, mithin $m = n = 1$; es ist daher

$$N(\mathfrak{p}) = N(\mathfrak{p}_1) = 3,$$

und folglich ist auch $\mathfrak{p}_1$ ein Primideal. Aber nun entsteht die Frage, ob $\mathfrak{p}_1$ identisch mit $\mathfrak{p}$ ist oder nicht; hierauf antwortet der folgende

Satz: ***Die in der Zerlegung*** $\mathfrak{o}3 = \mathfrak{p}^2\mathfrak{p}_1$ ***auftretenden Primideale ersten Grades*** $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}_1$ ***sind gleich oder verschieden, je nachdem*** $a^2 - b^2$ ***untheilbar oder theilbar durch*** 9 ***ist.***

Zum Beweise benutzen wir die obige kubische Gleichung, welche zufolge $\mu + a = \alpha$ die Form

$$\mu^3 + 3a\alpha\mu + a(a^2 - b^2) = 0$$

annimmt, und bezeichnen mit r den Exponenten der höchsten in $(a^2 - b^2)$

aufgehenden Potenz von 3, welcher jedenfalls $\geqq 1$ ist, während a und α relative Primzahlen zu 3 sind. Ist nun ***erstens*** $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1$, also $\mathfrak{o}3 = \mathfrak{p}^3$, und $\mathfrak{p}^s$ die höchste in μ aufgehende Potenz von $\mathfrak{p}$, so ist $1 \leqq s \leqq 2$, weil μ durch $\mathfrak{p}$, aber nicht durch 3 theilbar ist, und die Exponenten der höchsten in μ^3, $3a\alpha\mu$, $a(a^2-b^2)$ aufgehenden Potenzen von $\mathfrak{p}$ sind der Reihe nach $3s$, $3+s$, $3r$. Die beiden ersteren sind von einander verschieden, weil $3+s$ nicht durch 3 theilbar ist, und da der kleinere von ihnen zufolge der obigen Gleichung mit dem dritten $3r$ übereinstimmen muss, so ergiebt sich $3r = 3s < 3+s \leqq 5$, also $r = s = 1$, mithin ist (a^2-b^2) ***nicht durch*** 9, und μ ***nicht durch*** $\mathfrak{p}^2$ ***theilbar***. Ist aber ***zweitens*** $\mathfrak{p}$ verschieden von $\mathfrak{p}_1$, also $\mathfrak{o}3 = \mathfrak{p}^2\mathfrak{p}_1$ nicht theilbar durch $\mathfrak{p}_1^2$, so ist $\mathfrak{p}_1^r$ die höchste in (a^2-b^2) aufgehende Potenz von $\mathfrak{p}_1$; da nun μ^3 durch 3, also μ gewiss durch $\mathfrak{p}_1$ theilbar ist, so sind die Zahlen μ^3, $3a\alpha\mu$ mindestens durch $\mathfrak{p}_1^2$ theilbar; zufolge der obigen Gleichung muss daher auch (a^2-b^2) durch $\mathfrak{p}_1^2$ theilbar sein, mithin ist $r \geqq 2$, also (a^2-b^2) ***theilbar durch*** 9. — Die beiden einander ausschliessenden Annahmen über $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}_1$, welche alle Fälle erschöpfen, führen also zu zwei Folgerungen über die Zahl (a^2-b^2), welche ebenfalls einander ausschliessen und alle Fälle erschöpfen; mithin muss umgekehrt $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1$ oder $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{p}_1$ verschieden sein, je nachdem (a^2-b^2) untheilbar oder theilbar durch 9 ist, w. z. b. w.

An den vorstehenden Satz knüpfen wir noch die folgenden Bemerkungen. Obgleich derselbe nur für den Fall ausgesprochen und bewiesen ist, wo ab nicht durch 3 theilbar ist, so umfasst er doch offenbar auch den schon vorher erledigten Fall, wo ab durch 3 theilbar ist, weil dann ebenfalls $\mathfrak{o}3 = \mathfrak{p}^3$, und a^2-b^2 nicht einmal durch 3, geschweige durch 9 theilbar ist. Wir theilen daher *alle* reinen kubischen Körper K nach dem Verhalten der Zahl 3 in zwei ***Arten*** ein und nennen K einen Körper ***erster*** oder ***zweiter*** Art, je nachdem a^2-b^2 untheilbar oder theilbar durch 9 ist, oder — was nach dem Vorstehenden hiermit gleichbedeutend ist — je nachdem die in der Zerlegung $\mathfrak{o}3 = \mathfrak{p}^2\mathfrak{p}_1$ auftretenden Primideale $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}_1$ gleich oder verschieden sind.

Hierauf wollen wir den Fall eines Körpers K von ***zweiter*** Art noch etwas näher betrachten; dann kann man

$$a^2 \equiv b^2 \equiv 1-3c \pmod 9$$

setzen, wo c eine nach dem Modul 3 bestimmte ganze rationale Zahl

bedeutet. Da das Product a^2-b^2 der beiden Factoren $a\pm b$ durch 9 theilbar, ihre Summe $2a$ aber untheilbar durch 3 ist, so können sie nicht beide durch 3 theilbar sein, und folglich muss einer von ihnen durch 9 theilbar sein; mithin ist

$$a \equiv \pm b \pmod 9,$$

und umgekehrt folgt hieraus, dass K ein Körper zweiter Art ist. Unter den 21 Körpern der Tabelle am Schlusse von § 2 sind daher die 5 durch Einklammerung ihrer Nummern (7), (12), (15), (16), (20) kenntlich gemachten Körper von zweiter, die übrigen 16 von erster Art. Wir wollen nun darauf ausgehen, die beiden in 3 aufgehenden Primideale $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}_1$ deutlich zu unterscheiden. Da die dritte Potenz der Zahl $\mu = \alpha - a$ durch 3 theilbar ist, so muss μ durch $\mathfrak{p}\mathfrak{p}_1$, also μ^2 durch $\mathfrak{p}^2\mathfrak{p}_1^2 = 3\mathfrak{p}_1$, mithin auch durch 3 theilbar sein; nun ist aber

$$\begin{aligned}\mu^2 = (\alpha-a)^2 &= \alpha^2 - 2a\alpha + a^2 = b\beta - 2a\alpha + a^2 \\ &= (1 + a\alpha + b\beta) + (a^2 - 1 - 3a\alpha),\end{aligned}$$

und da der zweite eingeklammerte Bestandtheil offenbar durch 3 theilbar ist, so gilt dasselbe auch von dem ersten; setzen wir daher

$$\gamma = \frac{1 + a\alpha + b\beta}{3},$$

so ist γ eine *ganze* Zahl; durch Einführung derselben geht die obige Gleichung, weil $a^2 - 1 \equiv -3c \pmod 9$ ist, in die Congruenz

$$\mu^2 \equiv 3(\gamma - c - a\alpha) \pmod 9$$

über, und da die Zahlen μ^2 und 9 durch $3\mathfrak{p}_1$ theilbar sind, so folgt $\gamma \equiv c + a\alpha \pmod{\mathfrak{p}_1}$; da ferner $\mu = \alpha - a$ durch $\mathfrak{p}_1$ theilbar, also $\alpha \equiv a$, $a\alpha \equiv a^2 \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}_1}$ ist, so ergiebt sich

$$\gamma \equiv c + 1 \pmod{\mathfrak{p}_1}.$$

Um eine ähnliche Congruenz für das andere Primideal $\mathfrak{p}$ zu erhalten, setze man die kubische Gleichung, deren Wurzel μ ist, in die Form

$$\mu(\mu^2 + 3a\alpha) + a(a^2 - b^2) = 0;$$

da $a^2 - b^2$ durch 9, also durch $\mathfrak{p}^4$ theilbar ist, so folgt hieraus die Congruenz

$$\mu(\mu^2 + 3a\alpha) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^4};$$

nun ist μ zwar durch $\mathfrak{p}\mathfrak{p}_1$, aber nicht durch $\mathfrak{p}^2$ theilbar (weil sonst μ durch $\mathfrak{p}^2\mathfrak{p}_1$, also durch 3 theilbar wäre), mithin

$$\mu^2 + 3a\alpha \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^3};$$

vergleicht man dies mit der obigen Congruenz

$$\mu^2+3a\alpha \equiv 3(\gamma-c) \pmod 9,$$

welche, weil 9 durch $\mathfrak{p}^4$ theilbar ist, auch für den Modul $\mathfrak{p}^3$ gilt, so folgt dass $3(\gamma-c)$ durch $\mathfrak{p}^3$ theilbar ist, und da 3 zwar durch $\mathfrak{p}^2$, aber nicht durch $\mathfrak{p}^3$ theilbar ist, so ergiebt sich die gesuchte Congruenz

$$\gamma \equiv c \pmod{\mathfrak{p}}.$$

Besonders hervorzuheben ist aber noch das obige Resultat, dass es in jedem Körper zweiter Art eine ganze Zahl γ giebt, welche ***nicht*** in dem Modul $\mathfrak{n}$ enthalten ist; hieraus folgt, dass die Hauptordnung $\mathfrak{o}$ ein ***echter*** Theiler von $\mathfrak{n}$, also $(\mathfrak{o}, \mathfrak{n}) > 1$ ist.

§ 4.

Die Grundzahl *D*.

Mit Hülfe der eben geführten Untersuchung über die in $3ab$ aufgehenden Primideale gelingt es nun ohne Schwierigkeit, die Hauptordnung $\mathfrak{o}$ jedes reinen kubischen Körpers K und hiermit seine Grundzahl D, sowie die in den Gleichungen

$$3ab = k(\mathfrak{o}, \mathfrak{n}),\ D = -3k^2$$

auftretenden natürlichen Zahlen k und $(\mathfrak{o}, \mathfrak{n})$ zu bestimmen. Nach einem allgemeinen Satze der Modultheorie (D. § 171. I. S. 511) ist $\mathfrak{o}(\mathfrak{o}, \mathfrak{n}) > \mathfrak{n}$, d. h. jede Zahl des Moduls $\mathfrak{o}$ wird durch Multiplication mit $(\mathfrak{o}, \mathfrak{n})$ in eine Zahl des Moduls $\mathfrak{n}$ verwandelt. Bedeutet daher ω jede beliebige ***ganze*** Zahl des Körpers K, d. h. jede in $\mathfrak{o}$ enthaltene Zahl, so wird $(\mathfrak{o}, \mathfrak{n})\omega$, also auch $k(\mathfrak{o}, \mathfrak{n})\omega = 3ab\omega$ in dem Modul $\mathfrak{n}$ enthalten sein, und folglich ist

$$3ab\omega = z + x\alpha + y\beta,$$

wo z, x, y ***ganze rationale*** Zahlen bedeuten; um daher alle Zahlen ω zu finden, haben wir alle Systeme z, x, y zu suchen, für welche

$$z + x\alpha + y\beta \equiv 0 \pmod{3ab}$$

wird. Bedeutet nun zunächst p eine in a aufgehende natürliche Primzahl, so ist, wie in § 3 gezeigt ist, $\mathfrak{o}p = \mathfrak{p}^3$, und da $\alpha^3 = ab^2$, $\beta^3 = a^2b$ ist, so leuchtet ein, dass $\mathfrak{p}$ die höchste in α, und $\mathfrak{p}^2$ die höchste in β aufgehende Potenz des Primideals $\mathfrak{p}$ ist. Aus der Congruenz

$$z + x\alpha + y\beta \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^3}$$

folgt daher zunächst $z \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$, mithin muss z als rationale Zahl auch

durch p, also durch $\mathfrak{p}^3$ theilbar sein (D. § 179. S. 563), und hierdurch kommt die vorstehende Congruenz auf

$$x\alpha+y\beta \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^3}$$

zurück. Aus dieser Congruenz folgt wieder $x\alpha \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^2}$, und da α nicht durch $\mathfrak{p}^2$ theilbar ist, so muss die rationale Zahl x durch $\mathfrak{p}$, also auch durch p theilbar sein. Hierdurch reducirt sich unsere Congruenz auf $y\beta \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^3}$, und da β nicht durch $\mathfrak{p}^3$ theilbar ist, so muss auch die rationale Zahl y durch $\mathfrak{p}$, also auch durch p theilbar sein. Mithin sind alle drei Zahlen z, x, y durch p theilbar.

Offenbar gilt ganz dasselbe für jede in b, also für jede in ab aufgehende natürliche Primzahl p, und da ab ein Product von lauter verschiedenen Primzahlen p ist, so müssen die ganzen rationalen Zahlen z, x, y alle durch ab theilbar, also von der Form

$$z = abw, \qquad x = abu, \qquad y = abv$$

sein, wo w, u, v wieder ganze rationale Zahlen bedeuten; zugleich wird

$$3\omega = w+u\alpha+v\beta,$$

mithin ist $\mathfrak{o}3 > \mathfrak{n}$, d. h. jede ganze Zahl ω wird schon durch Multiplication mit 3 in eine Zahl des Moduls $\mathfrak{n}$ verwandelt.

Ist nun ab theilbar durch 3, gehört also die Zahl 3 zu den eben betrachteten Primzahlen p, so müssen auch die Zahlen w, u, v durch 3 theilbar sein, mithin ist jede Zahl ω auch in $\mathfrak{n}$ enthalten, d. h. es ist $\mathfrak{o} = \mathfrak{n}$, $(\mathfrak{o}, \mathfrak{n}) = 1$, $k = 3ab$. Betrachten wir ferner den anderen Fall, in welchem K ebenfalls ein Körper *erster* Art, also $a^2 \equiv b^2 \equiv 1 \pmod 3$, aber a^2-b^2 nicht durch 9 theilbar ist, so ist (nach § 3) auch jetzt $\mathfrak{o}3 = \mathfrak{p}^3$, und die Zahl $\mu = \alpha-a$ ist durch $\mathfrak{p}$, aber nicht durch $\mathfrak{p}^2$ theilbar. Multiplicirt man nun mit b und bedenkt, dass $b\beta = \alpha^2 = (\mu+a)^2$ ist, so wird

$$\begin{aligned} 3b\omega &= bw+bu(\mu+a)+v(\mu+a)^2 \\ &= x_0+x_1\mu+x_2\mu^2, \end{aligned}$$

wo die Zahlen

$$x_0 = bw+abu+a^2v, \qquad x_1 = bu+2av, \qquad x_2 = v$$

ebenfalls ganze rationale Zahlen sind und der Congruenz

$$x_0+x_1\mu+x_2\mu^2 \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^3}$$

genügen; da aber $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}^2$ die höchsten resp. in μ und μ^2 aufgehenden

Potenzen von $\mathfrak{p}$ sind, so ergiebt sich ebenso wie oben, dass die Zahlen x_0, x_1, x_2 der Reihe nach durch $\mathfrak{p}$, also auch durch 3 theilbar sind, und hieraus folgt offenbar, dass auch die Zahlen v, u, w der Reihe nach durch 3 theilbar sind; mithin ist auch in diesem Falle jede Zahl ω in dem Modul $\mathfrak{n}$ enthalten, und es gilt folglich der

Satz. *Ist K ein Körper erster Art, so ist*

$$\mathfrak{o} = \mathfrak{n} = [1, \alpha, \beta],$$
$$k = 3ab, \qquad D = -3k^2.$$

Zugleich ergiebt sich für diesen Fall, wie der Leser aus § 3 leicht ableiten wird, die folgende Darstellung aller in der Grundzahl D aufgehenden Primideale $\mathfrak{p}$. Geht $\mathfrak{p}$ in ab auf, so ist

$$\mathfrak{p} = [p, \alpha, \beta],$$

wo p wieder die durch $\mathfrak{p}$ theilbare natürliche Primzahl bedeutet; geht aber $\mathfrak{p}$ nicht in ab auf, ist also $p = 3$, und ab nicht theilbar durch 3, so ist

$$\mathfrak{p} = [3, \alpha - a, \beta - b].$$

Hierauf wenden wir uns zu den Körpern K von *zweiter* Art, also zu den Körpern K, welche durch die Congruenz $a \equiv \pm b \pmod 9$ charakterisirt sind, woraus zugleich folgt, dass ab nicht durch 3 theilbar ist. Wir haben schon am Schlusse von § 3 hervorgehoben, dass in diesem Falle die Hauptordnung $\mathfrak{o}$ ein echter Theiler des Moduls $\mathfrak{n}$, also $(\mathfrak{o}, \mathfrak{n}) > 1$ ist; da ferner in dem gegenwärtigen § 4 bewiesen ist, dass der Modul $\mathfrak{n}$ immer ein Theiler des Hauptideals $\mathfrak{o}3$ ist, so ist nach zwei allgemeinen Sätzen der Modul- und Idealtheorie (D. § 171. S. 510 und § 180. S. 564)

$$(\mathfrak{o}, \mathfrak{n})(\mathfrak{n}, \mathfrak{o}3) = (\mathfrak{o}, \mathfrak{o}3) = N(\mathfrak{o}3) = N(3) = 3^3,$$

also ist $(\mathfrak{o}, \mathfrak{n})$ eine der Potenzen $3, 3^2, 3^3$; zufolge § 3 ist aber auch $3ab = k(\mathfrak{o}, \mathfrak{n})$, und da ab nicht durch 3 theilbar ist, so ergiebt sich $(\mathfrak{o}, \mathfrak{n}) = 3$, $k = ab$. Es ist nun auch leicht, die Hauptordnung $\mathfrak{o}$ als endlichen Modul darzustellen. Zu diesem Zweck erinnern wir an das in § 3 gewonnene Resultat, dass die in $\mathfrak{n}$ nicht enthaltene Zahl

$$\gamma = \frac{1 + a\alpha + b\beta}{3}$$

eine ganze Zahl, also in $\mathfrak{o}$ enthalten ist; setzen wir daher

$$\mathfrak{o}_1 = \mathfrak{n} + [\gamma] = [1, \alpha, \beta, \gamma],$$

so ist der Modul $\mathfrak{o}_1$ ein Vielfaches von $\mathfrak{o}$ und zugleich ein Theiler von $\mathfrak{n}$

(nämlich der grösste gemeinsame Theiler von $\mathfrak{n}$ und $[\gamma]$), und hieraus folgt nach dem schon vorher benutzten Modulsatze

$$(\mathfrak{o}, \mathfrak{o}_1)(\mathfrak{o}_1, \mathfrak{n}) = (\mathfrak{o}, \mathfrak{n}) = 3;$$

da endlich die in $\mathfrak{o}_1$ enthaltene Zahl γ nicht in $\mathfrak{n}$ enthalten, also $\mathfrak{o}_1$ ein *echter* Theiler von $\mathfrak{n}$, mithin $(\mathfrak{o}_1, \mathfrak{n}) > 1$ ist, so folgt*), dass $(\mathfrak{o}_1, \mathfrak{n}) = 3$, $(\mathfrak{o}, \mathfrak{o}_1) = 1$, also $\mathfrak{o} = \mathfrak{o}_1$ sein muss, womit die gesuchte Darstellung von $\mathfrak{o}$ gefunden ist. Bedenkt man noch, dass $1 = 3\gamma - a\alpha - b\beta$ ist, so leuchtet ein, dass $\mathfrak{o}$ auch als dreigliedriger Modul $[\gamma, \alpha, \beta]$ darstellbar ist. Das Resultat unserer Untersuchung besteht daher in dem folgenden

Satz. ***Ist K ein Körper zweiter Art, so ist***

$$\mathfrak{o} = \mathfrak{n} + [\gamma] = [1, \alpha, \beta, \gamma] = [\gamma, \alpha, \beta],$$

$$k = ab, \qquad D = -3k^2.$$

Auch für diesen Fall lässt sich die Darstellung der in D aufgehenden Primideale $\mathfrak{p}$ in Form von endlichen Moduln leicht aus § 3 ableiten; da sie aber für den weiteren Verlauf unserer Untersuchung nicht erforderlich ist, so begnügen wir uns, die Resultate kurz anzugeben. Geht die durch $\mathfrak{p}$ theilbare natürliche Primzahl p in ab auf, so ist

$$\mathfrak{p} = [p\gamma, \alpha, \beta] = \mathfrak{o}\,[p, \alpha, \beta];$$

ist aber $p = 3$, so findet man für die in der Zerlegung $\mathfrak{o}3 = \mathfrak{p}^2\mathfrak{p}_1$ auftretenden Primideale $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}_1$ und deren Product die Darstellungen

$$\mathfrak{p}\mathfrak{p}_1 = [3, \alpha - a, \beta - b],$$

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}\mathfrak{p}_1 + [\gamma - c] = [3, \gamma - c, \alpha - a, \beta - b],$$

$$\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}\mathfrak{p}_1 + [\gamma - c - 1] = [3, \gamma - c - 1, \alpha - a, \beta - b],$$

und das Product $\mathfrak{p}\mathfrak{p}_1$ ist zugleich der ***Führer der Ordnung*** $\mathfrak{n}$, d. h. der Quotient $\mathfrak{n} : \mathfrak{o}$ oder auch der grösste gemeinsame Theiler aller in der Ordnung $\mathfrak{n}$ enthaltenen Ideale (D. § 180. S. 572). —

Nachdem in allen Fällen gezeigt ist, wie die Grundzahl $D = -3k^2$ von den beiden Invarianten a, b abhängt, bemerken wir zum Schluss, dass — im Gegensatz zu der Theorie der quadratischen Körper — der reine kubische Körper K oder vielmehr das System der drei conjugirten Körper K, K', K'' offenbar durch die gemeinsame Grundzahl D im allgemeinen

*) Diese Folgerung $(\mathfrak{o}_1, \mathfrak{n}) = 3$ bestätigt sich leicht durch die Bemerkung, dass die drei Zahlen $0, \gamma, 2\gamma$ offenbar ein Restsystem von $\mathfrak{o}_1$ nach $\mathfrak{n}$ bilden (D. § 171. S. 509).

noch nicht vollständig bestimmt ist; so z. B. tritt in den beiden Zeilen 4 und 5 der Tabelle (§ 2) derselbe Werth $k = 18$ auf, mithin haben die beiden gänzlich verschiedenen Körpersysteme $[K, K', K''$, von denen das eine durch $\sqrt[3]{6}$, das andere durch $\sqrt[3]{12}$ erzeugt wird, dieselbe Grundzahl $D = -2^2 \cdot 3^5$, und Aehnliches wiederholt sich in den Zeilen 13, 14 und in den Zeilen 17, 18 der Tabelle. Dass dieselbe Erscheinung auch bei Körpern zweiter Art auftritt, zeigt die Vergleichung des Invariantenpaars $a = 34 = 2 \cdot 17$, $b = 7$ mit dem Invariantenpaar $a = 119 = 7 \cdot 17$, $b = 2$, denen derselbe Werth $k = ab = 2 \cdot 7 \cdot 17$, also dieselbe Grundzahl $D = -3 \cdot 2^2 \cdot 7^2 \cdot 17^2$ entspricht, weil in beiden Fällen $a \equiv b \pmod 9$ ist.

§ 5.

Die in der Grundzahl nicht aufgehenden Primideale.

Wir wenden uns jetzt zu der Aufgabe, auch alle diejenigen natürlichen Primzahlen p, welche *nicht* in der Grundzahl D aufgehen, in ihre idealen Primfactoren $\mathfrak{p}$ zu zerlegen. Um die Körper von erster und zweiter Art gemeinsam zu behandeln, erinnern wir daran, dass (nach § 4) jede ganze Zahl ω in K durch Multiplication mit 3 jedenfalls in eine Zahl des Moduls $\mathfrak{n} = [1, \alpha, \beta]$ verwandelt wird; da $p \equiv \pm 1 \pmod 3$, so ist also auch das Product $(1 \mp p)\omega$, welches $\equiv \omega \pmod p$ ist, in $\mathfrak{n}$ enthalten, und man kann daher immer

$$\omega \equiv z + x\alpha + y\beta \pmod p$$

setzen, wo z, x, y ***ganze*** rationale Zahlen bedeuten. Durchläuft jede von ihnen ein bestimmtes System von p incongruenten Zahlen (mod. p), so nimmt der Ausdruck rechter Hand p^3 verschiedene Werthe ν an, und jede in $\mathfrak{n}$ enthaltene Zahl ist wenigstens einer dieser Zahlen ν congruent (mod. p); zufolge der vorstehenden Congruenz ist aber auch jede ganze, d. h. jede in $\mathfrak{o}$ enthaltene Zahl ω mit einer Zahl ν congruent, und da die Anzahl $(\mathfrak{o}, \mathfrak{o}p)$ aller nach p incongruenten Zahlen ω ebenfalls $= N(\mathfrak{o}p) = N(p) = p^3$ ist, so ergiebt sich, dass die genannten Zahlen ν sämmtlich incongruent (mod. p) sind und folglich ein Restsystem von $\mathfrak{o}$ nach $\mathfrak{o}p$ bilden (D. § 180. S. 564); es kann daher auch ***nur dann*** $\omega \equiv 0 \pmod p$ werden, wenn $z \equiv x \equiv y \equiv 0 \pmod p$ ist.*)

*) In der Zeichensprache der Modul- und Idealtheorie (D. § 169. S. 496, 498 und § 171. S. 510 und § 180. S. 564) drücken sich diese Beziehungen zwischen $\mathfrak{o}$, $\mathfrak{n}$ und p auf folgende Weise aus: $\mathfrak{n} + \mathfrak{o}p = \mathfrak{o}$, $\mathfrak{n} - \mathfrak{o}p = \mathfrak{n}p$, also $(\mathfrak{n}, \mathfrak{o}p) = (\mathfrak{n}, \mathfrak{n}p) = (\mathfrak{o}, \mathfrak{o}p) = N(p) = p^3$.

(nämlich der grösste gemeinsame Theiler von $\mathfrak{n}$ und $[\gamma]$), und hieraus folgt nach dem schon vorher benutzten Modulsatze

$$(\mathfrak{o}, \mathfrak{o}_1)(\mathfrak{o}_1, \mathfrak{n}) = (\mathfrak{o}, \mathfrak{n}) = 3;$$

da endlich die in $\mathfrak{o}_1$ enthaltene Zahl γ nicht in $\mathfrak{n}$ enthalten, also $\mathfrak{o}_1$ ein *echter* Theiler von $\mathfrak{n}$, mithin $(\mathfrak{o}_1, \mathfrak{n}) > 1$ ist, so folgt*), dass $(\mathfrak{o}_1, \mathfrak{n}) = 3$, $(\mathfrak{o}, \mathfrak{o}_1) = 1$, also $\mathfrak{o} = \mathfrak{o}_1$ sein muss, womit die gesuchte Darstellung von $\mathfrak{o}$ gefunden ist. Bedenkt man noch, dass $1 = 3\gamma - a\alpha - b\beta$ ist, so leuchtet ein, dass $\mathfrak{o}$ auch als dreigliedriger Modul $[\gamma, \alpha, \beta]$ darstellbar ist. Das Resultat unserer Untersuchung besteht daher in dem folgenden

Satz. *Ist K ein Körper zweiter Art, so ist*

$$\mathfrak{o} = \mathfrak{n} + [\gamma] = [1, \alpha, \beta, \gamma] = [\gamma, \alpha, \beta],$$

$$k = ab, \qquad D = -3k^2.$$

Auch für diesen Fall lässt sich die Darstellung der in D aufgehenden Primideale $\mathfrak{p}$ in Form von endlichen Moduln leicht aus § 3 ableiten; da sie aber für den weiteren Verlauf unserer Untersuchung nicht erforderlich ist, so begnügen wir uns, die Resultate kurz anzugeben. Geht die durch $\mathfrak{p}$ theilbare natürliche Primzahl p in ab auf, so ist

$$\mathfrak{p} = [p\gamma, \alpha, \beta] = \mathfrak{o}\,[p, \alpha, \beta];$$

ist aber $p = 3$, so findet man für die in der Zerlegung $\mathfrak{o}3 = \mathfrak{p}^2\mathfrak{p}_1$ auftretenden Primideale $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}_1$ und deren Product die Darstellungen

$$\mathfrak{p}\mathfrak{p}_1 = [3, \alpha - a, \beta - b],$$
$$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}\mathfrak{p}_1 + [\gamma - c] = [3, \gamma - c, \alpha - a, \beta - b],$$
$$\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}\mathfrak{p}_1 + [\gamma - c - 1] = [3, \gamma - c - 1, \alpha - a, \beta - b],$$

und das Product $\mathfrak{p}\mathfrak{p}_1$ ist zugleich der *Führer der Ordnung* $\mathfrak{n}$, d. h. der Quotient $\mathfrak{n} : \mathfrak{o}$ oder auch der grösste gemeinsame Theiler aller in der Ordnung $\mathfrak{n}$ enthaltenen Ideale (D. § 180. S. 572). —

Nachdem in allen Fällen gezeigt ist, wie die Grundzahl $D = -3k^2$ von den beiden Invarianten a, b abhängt, bemerken wir zum Schluss, dass — im Gegensatz zu der Theorie der quadratischen Körper — der reine kubische Körper K oder vielmehr das System der drei conjugirten Körper K, K', K'' offenbar durch die gemeinsame Grundzahl D im allgemeinen

*) Diese Folgerung $(\mathfrak{o}_1, \mathfrak{n}) = 3$ bestätigt sich leicht durch die Bemerkung, dass die drei Zahlen $0, \gamma, 2\gamma$ offenbar ein Restsystem von $\mathfrak{o}_1$ nach $\mathfrak{n}$ bilden (D. § 171. S. 509).

noch nicht vollständig bestimmt ist; so z. B. tritt in den beiden Zeilen 4 und 5 der Tabelle (§ 2) derselbe Werth $k = 18$ auf, mithin haben die beiden gänzlich verschiedenen Körpersysteme K, K', K'', von denen das eine durch $\sqrt[3]{6}$, das andere durch $\sqrt[3]{12}$ erzeugt wird, dieselbe Grundzahl $D = -2^2 \cdot 3^5$, und Aehnliches wiederholt sich in den Zeilen 13, 14 und in den Zeilen 17, 18 der Tabelle. Dass dieselbe Erscheinung auch bei Körpern zweiter Art auftritt, zeigt die Vergleichung des Invariantenpaars $a = 34 = 2 \cdot 17$, $b = 7$ mit dem Invariantenpaar $a = 119 = 7 \cdot 17$, $b = 2$, denen derselbe Werth $k = ab = 2 \cdot 7 \cdot 17$, also dieselbe Grundzahl $D = -3 \cdot 2^2 \cdot 7^2 \cdot 17^2$ entspricht, weil in beiden Fällen $a \equiv b \pmod 9$ ist.

§ 5.

Die in der Grundzahl nicht aufgehenden Primideale.

Wir wenden uns jetzt zu der Aufgabe, auch alle diejenigen natürlichen Primzahlen p, welche *nicht* in der Grundzahl D aufgehen, in ihre idealen Primfactoren $\mathfrak{p}$ zu zerlegen. Um die Körper von erster und zweiter Art gemeinsam zu behandeln, erinnern wir daran, dass (nach § 4) jede ganze Zahl ω in K durch Multiplication mit 3 jedenfalls in eine Zahl des Moduls $\mathfrak{n} = [1, \alpha, \beta]$ verwandelt wird; da $p \equiv \pm 1 \pmod 3$, so ist also auch das Product $(1 \mp p)\omega$, welches $\equiv \omega \pmod p$ ist, in $\mathfrak{n}$ enthalten, und man kann daher immer

$$\omega \equiv z + x\alpha + y\beta \pmod p$$

setzen, wo z, x, y ***ganze*** rationale Zahlen bedeuten. Durchläuft jede von ihnen ein bestimmtes System von p incongruenten Zahlen (mod. p), so nimmt der Ausdruck rechter Hand p^3 verschiedene Werthe ν an, und jede in $\mathfrak{n}$ enthaltene Zahl ist wenigstens einer dieser Zahlen ν congruent (mod. p); zufolge der vorstehenden Congruenz ist aber auch jede ganze, d. h. jede in $\mathfrak{o}$ enthaltene Zahl ω mit einer Zahl ν congruent, und da die Anzahl $(\mathfrak{o}, \mathfrak{o}p)$ aller nach p incongruenten Zahlen ω ebenfalls $= N(\mathfrak{o}p) = N(p) = p^3$ ist, so ergiebt sich, dass die genannten Zahlen ν sämmtlich incongruent (mod. p) sind und folglich ein Restsystem von $\mathfrak{o}$ nach $\mathfrak{o}p$ bilden (D. § 180. S. 564); es kann daher auch ***nur dann*** $\omega \equiv 0 \pmod p$ werden, wenn $z \equiv x \equiv y \equiv 0 \pmod p$ ist.*)

*) In der Zeichensprache der Modul- und Idealtheorie (D. § 169. S. 496, 498 und § 171. S. 510 und § 180. S. 564) drücken sich diese Beziehungen zwischen $\mathfrak{o}$, $\mathfrak{n}$ und p auf folgende Weise aus: $\mathfrak{n} + \mathfrak{o}p = \mathfrak{o}$, $\mathfrak{n} - \mathfrak{o}p = \mathfrak{n}p$, also $(\mathfrak{n}, \mathfrak{o}p) = (\mathfrak{n}, \mathfrak{n}p) = (\mathfrak{o}, \mathfrak{o}p) = N(p) = p^3$.

Benutzt man nun den für alle ganzen algebraischen Zahlen $\xi, \eta, \zeta \ldots$ geltenden Satz (D. § 185. S. 617)

$$(\xi+\eta+\zeta+\cdots)^p \equiv \xi^p+\eta^p+\zeta^p+\cdots \pmod{p}$$

und bedenkt, dass nach ***Fermat*** für jede ganze ***rationale*** Zahl z immer $z^p \equiv z \pmod{p}$ ist, so ergiebt sich

$$\omega^p \equiv z+x\alpha^p+y\beta^p \pmod{p}$$

und durch Wiederholung dieses Verfahrens allgemein

$$\omega^{p^n} \equiv z+x\alpha^{p^n}+y\beta^{p^n} \pmod{p},$$

wo n jede natürliche Zahl bedeutet. Das Verhalten der Primzahl p ist nun ganz verschieden, je nachdem $p \equiv +1$ oder $p \equiv -1 \pmod{3}$ ist; wir trennen daher unsere Untersuchung in zwei Haupttheile und betrachten zuerst den einfacheren Fall

I. $$p = 3m-1 \equiv -1 \pmod{3}.$$

Dann ist $p^2-1 = (p+1)(p-1) = 3m(p-1)$, und da ab nicht durch p theilbar ist, so folgt aus dem Satze von ***Fermat***

$$\alpha^{p^2-1} = (ab^2)^{m(p-1)} \equiv 1 \pmod{p}$$
$$\beta^{p^2-1} = (a^2b)^{m(p-1)} \equiv 1 \pmod{p},$$

also

$$\alpha^{p^2} \equiv \alpha, \ \beta^{p^2} \equiv \beta \pmod{p},$$

und folglich genügt jede ganze Zahl ω des Körpers K der Congruenz

$$\omega^{p^2} \equiv \omega \pmod{p}.$$

Hieraus folgt ***erstens,*** dass p durch kein Primidealquadrat theilbar sein kann; denn wenn in irgend einem endlichen Körper jede ganze Zahl ω einer Congruenz von der Form

$$\omega \equiv \lambda\omega^2+\mu\omega^3+\nu\omega^4+\cdots \pmod{\mathfrak{a}}$$

genügt, wo $\mathfrak{a}$ ein bestimmtes Ideal, und $\lambda, \mu, \nu \ldots$ bestimmte ganze Zahlen dieses Körpers sind, so müsste, wenn $\mathfrak{a}$ durch das Quadrat eines Primideals $\mathfrak{p}$ theilbar wäre, jede durch $\mathfrak{p}$ theilbare Zahl ω auch durch $\mathfrak{p}^2$ theilbar, d. h. es müsste $\mathfrak{p}$ selbst durch $\mathfrak{p}^2$ theilbar sein, was unmöglich ist.

Da ferner die Anzahl der incongruenten Wurzeln ω der obigen Congruenz $= (\mathfrak{o}, \mathfrak{o}p) = p^3$, also grösser als ihr Grad p^2 ist, so folgt ***zweitens*** (D. § 180. S. 570), dass $\mathfrak{o}p$ selbst kein Primideal, also ein Product von zwei

oder drei verschiedenen Primidealen ist. Im letzteren Falle müssten diese drei Primideale, weil das Product ihrer Normen $= N(\mathfrak{o}p) = p^3$ ist (D. § 180. S. 564), alle vom ersten Grade sein, es müsste daher (D. § 180. V. S. 570), wenn ω jede ganze Zahl bedeutet, $\omega^p - \omega$ durch jedes dieser Primideale, also auch durch ihr Product $\mathfrak{o}p$ theilbar sein; nun ist aber z. B. $\alpha^{p-2} = \alpha^{3(m-1)} = (ab^2)^{m-1}$, und $\alpha^2 = b\beta$, also $\alpha^p = g\beta$, wo g eine ganze rationale Zahl bedeutet, mithin ist die in $\mathfrak{n}$ enthaltene Zahl $\alpha - \alpha^p = \alpha - g\beta$ ***nicht*** durch p theilbar, und folglich unsere Annahme unzulässig. Das Resultat unserer Untersuchung besteht also darin, dass $\mathfrak{o}p$ ein Product von zwei verschiedenen Primidealen $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}_1$ ist; offenbar muss das eine vom ersten, das andere vom zweiten Grade sein, und wir können daher

$$\mathfrak{o}p = \mathfrak{p}\mathfrak{p}_1, \qquad N(\mathfrak{p}) = p, \qquad N(\mathfrak{p}_1) = p^2$$

setzen. — Hierauf wenden wir uns zu dem Falle

II. $$p = 3m+1 \equiv +1 \pmod 3.$$

Dann hat bekanntlich (D. § 31. S. 73) die Congruenz $u^3 \equiv 1 \pmod p$ drei incongruente rationale Wurzeln $u \equiv 1, r, r^2$, wo

$$r^2 + r + 1 \equiv 0 \pmod p$$

ist; bedeutet ferner c irgend eine durch p nicht theilbare ganze rationale Zahl, so ist $c^{p-1} = c^{3m} \equiv 1 \pmod p$, und folglich $c^m \equiv r^e \pmod p$, wo der Exponent e nach dem Modul 3 bestimmt ist; je nachdem e durch 3 theilbar oder untheilbar ist, ist die Zahl c ***kubischer Rest*** oder ***Nichtrest*** von p, d. h. die Congruenz $w^3 \equiv c \pmod p$ hat im ersten Falle drei incongruente Wurzeln w, im letzteren gar keine.

Wendet man dies auf die Zahl $c = ab^2$ an und bedenkt, dass $(ab^2)(a^2b) = (ab)^3$ ist, so kann man gleichzeitig

$$(ab^2)^m \equiv r^e, \quad (a^2b)^m \equiv r^{2e} \pmod p$$

setzen, und hieraus folgt

$$\left.\begin{aligned} \alpha^p \equiv \alpha r^e, \quad \alpha^{p^2} \equiv \alpha r^{2e}, \quad \alpha^{p^3} \equiv \alpha \\ \beta^p \equiv \beta r^{2e}, \quad \beta^{p^2} \equiv \beta r^e, \quad \beta^{p^3} \equiv \beta \end{aligned}\right\} \pmod p,$$

mithin genügt jede ganze Zahl ω der Congruenz

$$\omega^{p^3} \equiv \omega \pmod p.$$

Hieraus folgt wieder ***erstens,*** dass p durch kein Primidealquadrat theilbar ist. Wir wollen ***zweitens*** beweisen, dass p durch kein Primideal

zweiten Grades $\mathfrak{p}$ theilbar sein kann; wäre dies nämlich der Fall, so müsste (D. § 180. V. S. 570) jede ganze Zahl ω ausser der vorstehenden auch den Congruenzen $\omega^{p^2} \equiv \omega \pmod{\mathfrak{p}}$, $\omega^{p^3} \equiv \omega^p \pmod{\mathfrak{p}}$, mithin auch der Congruenz $\omega^p \equiv \omega \pmod{\mathfrak{p}}$ genügen; dann wäre aber die Anzahl $(\mathfrak{o}, \mathfrak{p}) = N(\mathfrak{p}) = p^2$ der incongruenten Wurzeln ω dieser letzten Congruenz grösser als ihr Grad p, was unmöglich ist (D. § 180. S. 570), und folglich ist unsere Annahme, p sei durch ein Primideal zweiten Grades theilbar, unzulässig.

Es bleiben daher nur zwei Fälle übrig: entweder ist $\mathfrak{o}p$ ein Product von drei verschiedenen Primidealen ersten Grades $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$, oder $\mathfrak{o}p$ ist selbst ein Primideal dritten Grades. Im ersteren Falle ist $\omega^p - \omega$ für jede ganze Zahl ω durch jedes der drei Primideale $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$, also auch durch ihr Product $\mathfrak{o}p$ theilbar; wendet man dies auf die Zahl $\omega = \alpha$ an, so folgt, dass $\alpha(1-r^e)$ durch p theilbar ist, und da α relative Primzahl zu p ist, so ergiebt sich $r^e \equiv 1 \pmod{p}$, also $e \equiv 0 \pmod{3}$, d. h. die Zahl ab^2 (und ebenso a^2b) ist kubischer Rest von p. Umgekehrt, wenn dies der Fall, also e durch 3 theilbar ist, so folgt $\alpha^p \equiv \alpha$, $\beta^p \equiv \beta \pmod{p}$, also auch allgemein $\omega^p \equiv \omega \pmod{p}$, und es kann daher $\mathfrak{o}p$ kein Primideal sein, weil sonst die Anzahl $(\mathfrak{o}, \mathfrak{o}p) = p^3$ der incongruenten Wurzeln ω dieser Congruenz grösser als ihr Grad p wäre. Das Resultat unserer Untersuchung besteht also hierin: Es ist

$$\mathfrak{o}p = \mathfrak{p}\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2, \quad N(\mathfrak{p}) = N(\mathfrak{p}_1) = N(\mathfrak{p}_2) = p,$$

wo $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$ drei verschiedene Primideale bedeuten, oder es ist $\mathfrak{o}p$ selbst ein Primideal dritten Grades, je nachdem die Zahl ab^2 ***kubischer Rest oder Nichtrest von*** p ist.

§ 6.

Die *Dirichlet*sche Idealfunction.

Das Ziel, welches wir in der gegenwärtigen Abhandlung zu erreichen suchen, besteht in der ***Bestimmung der Anzahl h der Idealklassen im Körper K.*** Die hierzu führende, von ***Dirichlet*** vorgezeichnete Methode stützt sich bekanntlich (D. § 184. S. 609–611) auf die Betrachtung der Function

$$J = \Sigma \frac{1}{N(\mathfrak{a})^s} = \Pi \frac{1}{1 - \frac{1}{N(\mathfrak{p})^s}},$$

wo $\mathfrak{a}$ in der Summe alle Ideale, und $\mathfrak{p}$ in dem Producte alle Primideale des Körpers durchläuft, und zwar kommt Alles darauf an zu untersuchen,

wie sich diese Function J der Variabelen s für unendlich kleine positive Werthe von $s-1$ verhält. Bezieht sich nämlich das Grenzzeichen lim auf diese Annäherung der Variabelen s an die Zahl 1, so wird

$$\lim(s-1)\,J = gh,$$

wo h die Klassenanzahl der Ideale, und g eine wesentlich von der Grundzahl D und von den Einheiten des Körpers abhängende Constante bedeutet, deren allgemeiner Ausdruck

$$g = \frac{2^\nu \pi^{n-\nu} E}{\sqrt{(D)}}$$

jetzt für unseren Fall eines reinen kubischen Körpers K zu specialisiren ist. Der Nenner $\sqrt{(D)}$ ist die positive Quadratwurzel aus dem absoluten Werthe (D) der Grundzahl $D = -3k^2$, also $\sqrt{(D)} = k\sqrt{3}$, wo $\sqrt{3}$ positiv, und $k = 3ab$ oder $= ab$ ist, je nachdem K ein Körper erster oder zweiter Art ist. Das Zeichen π hat die gewöhnliche Bedeutung der *Ludolf*schen Zahl 3,14159 ..., und n ist der Grad des Körpers K, also $n = 3$. Die Zahl ν ist dadurch bestimmt, dass $(2\nu - n)$ die Anzahl der reellen, also $2(n-\nu)$ die Anzahl der imaginären unter den mit K conjugirten Körpern K, K', K'' ist; mithin ist $\nu = 2$. Die Constante E bestimmt sich durch $rE = S'$, wo r die Anzahl 2 aller in dem (reellen) Körper K enthaltenen Einheitswurzeln ± 1, und S' den Regulator eines Fundamentalsystems S von $(\nu-1)$ Einheiten in K bedeutet (D. § 183. S. 597, 602); da $\nu = 2$ ist, so besteht S aus einer einzigen Einheit $\varepsilon > 1$, und der Regulator S' ist $= \log\varepsilon$, mithin $E = \frac{1}{2}\log\varepsilon$ (und alle Einheiten in K haben die Form $\pm\varepsilon^m$, wo m alle ganzen rationalen Zahlen durchläuft). Durch das Eintragen aller dieser Werthe in den obigen Ausdruck erhalten wir

$$g = \frac{2\pi\log\varepsilon}{k\sqrt{3}},$$

mithin

$$\lim(s-1)\,J = h\,\frac{2\pi\log\varepsilon}{k\sqrt{3}}.$$

Für die Bildung der Function J, zu welcher wir jetzt übergehen, legen wir die Productform zu Grunde; durchläuft p alle natürlichen Primzahlen, und bezeichnen wir mit $F(p)$ denjenigen Factor von J, welcher von allen verschiedenen in p aufgehenden Primidealen $\mathfrak{p}$ herrührt, so wird

$$J = \Pi F(p);$$

setzen wir ferner zur Abkürzung

$$P_n = \frac{1}{1 - \frac{1}{p^{ns}}},$$

wo n irgend eine natürliche Zahl bedeutet, so ergeben sich (nach §§ 3, 5) die folgenden Regeln zur Bestimmung des Factors $F(p)$.

1) Geht p in k auf, so ist $\mathfrak{o}p = \mathfrak{p}^3$, wo $\mathfrak{p}$ ein Primideal ersten Grades, also $N(\mathfrak{p}) = p$, mithin $F(p) = P_1$.

2) Geht p nicht in k, aber in D auf, so ist $p = 3$ und K ein Körper zweiter Art; dann ist $\mathfrak{o}p = \mathfrak{o}3 = \mathfrak{p}^2\mathfrak{p}_1$, wo $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}_1$ zwei verschiedene Primideale ersten Grades bedeuten, also $N(\mathfrak{p}) = N(\mathfrak{p}_1) = 3 = p$, mithin $F(p) = P_1^2$.

3) Geht p nicht in D auf, und ist $p \equiv -1 \pmod 3$, so ist $\mathfrak{o}p = \mathfrak{p}\mathfrak{p}_1$, $N(\mathfrak{p}) = p$, $N(\mathfrak{p}_1) = p^2$, mithin $F(p) = P_1 P_2$.

4) Geht p nicht in D auf, ist ferner $p \equiv +1 \pmod 3$, und ab^2 kubischer Rest von p, so ist $\mathfrak{o}p = \mathfrak{p}\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2$, $N(\mathfrak{p}) = N(\mathfrak{p}_1) = N(\mathfrak{p}_2) = p$, mithin $F(p) = P_1^3$.

5) Geht p nicht in D auf, ist ferner $p \equiv +1 \pmod 3$ und ab^2 kubischer Nichtrest von p, so ist $\mathfrak{o}p$ ein Primideal dritten Grades, mithin $F(p) = P_3$.

§ 7.

Der quadratische Körper von der Grundzahl −3.

Aus der Vergleichung der beiden letzten Regeln für die Primzahlen p, welche $\equiv +1 \pmod 3$ sind und nicht in D aufgehen, leuchtet ein, dass zur Bildung unserer Function J die ***Theorie der kubischen Reste*** durchaus erforderlich ist. ***Gauss*** hat sich seit dem Jahre 1805 mit dieser Theorie und derjenigen der biquadratischen Reste beschäftigt*) und hierbei bald die überaus folgenreiche Entdeckung gemacht, dass, um dieselben auf einen gleichen Grad von Vollkommenheit zu erheben wie die Lehre von den quadratischen Resten, das Gebiet der höheren Arithmetik, in welcher bis dahin nur rationale ganze Zahlen betrachtet waren, durch die Einführung von neuen ganzen Zahlen erweitert werden muss, welche aus dritten oder vierten Wurzeln der Einheit gebildet sind, und hiermit war zugleich der Grund für die allgemeine Theorie der ganzen algebraischen Zahlen gelegt. ***Gauss*** hat aber von seinen Untersuchungen nur die auf die biquadratischen Reste bezüglichen theilweise veröffentlicht, und die in seinem Nachlass vor-

*) Vergl. Bd. II seiner Werke, S. 50, 67, 102, 161, 165, 166, 171.

gefundenen Aufzeichnungen über die aus dritten Wurzeln der Einheit gebildeten Zahlen sind wegen ihrer Unvollständigkeit nicht in die Herausgabe seiner Werke aufgenommen*). Den in diesem Zahlengebiete Q (dem quadratischen Körper von der Grundzahl -3) geltenden Reciprocitätssatz für die kubischen Reste hat zuerst *Jacobi***) bekannt gemacht und in seinen Vorlesungen bewiesen; derselbe, aus der Theorie der Kreistheilung gezogene Beweis ist später von *Eisenstein*†), der ihn ohne Zweifel unabhängig von *Jacobi* gefunden hat, zuerst veröffentlicht. Da dieser Gegenstand seitdem von mehreren Autoren††) behandelt und als hinreichend bekannt anzusehen ist, so begnügen wir uns, die wichtigsten, für unsere Untersuchung nothwendigen Thatsachen kurz in Erinnerung zu bringen.

Der durch die imaginäre dritte Einheitswurzel ϱ erzeugte quadratische Körper Q von der Grundzahl -3 besteht aus allen Zahlen ω von der Form $x+y\varrho$, wo x, y rationale Zahlen bedeuten, und jede solche Zahl ω geht durch die nicht identische Permutation des Körpers in die conjugirte Zahl $\omega' = x+y\varrho^2 = x-y-y\varrho$ über. Da von den Zahlen des reinen kubischen Körpers K im Folgenden gar nicht mehr die Rede sein wird, so bezeichnen wir die Norm $\omega\omega' = x^2-xy+y^2$ unbedenklich mit $N(\omega)$, und ebenso setzen wir die aus allen *ganzen* Zahlen ω bestehende Hauptordnung $[1, \varrho] = \mathfrak{o}$. Die sechs Einheiten des Körpers sind die Zahlen ± 1, $\pm\varrho$, $\pm\varrho^2$, die wir gemeinsam immer mit σ bezeichnen. Alle Ideale des Körpers sind Hauptideale, d. h. jede von 0 und den Einheiten σ verschiedene ganze Zahl ist entweder eine Primzahl π des Körpers, oder sie ist zusammengesetzt, und im letzteren Falle kann sie stets und wesentlich nur auf eine einzige Art als Product von lauter Primzahlen π dargestellt werden, wobei die sechs mit einer Zahl ω associirten Zahlen $\sigma\omega$ als nicht wesentlich

---

*) Vergl. unten § 11.

**) Ueber die Kreistheilung und ihre Anwendung auf die Zahlentheorie (Monatsberichte der Berliner Akademie vom Jahre 1837, wieder abgedruckt in *Crelles* Journal, Bd. 30; 1846).

†) Beweis des Reciprocitätssatzes für die kubischen Reste in der Theorie der aus dritten Wurzeln der Einheit zusammengesetzten complexen Zahlen (*Crelles* Journal Bd. 27; 1844). — Nachtrag zum kubischen Reciprocitätssatze für die aus dritten Wurzeln der Einheit zusammengesetzten complexen Zahlen. Kriterien des kubischen Charakters der Zahl 3 und ihrer Theiler (*Crelles* Journal Bd. 28; 1844).

††) Vergl. namentlich *Bachmann*: Die Lehre von der Kreistheilung und ihre Beziehungen zur Zahlentheorie. Leipzig, 1872 (Vorlesungen 14 und 15).

verschieden angesehen werden. Das System aller Primzahlen π ergiebt sich in folgender Weise aus der Betrachtung der durch sie theilbaren natürlichen Primzahlen p. Die Zahl $p = 3 = (1-\varrho)(1-\varrho^2) = -\varrho^2(1-\varrho)^2$ ist wesentlich das Quadrat der Primzahl ersten Grades $\pi = 1-\varrho$; ist $p \equiv +1 \pmod 3$, so ist $p = \pi\pi' = N(\pi) = N(\pi')$ das Product von zwei conjugirten, wesentlich verschiedenen Primzahlen ersten Grades π und π'; ist $p \equiv -1 \pmod 3$, so ist p selbst eine Primzahl zweiten Grades π in Q, also $N(\pi) = p^2$. Mit Ausnahme des ersten dieser drei Fälle ist daher immer $N(\pi) \equiv +1 \pmod 3$.

Ist μ irgend eine von 0 verschiedene Zahl in $\mathfrak{o}$, so ist $N(\mu)$ die Anzahl $(\mathfrak{o}, \mathfrak{o}\mu)$ aller nach μ incongruenten Zahlen in $\mathfrak{o}$; bezeichnen wir ferner mit $\varphi'(\mu)$ die Anzahl derjenigen incongruenten Zahlen ω, welche relative Primzahlen zu μ sind, so ist $\varphi'(\sigma) = 1$ und, wenn μ keine Einheit ist,

$$\varphi'(\mu) = N(\mu)\, \Pi\left(1 - \frac{1}{N(\pi)}\right),$$

wo π alle wesentlich verschiedenen, in μ aufgehenden Primzahlen durchläuft; zugleich ist

$$\omega^{\varphi'(\mu)} \equiv 1 \pmod{\mu}.$$

Ist π eine ***von*** $(1-\varrho)$ ***verschiedene Primzahl,*** also $N(\pi) = 3m+1$, $\varphi'(\pi) = 3m$, so genügt jede durch π nicht theilbare Zahl ω der Congruenz

$$\omega^{3m} - 1 = (\omega^m - 1)(\omega^m - \varrho)(\omega^m - \varrho^2) \equiv 0 \pmod{\pi},$$

und da bekanntlich keine der drei Congruenzen

$$\omega^m \equiv \varrho^e \pmod{\pi},$$

wo $e \equiv 0, 1, 2 \pmod 3$ zu setzen ist, mehr als m incongruente Wurzeln ω haben kann, so muss jede von ihnen genau m solche Wurzeln haben. Diejenigen m Zahlen ω, für welche $e \equiv 0 \pmod 3$ wird, sind die ***kubischen Reste der Primzahl*** π, d. h. für jede dieser Zahlen ω (und nur für diese) giebt es eine oder vielmehr drei incongruente Wurzeln ξ der Congruenz $\xi^3 \equiv \omega \pmod{\pi}$. Die übrigen $2m$ Zahlen ω sind die ***kubischen Nichtreste*** von π, und sie vertheilen sich in gleicher Anzahl m auf die beiden Fälle $e \equiv 1, 2 \pmod 3$. In allen Fällen nennen wir die durch ω vollständig bestimmte Einheitswurzel ϱ^e den ***kubischen Charakter*** oder kurz den ***Charakter*** der Zahl ω in Bezug auf die Primzahl π und setzen nach ***Jacobi***

$$\left(\frac{\omega}{\pi}\right) = \varrho^e,$$

weil hier und in der Folge eine Verwechselung mit dem Symbol von *Legendre* in der Theorie der *quadratischen* Reste nicht zu befürchten ist.*) Unser Symbol wird also vollständig erklärt durch

$$\left(\frac{\omega}{\pi}\right)^3 = 1, \left(\frac{\omega}{\pi}\right) \equiv \omega^m \pmod{\pi},$$

wo m die obige Bedeutung hat. Hieraus folgt zunächst, dass der Werth des Symbols ungeändert bleibt, wenn die Primzahl π durch eine associirte Zahl $\sigma\pi$, oder wenn ω durch eine nach π congruente Zahl ersetzt wird, und da für je zwei durch π nicht theilbare Zahlen ω_1, ω_2 offenbar das Gesetz

$$\left(\frac{\omega_1 \omega_2}{\pi}\right) = \left(\frac{\omega_1}{\pi}\right)\left(\frac{\omega_2}{\pi}\right)$$

gilt, so fällt das Symbol, als Function aller durch π nicht theilbaren Zahlen ω angesehen, unter den allgemeinen Begriff eines *Charakters einer Abelschen Gruppe,* welche letztere hier von den $3m$ Zahlklassen $\omega \pmod{\pi}$ gebildet wird (D. § 184. S. 612); diejenigen m Zahlklassen, welche aus den kubischen Resten von π, also aus den Zahlen ω bestehen, deren Charakter $= 1$ ist, bilden ebenfalls eine Gruppe, d. h. sie reproduciren sich durch Multiplication. Da $\pm 1 = (\pm 1)^3$, so ist stets

$$\left(\frac{\pm 1}{\pi}\right) = 1.$$

Bedenkt man ferner, dass jede Potenz ϱ^e durch die nicht identische Permutation des Körpers in ϱ^{2e}, also die obige Congruenz $\omega^m \equiv \varrho^e \pmod{\pi}$ in die Congruenz $\omega'^m \equiv \varrho^{2e} \pmod{\pi'}$ übergeht, so ergiebt sich aus der Definition des Symboles das Gesetz

$$\left(\frac{\omega'}{\pi'}\right) = \left(\frac{\omega}{\pi}\right)^2.$$

Wenden wir dies auf den Fall an, wo ω eine *rationale* Zahl c, also $c' = c$ ist, so ergiebt sich

$$\left(\frac{c}{\pi'}\right) = \left(\frac{c}{\pi}\right)^2.$$

Ist nun erstens die durch π theilbare natürliche Primzahl $p \equiv -1 \pmod{3}$, so sind π und π' associirt mit $p = p'$, mithin

$$\left(\frac{c}{p}\right) = 1, \text{ wenn } p \equiv -1 \pmod{3};$$

*) Von dieser Ausdrucks- und Bezeichnungsweise weicht die von *Eisenstein* benutzte ein wenig ab.

dasselbe ergiebt sich auch daraus, dass in diesem Falle $3m = (p+1)(p-1)$, also m theilbar durch $p-1$, und folglich $c^m \equiv 1 \pmod{p}$ ist. Wenn aber zweitens $p = 3m+1 \equiv +1 \pmod{3}$ ist, so sind π, π' zwei wesentlich verschiedene Primzahlen ersten Grades, und es ist entweder

$$\left(\frac{c}{\pi}\right) = \left(\frac{c}{\pi'}\right) = 1,$$

oder

$$\left(\frac{c}{\pi}\right) = \varrho, \left(\frac{c}{\pi'}\right) = \varrho^2$$

oder

$$\left(\frac{c}{\pi}\right) = \varrho^2, \left(\frac{c}{\pi'}\right) = \varrho.$$

Im ersten dieser drei Fälle, und nur in diesem, ist c kubischer Rest von π, also $c^m \equiv 1 \pmod{\pi}$, und da hieraus offenbar auch $c^m \equiv 1 \pmod{p}$ folgt, so ist (nach § 5. II) die Zahl c auch kubischer Rest von p im Körper der rationalen Zahlen; und umgekehrt, wenn Letzteres der Fall ist, so leuchtet unmittelbar ein, dass c auch im Körper Q kubischer Rest von π (und π') ist; mithin tritt der erste der drei obigen Fälle dann und nur dann ein, wenn c im Körper der rationalen Zahlen kubischer Rest von p ist. —

An dieser Stelle brechen wir die Aufzählung der für uns wichtigen Eigenschaften des Körpers Q vorläufig ab, um sie später wieder aufzunehmen. Das Vorstehende reicht nämlich schon aus, um die in § 6 begonnene Darstellung der Idealfunction J des reinen kubischen Körpers K wesentlich zu vereinfachen. Zu diesem Zwecke führen wir, wenn die Invarianten a, b des Körpers K und die daraus abgeleiteten Zahlen k und $D = -3k^2$ ihre frühere Bedeutung (§§ 3, 4) behalten, für jede Primzahl π des quadratischen Körpers Q eine ***Function*** $\psi(\pi)$ ein, welche für alles Folgende von der grössten Wichtigkeit ist; bedeutet p wieder die durch π theilbare natürliche Primzahl, so definiren*) wir auf folgende Weise:

I. Geht π, also auch p in k auf, so setzen wir

$$\psi(\pi) = 0.$$

II. Geht π, also auch p nicht in k, wohl aber in D auf, so ist $p = 3$, also π associirt mit $(1-\varrho)$, und der Körper K ist von zweiter Art; in diesem Falle setzen wir

$$\psi(\pi) = 1.$$

---

*) Die hier für die Primzahlen π, später für alle ganzen Zahlen ω des Körpers Q erklärte Function ψ hängt offenbar unsymmetrisch, aber so von den Invarianten a, b des Körpers K ab, dass sie durch deren Vertauschung in ihr Quadrat übergeht.

III. In den übrigen, also in allen denjenigen Fällen, wo π, also auch p nicht in D aufgeht, setzen wir

$$\psi(\pi) = \left(\frac{ab^2}{\pi}\right),$$

wo das Symbol rechter Hand die oben angegebene Bedeutung hat, also eine Potenz von ϱ ist.

Aus dieser Definition folgen offenbar für alle Primzahlen π zunächst die beiden Sätze

IV. $$\psi(\sigma\pi) = \psi(\pi), \qquad \psi(\pi') = \psi(\pi)^2.$$

Man überzeugt sich ferner leicht, dass in allen fünf Fällen, welche am Schlusse von § 6 aufgezählt sind, die dort erklärte Function $F(p)$ durch den Ausdruck

$$F(p) = \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} \cdot \Pi \frac{1}{1-\frac{\psi(\pi)}{N(\pi)^s}}$$

dargestellt wird, wo das Productzeichen Π sich auf alle *wesentlich verschiedenen,* in p aufgehenden Primzahlen π bezieht. Um dies zu beweisen, bezeichnen wir den Ausdruck rechter Hand vorläufig mit $F_1(p)$; gehen wir die fünf Fälle am Schlusse von § 6 unter Beibehaltung der dortigen Bedeutung von P_n einzeln durch, so ergiebt sich Folgendes:

1) Zufolge der Definition I ist $\psi(\pi) = 0$ für jede in p aufgehende Primzahl, mithin $F_1(p) = P_1$.

2) Zufolge der Definition II ist $\psi(\pi) = 1$ für die wesentlich einzige in p aufgehende Primzahl $\pi = \sigma(1-\varrho)$, und da $N(\pi) = 3 = p$ ist, so wird $F_1(p) = P_1^2$.

3) Die wesentlich einzige in p aufgehende Primzahl π ist p selbst; zufolge der Definition III und weil $p \equiv -1 \pmod 3$ ist, wird daher

$$\psi(\pi) = \left(\frac{ab^2}{p}\right) = 1,$$

und da $N(\pi) = p^2$ ist, so wird $F_1(p) = P_1 P_2$.

4) In diesem (wie in dem folgenden) Falle ist p durch zwei wesentlich verschiedene Primzahlen π, π' theilbar, deren Normen $N(\pi) = N(\pi') = p$ sind; da ferner ab^2 kubischer Rest von p, also auch von π und π' ist, so ist zufolge der Definition III:

$$\psi(\pi) = \left(\frac{ab^2}{\pi}\right) = 1, \quad \psi(\pi') = \left(\frac{ab^2}{\pi'}\right) = 1,$$

mithin wird $F_1(p) = P_1^3$.

5) Da in diesem Falle ab^2 kubischer Nichtrest von p, also auch von π, π' ist, so folgt aus der Definition III entweder

$$\psi(\pi) = \left(\frac{ab^2}{\pi}\right) = \varrho, \qquad \psi(\pi') = \left(\frac{ab^2}{\pi'}\right) = \varrho^2$$

oder

$$\psi(\pi) = \left(\frac{ab^2}{\pi}\right) = \varrho^2, \qquad \psi(\pi') = \left(\frac{ab^2}{\pi'}\right) = \varrho,$$

mithin wird in beiden Fällen

$$F_1(p) = \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} \cdot \frac{1}{1-\frac{\varrho}{p^s}} \cdot \frac{1}{1-\frac{\varrho^2}{p^s}} = P_3.$$

Nachdem hiermit für alle Fälle die Identität $F(p) = F_1(p)$ bewiesen ist, ergiebt sich für die Idealfunction $J = \Pi F(p)$, wo p alle natürlichen Primzahlen durchläuft, die folgende Zerlegung

$$J = GH;$$

hier ist

$$G = \Pi \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} = \Sigma \frac{1}{n^s},$$

wo sich das Productzeichen Π auf alle natürlichen Primzahlen p, das Summenzeichen Σ auf alle natürlichen Zahlen n bezieht, während

$$H = \Pi \frac{1}{1-\frac{\psi(\pi)}{N(\pi)^s}}$$

ist, wo das Productzeichen Π sich auf alle ***wesentlich verschiedenen*** Primzahlen π des Körpers Q bezieht. Wir wollen nun dieses unendliche Product H ebenfalls in Form einer unendlichen Reihe darstellen.

Sobald eine Function $\psi(\pi)$ für alle ***Primzahlen*** π in Q und zwar so definirt ist, dass für alle sechs mit π associirten Primzahlen $\sigma\pi$ immer $\psi(\sigma\pi) = \psi(\pi)$ wird, so lässt sich die Function ψ stets zu einer Function $\psi(\omega)$ *jeder* ganzen Zahl ω in Q so erweitern, dass für je zwei solche Zahlen ω_1, ω_2 das Gesetz

V. $$\psi(\omega_1\omega_2) = \psi(\omega_1)\psi(\omega_2)$$

gilt; schliesst man noch die beiden leicht zu behandelnden, für uns aber gänzlich interesselosen singulären Fälle aus, wo die gegebenen Zahlen $\psi(\pi)$ alle $= 1$, oder alle $= 0$ sind, so kann eine solche Erweiterung der

Function ψ auch nur auf eine einzige Weise ausgeführt werden. Soll nämlich das Gesetz V bestehen, so muss zunächst $\psi(0) = \psi(0)\psi(\pi)$, mithin

VI. $$\psi(0) = 0$$

sein; da ferner nach unserer Voraussetzung $\psi(\sigma\pi) = \psi(\pi)$ ist, so muss $\psi(\sigma)\psi(\pi) = \psi(\pi)$, also

VII. $$\psi(\sigma) = 1,$$

und folglich auch immer

VIII. $$\psi(\sigma\omega) = \psi(\omega)$$

sein. Wählt man nun aus jedem System von sechs associirten Primzahlen eine bestimmte nach Belieben aus und nennt dieselbe etwa eine *primäre* Primzahl, so ist jede zusammengesetzte Zahl ω von der Form

$$\omega = \sigma\pi_1\pi_2\pi_3\ldots,$$

wo σ eine bestimmte Einheit, und wo das System der primären Primzahlen $\pi_1, \pi_2, \pi_3\ldots$ ebenfalls vollständig bestimmt ist; nach dem obigen Gesetze, welches offenbar für eine beliebige Anzahl von Factoren gelten muss, ist dann

IX. $$\psi(\omega) = \psi(\pi_1)\psi(\pi_2)\psi(\pi_3)\ldots,$$

und folglich ist die geforderte Erweiterung der Function ψ nur auf eine einzige Weise möglich. Dass aber umgekehrt die durch die vorstehenden Bestimmungen VI, VII, IX erhaltene Function ψ auch dem obigen Multiplicationsgesetze V genügt, leuchtet unmittelbar ein. Zugleich ergiebt sich aus IV für unsere Function ψ der Satz

X. $$\psi(\omega') = \psi(\omega)^2.$$

Entwickelt man nun jeden Factor des unendlichen Productes H, in welchem π ausschliesslich alle primären Primzahlen durchläuft, in eine geometrische Reihe

$$\frac{1}{1-\frac{\psi(\pi)}{N(\pi)^s}} = 1+\frac{\psi(\pi)}{N(\pi)^s}+\frac{\psi(\pi)^2}{N(\pi)^{2s}}+\frac{\psi(\pi)^3}{N(\pi)^{3s}}+\cdots,$$

so nimmt die letztere zufolge der Erweiterung unserer Function ψ die Form

$$1+\frac{\psi(\pi)}{N(\pi)^s}+\frac{\psi(\pi^2)}{N(\pi^2)^s}+\frac{\psi(\pi^3)}{N(\pi^3)^s}+\cdots = \Sigma\frac{\psi(\pi^n)}{N(\pi^n)^s}$$

an, wo n den Werth 0 und alle natürlichen Zahlen durchläuft. Multiplicirt

man ferner alle diese, den primären Primzahlen π entsprechenden Reihen, so erhält man

$$H = \Sigma \frac{\psi(\omega)}{N(\omega)^s},$$

wo ω jede Zahl von der Form

$$\omega = \pi_1^{n_1} \pi_2^{n_2} \pi_3^{n_3} \cdots$$

einmal durchläuft, in welcher $\pi_1, \pi_2, \pi_3 \ldots$ von einander verschiedene primäre Primzahlen, und $n_1, n_2, n_3 \ldots$ ganze, nicht negative Zahlen bedeuten. Bedenkt man endlich, dass je zwei verschiedene solche Zahlen ω auch nicht associirt sind, und dass zu jeder Zahl ω sechs associirte Zahlen $\mu = \sigma\omega$ gehören, denen dieselbe Norm $N(\mu) = N(\omega)$ und derselbe Werth $\psi(\mu) = \psi(\omega)$ zukommt, so erhält man das Resultat

$$6H = \Sigma \frac{\psi(\mu)}{N(\mu)^s},$$

wo das Summenzeichen sich auf *alle* von Null verschiedenen ganzen Zahlen μ des Körpers Q bezieht.

Aus der Definition der Function ψ geht hervor, dass $\psi(\mu)$ immer und nur dann $= 0$ ist, wenn μ durch eine in der Zahl k aufgehende Primzahl π theilbar ist; lässt man alle diese verschwindenden Glieder weg, so ist die obige Summe nur noch auf alle diejenigen Zahlen μ auszudehnen, welche ***relative Primzahlen zu der Zahl k*** sind, und $\psi(\mu)$ ist immer eine Potenz von ϱ. Um aber die allgemeine Form aller Zahlen μ zu finden, für welche $\psi(\mu)$ einen vorgeschriebenen Werth 1 oder ϱ oder ϱ^2 besitzt, bedürfen wir des kubischen Reciprocitätssatzes.

§ 8.

Der kubische Reciprocitätssatz.

Indem wir die in § 7 begonnene Aufzählung der für unsere Untersuchung wichtigen Eigenschaften des Körpers Q wieder aufnehmen, schreiten wir zunächst zu einer schon von *Jacobi* empfohlenen und auch von *Eisenstein* benutzten Erweiterung des Symbols

$$\left(\frac{\omega}{\mu}\right)$$

für alle Fälle, wo μ ***relative Primzahl zu*** 3ω ist, während bisher μ als Primzahl π vorausgesetzt war; diese Erweiterung ist genau auf dieselbe

Weise durchzuführen wie diejenige der Function ψ in § 7. Wir setzen daher

$$\left(\frac{\omega}{\sigma}\right) = 1,$$

wo σ wieder jede Einheit bedeutet; ist ferner die zusammengesetzte Zahl

$$\mu = \pi_1 \pi_2 \pi_3 \ldots$$

als Product von lauter Primzahlen π_1, π_2, $\pi_3 \ldots$ dargestellt, so setzen wir

$$\left(\frac{\omega}{\mu}\right) = \left(\frac{\omega}{\pi_1}\right)\left(\frac{\omega}{\pi_2}\right)\left(\frac{\omega}{\pi_3}\right)\cdots,$$

und diese Definition ist eine durchaus eindeutige, weil das vorstehende Product ungeändert bleibt, wenn die Primzahlen π durch associirte Primzahlen $\sigma\pi$ ersetzt werden. Aus den früher erwähnten Eigenschaften des einfachen Symbols ergeben sich offenbar für das neue Symbol die Gesetze

$$\left(\frac{\omega}{\mu}\right)^3 = 1, \left(\frac{\omega}{\sigma\mu}\right) = \left(\frac{\omega}{\mu}\right), \left(\frac{\pm 1}{\mu}\right) = 1, \left(\frac{\omega'}{\mu'}\right) = \left(\frac{\omega}{\mu}\right)^2,$$

$$\left(\frac{\omega_1 \omega_2}{\mu}\right) = \left(\frac{\omega_1}{\mu}\right)\left(\frac{\omega_2}{\mu}\right), \left(\frac{\omega}{\mu_1 \mu_2}\right) = \left(\frac{\omega}{\mu_1}\right)\left(\frac{\omega}{\mu_2}\right),$$

und wenn μ_0 das Product aller wesentlich verschiedenen, in μ aufgehenden Primzahlen π oder auch irgend eine durch dieses Product theilbare Zahl (z. B. μ) bedeutet, so folgt aus

$$\omega_1 \equiv \omega_2 \pmod{\mu_0} \quad \text{auch} \quad \left(\frac{\omega_1}{\mu}\right) = \left(\frac{\omega_2}{\mu}\right).$$

Unser Symbol ist daher, als Function des Zählers ω angesehen, auch jetzt ein *Charakter* der *Abel*schen Gruppe, welche von den $\varphi'(\mu)$ Zahlklassen $\omega \pmod{\mu}$ gebildet wird.

Ist nun der Nenner μ des Symbols associirt mit der dritten Potenz einer Zahl ν (in Q), so leuchtet ein, dass für *alle* $\varphi'(\mu)$ Zahlklassen ω das Symbol den Werth 1 hat, weil aus $\mu = \sigma\nu^3$ auch

$$\left(\frac{\omega}{\mu}\right) = \left(\frac{\omega}{\sigma\nu^3}\right) = \left(\frac{\omega}{\nu^3}\right) = \left(\frac{\omega}{\nu}\right)^3 = 1$$

folgt. In jedem *anderen* Falle giebt es aber unter den höchsten in μ aufgehenden Primzahlpotenzen π^e mindestens eine, deren Exponent e nicht durch 3 theilbar ist, und man kann nach § 7 einen kubischen Nichtrest λ der Primzahl π so wählen, dass

$$\left(\frac{\lambda}{\pi}\right) = \varrho^e$$

wird; setzt man nun $\mu = \nu\pi^e$, so ist ν relative Primzahl zu π^e, und man kann bekanntlich eine Zahl ω_1 (mod. μ) durch die Congruenzen

$$\omega_1 \equiv 1 \pmod{\nu}, \qquad \omega_1 \equiv \lambda \pmod{\pi^e}$$

bestimmen; dann ist ω_1 relative Primzahl zu μ, und aus den obigen Sätzen ergiebt sich

$$\left(\frac{\omega_1}{\mu}\right) = \left(\frac{\omega_1}{\nu}\right)\left(\frac{\omega_1}{\pi}\right)^e = \left(\frac{1}{\nu}\right)\left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^e = \varrho^{e^2} = \varrho;$$

bezeichnet man nun mit ω_0 alle diejenigen nach μ incongruenten Zahlen, welche der Bedingung

$$\left(\frac{\omega_0}{\mu}\right) = 1$$

genügen und offenbar für sich eine Gruppe bilden, so folgt leicht, dass

$$\left(\frac{\omega}{\mu}\right) = 1 \text{ oder } \varrho \text{ oder } \varrho^2$$

wird, je nachdem

$$\omega \equiv \omega_0 \text{ oder } \omega_0\,\omega_1 \text{ oder } \omega_0\,\omega_1^2 \pmod{\mu}$$

ist, und jede dieser drei Arten von Zahlen besteht aus $\frac{1}{3}\varphi'(\mu)$ Zahlklassen ω (mod. μ). —

Die durch die Primzahl $(1-\varrho)$ nicht theilbaren Zahlen μ zerfallen in Bezug auf die vier Moduln $1-\varrho$, $(1-\varrho)^2$, $(1-\varrho)^3$, $(1-\varrho)^4$ resp. in 2, 6, 18, 54 Zahlklassen, welche auf folgende Weise dargestellt werden können

$$\mu \equiv \pm 1 \pmod{1-\varrho}, \qquad \mu \equiv \sigma \pmod{3},$$

$$\mu \equiv \sigma \cdot 4^m \pmod{3-3\varrho}, \qquad \mu \equiv \sigma \cdot 4^m \cdot (4-3\varrho)^n \pmod{9},$$

wo σ jede Einheit, und jeder der Exponenten m, n die Zahlen 0, 1, 2 durchläuft; aus der letzten Darstellung gehen die anderen successive hervor, weil $4-3\varrho \equiv 1 \pmod{3-3\varrho}$, $4 \equiv 1 \pmod{3}$, $\sigma \equiv \pm 1 \pmod{1-\varrho}$ ist; zugleich wird

$$N(\mu) = \mu\mu' \equiv 4^{2m} \equiv 1+6m \pmod{9}.$$

Legen wir diese Darstellung der Zahlen μ zu Grunde, so nehmen die zuerst von *Eisenstein* aufgestellten und bewiesenen sogenannten *Ergänzungssätze* folgende Formen an:

$$\left(\frac{\varrho}{\mu}\right) = \varrho^{\frac{N(\mu)-1}{3}} = \varrho^{2m}, \qquad \left(\frac{1-\varrho}{\mu}\right) = \varrho^{m+n},$$

$$\left(\frac{\varrho-\varrho^2}{\mu}\right) = \varrho^n, \qquad \left(\frac{3}{\mu}\right) = \varrho^{2n};$$

der erste dieser vier Sätze folgt sehr leicht aus der ursprünglichen Definition des kubischen Charakters in Bezug auf eine Primzahl π, während der zweite eine tiefer liegende Begründung erfordert, die man am angegebenen Orte findet; durch Multiplication ergiebt sich hieraus der dritte und endlich durch Quadriren der vierte Satz, weil $(\varrho-\varrho^2)^2=-3$ ist. Aus diesen Sätzen folgt, dass die vier vorstehenden Symbole ungeändert bleiben, wenn die Zahl μ durch irgend eine nach dem Modul 9 congruente Zahl ersetzt wird; für das erste Symbol gilt dies sogar schon dann, wenn diese Congruenz in Bezug auf den Modul $(3-3\varrho)$ stattfindet. —

Wir wenden uns endlich zu dem von ***Eisenstein*** bewiesenen allgemeinen ***Reciprocitätssatze.*** Da jede durch $(1-\varrho)$ untheilbare Zahl mit einer und nur einer der sechs Einheiten σ nach dem Modul 3 congruent ist, so finden sich unter den sechs mit ihr associirten Zahlen immer zwei Zahlen μ welche der Bedingung $\mu\equiv\pm 1 \pmod 3$ oder, was dasselbe sagt, der Bedingung $\mu^2\equiv 1 \pmod 3$ genügen; für je zwei ***relative Primzahlen*** μ, ν, welche zugleich diese Bedingung $\mu^2\equiv\nu^2\equiv 1 \pmod 3$ erfüllen, gilt dann das Gesetz

$$\left(\frac{\mu}{\nu}\right)=\left(\frac{\nu}{\mu}\right);$$

falls aber die Zahlen μ, ν die genannte Bedingung nicht erfüllen, so findet zwischen den beiden vorstehenden Symbolen eine Beziehung statt, welche mit Hülfe des ersten der obigen vier Ergänzungssätze immer leicht abzuleiten ist.

Wir benutzen jetzt die vorstehenden Sätze zu einer wesentlichen Umformung unserer in § 7 erklärten Function $\psi(\mu)$ unter der Voraussetzung, dass μ ***relative Primzahl zu*** k ist. Hierbei müssen wir die beiden Fälle unterscheiden, wo der reine kubische Körper K von erster oder zweiter Art ist (§ 3).

Im ***ersten*** Falle ist $k=3ab$, und da ab durch 3, aber nicht durch 9 theilbar sein kann, so bezeichnen wir mit 3^u, 3^v die höchsten in a, b aufgehenden Potenzen von 3 und setzen

$$a=3^u\cdot a_1, \qquad b=3^v\cdot b_1,$$

wo entweder $u=v=0$, oder $u=1$, $v=0$ oder $u=0$, $v=1$ ist, während a_1 und b_1 nicht durch 3 theilbar sind. Ist nun μ relative Primzahl zu k, und stellen wir dieselbe in der Form $\mu=\pi_1\pi_2\pi_3\ldots$ als Product von lauter

Primzahlen π dar (von denen keine in $D = -3k^2$ aufgehen kann), so folgt aus den Definitionen III und IX in § 7 zunächst

$$\psi(\mu) = \left(\frac{ab^2}{\pi_1}\right)\left(\frac{ab^2}{\pi_2}\right)\left(\frac{ab^2}{\pi_3}\right)\cdots = \left(\frac{ab^2}{\mu}\right) = \left(\frac{3}{\mu}\right)^{u+2v}\left(\frac{a_1 b_1^2}{\mu}\right);$$

wählt man nun eine Einheit σ so, dass $\sigma\mu \equiv \pm 1 \pmod 3$ wird und bedenkt, dass auch $a_1 b_1^2 \equiv \pm 1 \pmod 3$ ist, so folgt aus dem allgemeinen Reciprocitätssatze

$$\left(\frac{a_1 b_1^2}{\mu}\right) = \left(\frac{a_1 b_1^2}{\sigma\mu}\right) = \left(\frac{\sigma\mu}{a_1 b_1^2}\right),$$

und wir erhalten das Resultat

XI. $$\psi(u) = \left(\frac{3}{\mu}\right)^{u+2v}\left(\frac{\sigma\mu}{a_1 b_1^2}\right),$$

$$\sigma\mu \equiv \pm 1 \pmod 3, \quad k = 3ab = 3^{1+u+v} \cdot a_1 b_1.$$

In ***zweiten*** Falle, wo K von zweiter Art, also $k = ab \equiv \pm 1 \pmod 3$, und $a^2 \equiv b^2 \pmod 9$, also auch $ab^2 \equiv a^3 \equiv \pm 1 \pmod 9$ ist, ergiebt sich aus den obigen Ergänzungssätzen (wo μ, σ, m, n, resp. durch ab^2, ± 1, 0, 0 zu ersetzen sind)

$$\left(\frac{\varrho}{ab^2}\right) = 1, \quad \left(\frac{1-\varrho}{ab^2}\right) = 1$$

und, weil jede Einheit $\sigma = \pm\varrho^r$ ist, auch

$$\left(\frac{\sigma}{ab^2}\right) = 1.$$

Ist nun μ relative Primzahl zu k, so kann man stets

$$\mu = \sigma(1-\varrho)^r \nu$$

setzen, wo σ eine Einheit, und $\nu \equiv 1 \pmod 3$, also ν relative Primzahl zu $3k$, mithin auch zu D ist; aus den vorstehenden Gleichungen ergiebt sich mit Hülfe des Reciprocitätssatzes

$$\left(\frac{\mu}{ab^2}\right) = \left(\frac{\sigma}{ab^2}\right)\left(\frac{1-\varrho}{ab^2}\right)^r\left(\frac{\nu}{ab^2}\right) = \left(\frac{\nu}{ab^2}\right) = \left(\frac{ab^2}{\nu}\right).$$

Gehen wir jetzt zur Bestimmung von $\psi(\mu)$ über, so folgt aus der obigen Darstellung von μ mit Rücksicht auf V, VII, II in § 7 zunächst $\psi(\mu) = \psi(\nu)$; stellt man ferner die Zahl ν als Product $\pi_1\pi_2\pi_3\ldots$ von lauter Primzahlen dar, von denen keine in D aufgehen kann, so folgt aus III und IX in § 7

$$\psi(\nu) = \left(\frac{ab^2}{\pi_1}\right)\left(\frac{ab^2}{\pi_2}\right)\left(\frac{ab^2}{\pi_3}\right)\cdots = \left(\frac{ab^2}{\nu}\right),$$

und wir erhalten daher das einfache Resultat

XII. $$\psi(\mu) = \left(\frac{\mu}{ab^2}\right), \text{ wenn } k = ab.$$

Aus diesen Darstellungen XI und XII der Function $\psi(\mu)$ ergeben sich die folgenden wichtigen Sätze.

XIII. ***Die Function $\psi(\mu)$ hat für alle Zahlen μ, welche derselben Zahlklasse in Bezug auf den Modul k angehören, einen und denselben Werth.***

Dies leuchtet für den zweiten Fall unmittelbar aus XII ein, weil k durch jede in ab^2 aufgehende Primzahl π theilbar ist, mithin aus $\mu_1 \equiv \mu \pmod{k}$ auch

$$\left(\frac{\mu_1}{ab^2}\right) = \left(\frac{\mu}{ab^2}\right),$$

also $\psi(\mu_1) = \psi(\mu)$ folgt. Dasselbe ergiebt sich für den ersten Fall auf folgende Weise aus XI. Da $k = 3ab$ ist, so folgt aus $\mu_1 \equiv \mu \pmod{k}$ auch $\mu_1 \equiv \mu \pmod{3}$; ist daher die Einheit σ so gewählt, dass $\sigma\mu \equiv \pm 1 \pmod{3}$ wird, so ist auch $\sigma\mu_1 \equiv \pm 1 \pmod{3}$, also

$$\psi(\mu_1) = \left(\frac{3}{\mu_1}\right)^{u+2v}\left(\frac{\sigma\mu_1}{a_1 b_1^2}\right);$$

da nun $\sigma\mu_1 \equiv \sigma\mu \pmod{k}$, und k durch jede in $a_1 b_1^2$ aufgehende Primzahl π theilbar ist, so folgt

$$\left(\frac{\sigma\mu_1}{a_1 b_1^2}\right) = \left(\frac{\sigma\mu}{a_1 b_1^2}\right)$$

und hieraus, falls $u + 2v = 0$ ist, $\psi(\mu_1) = \psi(\mu)$; wenn aber $u + 2v > 0$, also k durch 9 theilbar ist, so ist auch $\mu_1 \equiv \mu \pmod{9}$, also

$$\left(\frac{3}{\mu_1}\right) = \left(\frac{3}{\mu}\right),$$

mithin ist auch in diesem Falle $\psi(\mu_1) = \psi(\mu)$, w. z. b. w.

XIV. ***Ist $\mu \equiv r \pmod{k}$, wo r eine rationale relative Primzahl zu k bedeutet, so ist $\psi(\mu) = 1$.***

Bedeutet μ' wie früher die mit μ conjugirte Zahl, so folgt aus unserer Annahme auch $\mu' \equiv r$, also*) $\mu \equiv \mu' \pmod{k}$, mithin zufolge XIII auch $\psi(\mu) = \psi(\mu')$; da ferner nach X in § 7 stets $\psi(\mu') = \psi(\mu)^2$ ist, so folgt $\psi(\mu) = 1$, w. z. b. w.

XV. ***Ist p eine in k aufgehende natürliche Primzahl, und $k = pq$, so giebt es immer eine relative Primzahl μ zu k, welche den beiden Bedingungen***

$$\mu \equiv 1 \pmod{q}, \qquad \psi(\mu) = \varrho$$

genügt.

---

*) Aus $\mu \equiv \mu' \pmod{k}$ folgt umgekehrt, dass μ einer rationalen Zahl congruent ist $\pmod{k}$.

Bei dem Beweise haben wir eine Reihe von Fällen zu unterscheiden, und wir wollen zunächst den Fall $p = 3$ betrachten, welcher nur dann eintreten kann, wenn der kubische Körper K von erster Art ist; wir haben für den Beweis also die Darstellung XI der Function ψ zu benutzen und dabei zu berücksichtigen, dass $q = ab = 3^{u+v} \cdot a_1 b_1$ ist; sodann müssen wir die drei Fälle trennen, welche die beiden dort mit u, v bezeichneten Zahlen darbieten können.

Ist erstens $u = v = 0$, also $a_1 = a$, $b_1 = b$, so ist $ab \equiv \pm 1 \pmod 3$, aber es kann *nicht* $ab^2 \equiv \pm 1 \pmod 9$ sein, weil hieraus $a^2 b^4 \equiv 1$, also auch $a^2 \equiv b^2 \pmod 9$ folgen würde, was unmöglich ist, weil der Körper K von erster, nicht von zweiter Art ist. Man kann daher

$$ab^2 \equiv \pm 4^m \pmod 9$$

setzen, wo m nicht durch 3 theilbar ist, und nach dem ersten Ergänzungssatze ist zugleich

$$\left(\frac{\varrho}{ab^2}\right) = \varrho^{2m}.$$

Da nun $q = ab$ relative Primzahl zu 3 ist, so giebt es bekanntlich immer Zahlen μ, welche den beiden Congruenzen

$$\mu \equiv 1 \pmod q, \qquad \mu \equiv \varrho^m \pmod 3$$

genügen, und jede solche Zahl μ ist offenbar relative Primzahl zu $k = 3q$. Zufolge der ersten dieser beiden Congruenzen ist die erste, im Satze an die Zahl μ gestellte Forderung erfüllt, und da $q = ab$ durch jede in ab^2 aufgehende Primzahl π theilbar ist, so folgt zugleich

$$\left(\frac{\mu}{ab^2}\right) = \left(\frac{1}{ab^2}\right) = 1.$$

Aus der zweiten der vorstehenden Congruenzen folgt ferner, dass die Einheit $\sigma = \varrho^{2m}$ die in XI geforderte Bedingung $\sigma\mu \equiv 1 \pmod 3$ erfüllt, mithin wird

$$\psi(\mu) = \left(\frac{\sigma\mu}{ab^2}\right) = \left(\frac{\sigma}{ab^2}\right)\left(\frac{\mu}{ab^2}\right) = \left(\frac{\varrho^{2m}}{ab^2}\right) = \varrho^{4m^2} = \varrho,$$

d. h. die Zahl μ genügt auch der zweiten, im Satze an sie gestellten Forderung, w. z. b. w.

Ist zweitens $u = 1$, $v = 0$, also $a = 3a_1$, $b = b_1$, $k = 9a_1 b$, $q = 3a_1 b$, so giebt es, weil $a_1 b$ relative Primzahl zu 9 ist, Zahlen μ, welche den beiden Congruenzen

$$\mu \equiv 1 \pmod{a_1 b}, \qquad \mu \equiv (4 - 3\varrho)^2 \pmod 9$$

genügen, und jede solche Zahl μ ist relative Primzahl zu k. Aus der zweiten Congruenz folgt $\mu \equiv 1 \pmod 3$, und hieraus in Verbindung mit der ersten Congruenz auch $\mu \equiv 1 \pmod q$, also ist die erste, im Satze an μ gestellte Forderung erfüllt. Zugleich ergiebt sich, dass die in XI auftretende Einheit $\sigma = 1$ gewählt werden kann, und es wird folglich

$$\psi(\mu) = \left(\frac{3}{\mu}\right)\left(\frac{\mu}{a_1 b^2}\right).$$

Da jede in $a_1 b^2$ aufgehende Primzahl π auch in dem Modul $a_1 b$ der ersten Congruenz aufgeht, so ist

$$\left(\frac{\mu}{a_1 b^2}\right) = \left(\frac{1}{a_1 b^2}\right) = 1,$$

und da aus der zweiten Congruenz in Verbindung mit dem vierten Ergänzungssatze (wo $n = 2$ zu setzen ist)

$$\left(\frac{3}{\mu}\right) = \varrho^4 = \varrho$$

folgt, so wird auch $\psi(\mu) = \varrho$, wie gefordert war.

Ist drittens $u = 0$, $v = 1$, also $a = a_1$, $b = 3b_1$, $k = 9ab_1$, $q = 3ab_1$, so werden die Forderungen des Satzes erfüllt, wenn man μ durch die beiden Congruenzen

$$\mu \equiv 1 \pmod{ab_1}, \qquad \mu \equiv 4 - 3\varrho \pmod 9$$

bestimmt. Den Beweis, welcher auf dieselbe Weise wie im vorigen Falle zu führen ist, dürfen wir dem Leser überlassen.

Nachdem hiermit der Fall $p = 3$ erledigt ist, nehmen wir jetzt an, es sei p verschieden von 3. Um die hierbei auftretenden Unterfälle so viel wie möglich zusammenzufassen, setzen wir $e = 1$ oder $= 2$, je nachdem p in a oder in b aufgeht; dann ist p^e die höchste in ab^2 aufgehende Potenz von p. Da p im Körper Q entweder eine Primzahl oder ein Product von zwei verschiedenen Primzahlen ist, so kann es in Q keine Zahl geben, deren dritte Potenz mit p associirt wäre, und hieraus folgt nach einer früheren Bemerkung (S. 70), die Existenz einer relativen Primzahl ω zu p, welche der Bedingung

$$\left(\frac{\omega}{p}\right) = \varrho$$

genügt. Mag nun der kubische Körper K von erster oder zweiter, mag also k durch 3 theilbar sein oder nicht, immer sind die beiden Factoren p, q

der Zahl $k = pq$ relative Primzahlen, mithin giebt es immer Zahlen μ, welche den beiden Congruenzen

$$\mu \equiv 1 \pmod{q}, \qquad \mu \equiv \omega^e \pmod{p}$$

genügen, und jede solche Zahl μ ist relative Primzahl zu k. Durch die erste Congruenz ist die erste, im Satze an μ gestellte Forderung erfüllt, wir haben daher nur noch zu zeigen, dass $\psi(\mu) = \varrho$ ist, und hierzu müssen wir die beiden Hauptfälle von einander trennen.

Ist $k = 3ab$, so haben wir die Darstellung XI zu Grunde zu legen. Da q durch 3, im Falle $u+2v>0$ sogar durch 9 theilbar ist, so folgt aus der ersten Congruenz und aus dem vierten Ergänzungssatz zunächst

$$\left(\frac{3}{\mu}\right)^{u+2v} = 1,$$

und da ausserdem die Einheit $\sigma = 1$ der Bedingung $\sigma\mu \equiv 1 \pmod 3$ genügt, so wird

$$\psi(\mu) = \left(\frac{\mu}{a_1 b_1^2}\right) = \left(\frac{\mu}{c}\right)\left(\frac{\mu}{p}\right)^e,$$

wo $a_1 b_1^2 = cp^e$ gesetzt, also c nicht durch p theilbar ist. Jede in c aufgehende Primzahl π geht daher auch in q auf, und da $\mu \equiv 1 \pmod q$ ist, so folgt

$$\left(\frac{\mu}{c}\right) = \left(\frac{1}{c}\right) = 1.$$

Aus der zweiten, bisher nicht benutzten Congruenz $\mu \equiv \omega^e \pmod p$ folgt ferner

$$\left(\frac{\mu}{p}\right) = \left(\frac{\omega^e}{p}\right) = \left(\frac{\omega}{p}\right)^e = \varrho^e, \quad \left(\frac{\mu}{p}\right)^e = \varrho,$$

mithin ist auch $\psi(\mu) = \varrho$, w. z. b. w.

Ist aber $k = ab$, so haben wir die Darstellung XII anzuwenden. Setzen wir jetzt $ab^2 = cp^e$, so ist c nicht theilbar durch p, und es wird wie in dem vorigen Fall

$$\psi(\mu) = \left(\frac{\mu}{ab^2}\right) = \left(\frac{\mu}{c}\right)\left(\frac{\mu}{p}\right)^e = \left(\frac{1}{c}\right)\left(\frac{\omega}{p}\right)^{e^2} = \varrho.$$

Der hiermit vollständig bewiesene Satz lässt sich allgemeiner in folgender Weise aussprechen.

XVI. *Ist $k = mn$, wo m, n natürliche Zahlen bedeuten, deren erstere $m<k$ ist, so giebt es relative Primzahlen μ zu k, welche den Bedingungen*

$$\mu \equiv 1 \pmod{m}, \qquad \psi(\mu) = \varrho$$

genügen.

Da nämlich $n > 1$ ist, so giebt es mindestens eine in n, also auch in k aufgehende natürliche Primzahl p, und wenn man $k = pq$ setzt, so ist q theilbar durch m; nach dem vorigen Satze giebt es aber Zahlen μ, welche den Bedingungen $\mu \equiv 1 \pmod{q}$, $\psi(\mu) = \varrho$ genügen, und da aus der ersteren auch $\mu \equiv 1 \pmod{m}$ folgt, so ist unser Satz bewiesen.

§ 9.

Die Function ψ als Gruppencharakter.

Mit Hülfe der im Vorstehenden bewiesenen Eigenschaften der Function ψ wird es gelingen, die am Schlusse von § 7 betrachtete Summe H so umzuformen, dass die Bestimmung der Anzahl h der Idealklassen im Körper K auf die Theorie der complexen Multiplication der elliptischen Functionen zurückgeführt wird. Hierbei werde ich öfter ein Symbol benutzen, welches mir seit Jahren bei meinen Studien in der Gruppen- und Körpertheorie nützliche Dienste geleistet hat. Sind $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ Complexe von Elementen einer Gruppe $\mathfrak{K}$ (in welcher die Gruppenoperation wie eine Multiplication bezeichnet wird), so soll das Zeichen $\mathfrak{AB}$ den Inbegriff aller verschiedenen Elemente bedeuten, welche in der Form $\alpha\beta$ darstellbar sind, wo α jedes Element von $\mathfrak{A}$, ebenso β jedes Element von $\mathfrak{B}$ durchläuft. Sind $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ selbst Gruppen, also Theiler von $\mathfrak{K}$ (was durch $\mathfrak{AA} = \mathfrak{A}$, $\mathfrak{BB} = \mathfrak{B}$ ausgedrückt wird), so soll das Symbol $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ die *Anzahl* der von einander verschiedenen Complexe $\mathfrak{A}\beta$ bedeuten, welche allen Elementen β der Gruppe $\mathfrak{B}$ entsprechen, und aus welchen der Complex $\mathfrak{AB}$ besteht*). Dann ist immer $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = (\mathfrak{D}, \mathfrak{B})$, wo $\mathfrak{D}$ den grössten gemeinsamen Theiler der beiden Gruppen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ bedeutet. Wenn ferner der Complex $\mathfrak{AB}$ selbst eine Gruppe ist (was durch $\mathfrak{AB} = \mathfrak{BA}$ ausgedrückt wird und immer dann eintritt, wenn $\mathfrak{K}$ eine *Abel*sche Gruppe ist), so ist zugleich $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = (\mathfrak{A}, \mathfrak{AB})$. Endlich erwähne ich noch den Satz $(\mathfrak{E}, \mathfrak{G}) = (\mathfrak{E}, \mathfrak{F})(\mathfrak{F}, \mathfrak{G})$, welcher immer gilt, wenn die Gruppe $\mathfrak{E}$ ein Theiler der Gruppe $\mathfrak{F}$, und diese ein Theiler der Gruppe $\mathfrak{G}$ ist. —

Nachdem dies vorausgeschickt ist, beschäftigen wir uns mit der *Abel*schen Gruppe $\mathfrak{K}$, deren Elemente diejenigen $\varphi'(k)$ Zahlklassen $(\mathrm{mod.}\, k)$ sind,

*) Ist $\mathfrak{K}$ die Gruppe aller Permutationen eines Normalkörpers C, und sind A, B die zu den Gruppen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ gehörigen Körper (so dass z. B. A der Inbegriff aller derjenigen Zahlen in C ist, welche durch jede Permutation der Gruppe $\mathfrak{A}$ in sich selbst übergehen), so ist das Gruppensymbol $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ identisch mit dem Symbol (A, B), welches ich in der Körpertheorie gebrauche (D. § 164. S. 471).

in welche die sämmtlichen, im Körper Q enthaltenen, relativen Primzahlen zu k zerfallen. Bezeichnen wir mit $\mathfrak{o}$ wieder den Inbegriff aller ganzen Zahlen ω, während μ eine bestimmte relative Primzahl zu k bedeutet, so wollen wir die aus allen Zahlen von der Form $\mu+\omega k$ bestehende Zahlklasse kurz die Klasse μ nennen, wobei der Repräsentant μ durch jede andere Zahl derselben Klasse ersetzt werden darf. Die Gruppenoperation besteht in der Multiplication dieser Klassen: multiplicirt man jede Zahl der Klasse μ_1 mit jeder Zahl der Klasse μ_2, so sind alle Producte in derselben Klasse $\mu_1\mu_2$ enthalten, welche deshalb auch das Product jener beiden Klassen μ_1 und μ_2 heissen mag. Die Klasse 1 ist das Hauptelement unserer Gruppe $\mathfrak{R}$ und bildet für sich allein eine Gruppe; mit Benutzung des oben erklärten Symbols wird daher $(1, \mathfrak{R}) = \varphi'(k)$. Um diese Zahl (den Grad der Gruppe $\mathfrak{R}$) zu bestimmen, haben wir den in § 7 angegebenen Satz anzuwenden; da k rational, also $N(k) = k^2$ ist, so erhalten wir

$$\varphi'(k) = k^2 \Pi\Big(1-\frac{1}{N(\pi)}\Big),$$

wo π alle wesentlich verschiedenen, in k aufgehenden Primzahlen π des Körpers Q durchläuft. Bedeutet nun p jede in k aufgehende natürliche Primzahl, und bezeichnet man zur Abkürzung mit p_0 diejenige der drei Zahlen $0, \pm 1$, welche der Bedingung $p_0 \equiv p \pmod 3$ genügt*), so liefern die in p aufgehenden Primzahlen π zu dem vorstehenden Producte den Beitrag

$$\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\Big(1-\frac{p_0}{p}\Big),$$

und folglich wird

$$\varphi'(k) = \varphi(k)\varphi''(k),$$

wo

$$\varphi(k) = k\Pi\Big(1-\frac{1}{p}\Big), \qquad \varphi''(k) = k\Pi\Big(1-\frac{p_0}{p}\Big)$$

gesetzt ist.

Hier bedeutet $\varphi(k)$ wie üblich die Anzahl derjenigen nach k incongruenten ***rationalen*** Zahlen, welche relative Primzahlen zu k sind, also die Anzahl derjenigen Zahlklassen unserer Gruppe $\mathfrak{R}$, in welchen sich auch

---

*) Offenbar ist p_0 identisch mit dem hier zu vermeidenden Symbol $\left(\frac{p}{3}\right)$ von *Legendre* und mit meinem Symbol $(-3, p)$ (D. S. 637, 655).

rationale Zahlen r befinden; dieselben bilden offenbar für sich eine Gruppe, einen Theiler von $\mathfrak{K}$, den wir mit $\mathfrak{R}$ bezeichnen wollen, und die Bedeutung der obigen Zerlegung von $\varphi'(k)$ kann durch

$$(1, \mathfrak{R}) = \varphi(k), \qquad (\mathfrak{R}, \mathfrak{K}) = \varphi''(k)$$

ausgedrückt werden, weil $(1, \mathfrak{K}) = (1, \mathfrak{R})(\mathfrak{R}, \mathfrak{K})$ ist. Wir wollen schon jetzt bemerken, dass für alle hier in Betracht kommenden Zahlen k, die nach § 4 aus den Invarianten a, b des kubischen Körpers K abzuleiten sind, $\varphi''(k)$ *durch* 9 *theilbar* ist. Da nämlich $k = 3ab$ oder $= ab$ ist, je nachdem K von erster oder zweiter Art ist, und da ab durch kein Primzahlquadrat p^2 theilbar ist, so wird $k = c\Pi p$, wo $c = 3$ oder $= 1$ ist, je nachdem ab durch 3 theilbar ist oder nicht, mithin

$$\varphi''(k) = c\Pi(p - p_0).$$

Da nun jeder Factor $(p - p_0)$ durch 3 theilbar ist, so leuchtet unsere Behauptung für alle die Fälle ein, wo k durch mindestens zwei verschiedene Primzahlen p theilbar ist. Wenn aber k nur durch eine einzige Primzahl p theilbar, also $\varphi''(k) = c(p - p_0)$ ist, so sind zwei Fälle zu unterscheiden. Ist K von erster Art, also $k = 3ab$, so ist $p = 3$, $p_0 = 0$, und da $ab > 1$ ist, so muss $ab = 3$, $k = 9$, $c = 3$, also $\varphi''(k) = 3 \cdot 3 = 9$ sein. Ist aber K von zweiter Art, also $a^2 \equiv b^2 \pmod 9$, so ist $k = ab = p$ verschieden von 3, also $p_0^2 = 1$, $c = 1$, und der Symmetrie halber dürfen wir annehmen, es sei $a = p$, $b = 1$; hieraus folgt $a^2 - b^2 = (p - p_0)(p + p_0) \equiv 0 \pmod 9$, und da von den beiden Factoren $(p - p_0)$, $(p + p_0)$ nur der erste durch 3 theilbar ist, so folgt $\varphi''(k) = p - p_0 \equiv 0 \pmod 9$. Nachdem hiermit unsere Behauptung für alle Fälle erwiesen ist, wollen wir, wo es bequem erscheint,

$$\varphi''(k) = 9k''$$

setzen; die Werthe der hierdurch erklärten natürlichen Zahl k'' sind für die ersten 21 Körper K in der vorletzten Spalte der Tabelle am Schlusse von § 2 angegeben.

Wir kehren nun zur Betrachtung der Function $\psi(\mu)$ zurück, wo μ jede in Q enthaltene relative Primzahl zu k bedeutet. Da $\psi(\mu)$ nach Satz XIII in § 8 für alle Zahlen μ, welche derselben Klasse (mod. k) angehören, einen und denselben Werth hat, so können wir die Function ψ von den ***Zahlen*** μ auf die ***Klassen*** μ übertragen, welche die Elemente der Gruppe $\mathfrak{K}$ bilden, und da (nach V in § 7) für je zwei solche Klassen μ_1, μ_2 und deren Product $\mu_1\mu_2$ das Gesetz $\psi(\mu_1\mu_2) = \psi(\mu_1)\psi(\mu_2)$ gilt, so ist ψ

ein *Charakter der Gruppe* $\mathfrak{K}$ (D. § 184. S. 612). Ausserdem wissen wir (vergl. den Schluss von § 7), dass $\psi(\mu)$ immer eine Potenz von ϱ ist, also keine anderen Werthe als 1, ϱ, ϱ^2 annehmen kann; zufolge VII in § 7 ist nun gewiss $\psi(1)=1$, und da aus dem Satze XV oder XVI in § 8 (weil immer $k>1$ ist) beiläufig folgt, dass es eine Zahl τ giebt, für welche $\psi(\tau)=\varrho$, also auch $\psi(\tau^2)=\varrho^2$ wird, so nimmt $\psi(\mu)$ wirklich alle drei Werthe 1, ϱ, ϱ^2 an. Bezeichnen wir nun mit μ_0 alle diejenigen Klassen, welche der Bedingung $\psi(\mu_0)=1$ genügen, so folgt aus dem Multiplicationsgesetz des Charakters ψ, dass diese Klassen eine *Gruppe**) bilden, welche wir im Folgenden stets mit ψ_0 bezeichnen wollen. Behält ferner τ die eben festgesetzte Bedeutung, so leuchtet ein, dass alle in dem Complex $\psi_0\tau$ enthaltenen Klassen $\mu_1=\mu_0\tau$ der Bedingung $\psi(\mu_1)=\varrho$ genügen; umgekehrt, wenn μ_1 der Repräsentant einer solchen Klasse ist, für welche $\psi(\mu_1)=\varrho$ wird, so kann man immer, weil τ relative Primzahl zu k ist, eine Zahl μ so bestimmen, dass $\mu\tau\equiv\mu_1 \pmod{k}$ wird, und da hieraus $\psi(\mu_1)=\psi(\mu\tau)=\psi(\mu)\psi(\tau)$, also $\psi(\mu)=1$ folgt, so ist die Klasse μ in der Gruppe ψ_0 der Klassen μ_0 enthalten, mithin ist der Complex $\psi_0\tau$ der Inbegriff aller verschiedenen Klassen μ_1, welche der Bedingung $\psi(\mu_1)=\varrho$ genügen. Genau ebenso ergiebt sich, dass der Complex $\psi_0\tau^2$ der Inbegriff aller verschiedenen Klassen μ_2 ist, für welche $\psi(\mu_2)=\varrho^2$ wird, und da jeder der drei Complexe ψ_0, $\psi_0\tau$, $\psi_0\tau^2$ aus gleich vielen verschiedenen Klassen besteht, so ist

$$(1,\psi_0)=\tfrac{1}{3}\varphi'(k)=3k''\varphi(k), \qquad (\psi_0,\mathfrak{K})=3,$$

weil jede Klasse der Gruppe $\mathfrak{K}$ einem und nur einem dieser drei Complexe angehören muss**).

---

*) Vertauscht man die beiden Invarianten a, b des Körpers K miteinander, wodurch die Function ψ in ihr Quadrat übergeht (§ 7, Anm. auf S. 64), so bleibt diese Gruppe ψ_0 ungeändert, d. h. sie ist ebenfalls eine Invariante des Körpers K.

**) Ist ψ ein beliebiger Charakter einer beliebigen *Abel*schen Gruppe $\mathfrak{K}$, bedeutet ferner ψ_0 die Gruppe aller derjenigen Elemente von $\mathfrak{K}$, für welche $\psi=1$ wird, und setzt man $(\psi_0,\mathfrak{K})=n$, so ist n zugleich die Anzahl aller verschiedenen Werthe von ψ, und diese Werthe ψ sind die sämmtlichen Wurzeln der Gleichung $\psi^n=1$; zugleich ist $\mathfrak{K}=\psi_0\mathfrak{P}$, wo $\mathfrak{P}$ eine Periode, d. h. eine Gruppe bedeutet, welche aus den Potenzen eines einzigen Elementes τ besteht. Umgekehrt, wenn $\mathfrak{K}=\mathfrak{H}\mathfrak{P}$ ist, wo $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{P}$ Gruppen bedeuten, deren letztere $\mathfrak{P}$ eine Periode ist, so giebt es, wenn $(\mathfrak{H},\mathfrak{K})=(\mathfrak{H},\mathfrak{P})=n$ gesetzt wird, genau $\varphi(n)$ verschiedene Charaktere ψ der Gruppe $\mathfrak{K}$, welche der Bedingung $\psi_0=\mathfrak{H}$ genügen. — Ist ferner $\mathfrak{A}$ eine in $\mathfrak{K}$ enthaltene Gruppe, so ist die über alle Elemente α von $\mathfrak{A}$ ausgedehnte Summe $\Sigma\psi(\alpha)$ immer und nur dann $=0$, wenn $\mathfrak{A}$ kein Theiler von ψ_0 ist.

Nach dem Satze XIV in § 8 ist nun gewiss $\psi(\mu) = 1$, wenn μ einer rationalen Zahl r congruent ist (mod. k), d. h. wenn μ einer der $\varphi(k)$ Zahlklassen der oben mit $\mathfrak{R}$ bezeichneten Gruppe angehört; mithin ist $\mathfrak{R}$ ein Theiler der Gruppe ψ_0, und für alle $\varphi(k)$ Klassen eines Complexes $\mathfrak{R}\nu$ hat der Charakter ψ denselben Werth $\psi(\nu)$. Dies wollen wir jetzt auf die am Schlusse von § 7 betrachtete Summe

$$6H = \Sigma \frac{\psi(\mu)}{N(\mu)^s}$$

anwenden, wo μ alle relativen Primzahlen zu k durchläuft. Da die Gesammtgruppe $\mathfrak{K}$ aller $\varphi'(k)$ Zahlklassen μ aus $\varphi''(k)$ Complexen von der Form $\mathfrak{R}\nu$ besteht, so wollen wir zur Abkürzung

$$S(\mathfrak{R}\nu) = \Sigma \frac{1}{N(\mu)^s}$$

setzen, wo μ alle Zahlen der in dem Complex $\mathfrak{R}\nu$ enthaltenen $\varphi(k)$ Klassen durchläuft; dann wird offenbar

$$6H = \Sigma \psi(\nu) S(\mathfrak{R}\nu),$$

wo die Summe Σ auf ein System von $\varphi''(k)$ geeignet gewählten Zahlen ν auszudehnen ist, der Art, dass die entsprechenden Complexe $\mathfrak{R}\nu$ alle Zahlklassen der Gruppe $\mathfrak{K}$ erschöpfen. Die weitere Umformung des vorstehenden Ausdrucks bildet den Hauptgegenstand unserer ferneren Untersuchungen.

§ 10.

Die Wurzeln der Ordnung $[1, k\varrho]$.

Betrachtet man einen bestimmten Klassencomplex von der Form $\mathfrak{R}\nu$, so ist die eben definirte entsprechende Summe $S(\mathfrak{R}\nu)$ über alle und nur diejenigen Zahlen μ auszudehnen, welche $\equiv r\nu \pmod{k}$ sind, wo r jede rationale Zahl bedeutet, welche ***relative Primzahl zu k*** ist. Das System aller dieser Zahlen μ bildet einen ***Theil*** des Systems aller derjenigen Zahlen λ, welche $\equiv x\nu \pmod{k}$ sind, wo x ***jede*** ganze rationale Zahl bedeutet; jede solche Zahl λ ist also von der Form $\omega k + x\nu$, wo ω alle Zahlen in $\mathfrak{o}$ (d. h. alle ganzen Zahlen des Körpers Q), und x alle Zahlen des Moduls [1] durchläuft, und umgekehrt ist jede in dieser Form darstellbare Zahl $\lambda \equiv x\nu \pmod{k}$. Das durch k und ν vollständig bestimmte System dieser Zahlen λ, welches wir kurz mit k_ν bezeichnen wollen, ist offenbar ein endlicher ***Modul,*** und wenn man die in der Modultheorie übliche (auch oben in §§ 3, 4, benutzte) Bezeichnung anwendet, so wird

$$k_\nu = [k, k\varrho, \nu] = \mathfrak{o}k + [\nu];$$

wir wollen vorläufig diese Form eines dreigliedrigen Moduls beibehalten und erst später die Zurückführung auf einen zweigliedrigen Modul mit irreducibeler Basis betrachten. Die Theorie dieser Moduln k_ν, welche ich *die Wurzeln der Ordnung* $k_1 = \mathfrak{o}k+[1] = [1, k\varrho]$ genannt habe, ist in *Dirichlets* Vorlesungen über Zahlentheorie ausführlich dargestellt (§ 181. S. 622–627 der dritten, und § 187. S. 651–657 der vierten Auflage), und ich werde mich später auf diese Darstellung berufen; für unseren nächsten Schritt ist aber diese Theorie noch entbehrlich. Offenbar sind zwei solche Moduln k_μ, k_ν stets und nur dann identisch, wenn die beiden Zahlen μ, ν (die immer als relative Primzahlen zu k vorausgesetzt werden) denselben Klassencomplex $\mathfrak{R}\mu = \mathfrak{R}\nu$ erzeugen, und folglich ist die Anzahl $\varphi''(k)$ aller verschiedenen, in $\mathfrak{K}$ enthaltenen Complexe $\mathfrak{R}\nu$ zugleich die Anzahl aller verschiedenen Moduln k_ν. Setzen wir nun zur Abkürzung

$$S(k_\nu) = \Sigma \frac{1}{N(\lambda)^s},$$

wo λ *alle* Zahlen des Moduls k_ν *mit einziger Ausnahme der Zahl Null* und zwar jede solche Zahl nur einmal durchläuft, so enthält diese Summe alle Glieder der in § 9 mit $S(\mathfrak{R}\nu)$ bezeichneten Summe und ausserdem unendlich viele andere Glieder; aber wir wollen beweisen, dass trotzdem

$$6H = \Sigma\psi(\nu)S(\mathfrak{R}\nu) = \Sigma\psi(\nu)S(k_\nu)$$

ist, wo die zweite Summe Σ auf alle $\varphi''(k)$ verschiedenen Moduln k_ν auszudehnen ist.

Um den Gang des Beweises, welcher auf dem Satze XVI in § 8 beruht, nicht zu unterbrechen, schicken wir folgende Betrachtungen über gewisse Theiler der Gruppe $\mathfrak{K}$ voraus. Ist $k = mn$, wo m, n natürliche Zahlen bedeuten, so ist jede relative Primzahl μ zu k von selbst auch relative Primzahl zu m, und wir wollen den Inbegriff aller derjenigen von diesen Zahlen μ, welche $\equiv 1 \pmod{m}$ sind, mit $\mathfrak{N}$ bezeichnen; derselbe besteht offenbar aus einer gewissen Anzahl von Zahlklassen (mod. k), welche eine Gruppe, einen Theiler der Gruppe $\mathfrak{K}$ bilden. Umgekehrt, wenn eine gegebene Zahl ω relative Primzahl zu m ist, so folgt hieraus im Allgemeinen zwar noch nicht, dass ω auch zu k relative Primzahl ist, aber man überzeugt sich leicht*), dass es immer Zahlen giebt, welche $\equiv \omega \pmod{m}$ und zu-

*) Die Congruenz $\omega_1 \equiv \omega \pmod{m}$ ist (nach D. § 180. II. S. 568) vereinbar mit $\omega_1 \equiv 1 \pmod{\varkappa}$, wo $\varkappa$ das Product aller Primzahlen π bedeutet, die in k, aber nicht in m aufgehen.

gleich relative Primzahlen zu k sind, und wenn ω_1 irgend eine bestimmte solche Zahl bedeutet, so wird ihre Gesammtheit durch den in der Gruppe $\mathfrak{K}$ enthaltenen Klassencomplex $\mathfrak{N}\omega_1$ dargestellt; wendet man daher das in § 9 erklärte Gruppensymbol an, so so wird

$$(1, \mathfrak{N}) = \frac{\varphi'(k)}{\varphi'(m)}, \quad (\mathfrak{N}, \mathfrak{K}) = \varphi'(m),$$

weil zu jeder der $\varphi'(m)$ Zahlklassen ω (mod. m) ein und nur ein Complex $\mathfrak{N}\omega_1$ gehört, und weil $(1, \mathfrak{N})\,(\mathfrak{N}, \mathfrak{K}) = (1, \mathfrak{K}) = \varphi'(k)$ ist.*)

Bedeutet nun $\mathfrak{R}$ wie bisher die Gruppe aller derjenigen $\varphi(k)$ Klassen in $\mathfrak{K}$, in welchen sich auch rationale Zahlen r befinden, so leuchtet ein, dass die Gruppe $\mathfrak{R}\mathfrak{R}$ aus lauter solchen Klassen besteht, deren Zahlen nach dem Modul m mit rationalen Zahlen congruent sind; umgekehrt, wenn μ relative Primzahl zu k und zugleich $\equiv z$ (mod. m) ist, wo z rational, so ist z gewiss relative Primzahl zu m, man kann daher eine ebenfalls rationale Zahl r, welche zugleich relative Primzahl zu k ist, so wählen, dass $r \equiv z$ (mod. m), also auch $\mu \equiv r$ (mod. m) wird, und hieraus folgt nach dem Obigen, dass μ in einer Klasse des Complexes $\mathfrak{N}r$, also auch in einer Klasse der Gruppe $\mathfrak{R}\mathfrak{R}$ enthalten ist. Mithin ist diese Gruppe $\mathfrak{R}\mathfrak{R}$ der *Inbegriff* aller derjenigen Klassen in $\mathfrak{K}$, deren Zahlen nach dem Modul m mit rationalen Zahlen congruent sind, und es ist auch leicht, den Grad dieser Gruppe, d. h. die Anzahl $(1, \mathfrak{R}\mathfrak{R})$ der in ihr enthaltenen Klassen zu bestimmen. Da nämlich $\varphi(m)$ die Anzahl derjenigen nach m incongruenten rationalen Zahlen z ist, welche relative Primzahlen zu m sind, und da jeder dieser Zahlen z ein Complex $\mathfrak{N}r$ von $(1, \mathfrak{N})$ Klassen in $\mathfrak{R}\mathfrak{R}$ entspricht, deren Zahlen $\mu \equiv z$ (mod. m) sind, so ist

$$(1, \mathfrak{R}\mathfrak{R}) = \varphi(m)\,(1, \mathfrak{N}) = \varphi(m)\,\frac{\varphi'(k)}{\varphi'(m)} = \frac{\varphi'(k)}{\varphi''(m)}.$$

Da ferner $(1, \mathfrak{R})\,(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}\mathfrak{R}) = (1, \mathfrak{R}\mathfrak{R})$, und $(1, \mathfrak{R}) = \varphi(k)$ ist, so ergiebt sich zugleich

$$(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}\mathfrak{R}) = \frac{\varphi'(k)}{\varphi(k)\varphi''(m)} = \frac{\varphi''(k)}{\varphi''(m)}.$$

Zu denselben Resultaten gelangt man auch, wenn man bedenkt, dass

*) Dieselben Sätze wiederholen sich in der Zahlentheorie jedes endlichen Körpers Ω bei der Vergleichung der Zahlklassen, die sich auf irgend ein Ideal $\mathfrak{k}$ beziehen, mit den Zahlklassen, die sich auf ein in $\mathfrak{k}$ aufgehendes Ideal $\mathfrak{m}$ beziehen. Ist Ω der Körper der rationalen Zahlen, so bilden die entsprechenden Sätze eine wesentliche Grundlage für die gesammte Theorie der Kreistheilung.

$(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}\mathfrak{N}) = (\mathfrak{R}, \mathfrak{N}) = (\mathfrak{D}, \mathfrak{N})$ ist, wo $\mathfrak{D}$ den grössten gemeinsamen Theiler der Gruppen $\mathfrak{R}, \mathfrak{N}$ bedeutet; denn jede in $\mathfrak{D}$ enthaltene Klasse wird durch eine rationale Zahl r repräsentirt, welche relative Primzahl zu k und zugleich $\equiv 1 \pmod{m}$ ist, mithin ist ihre Anzahl

$$(1, \mathfrak{D}) = \frac{\varphi(k)}{\varphi(m)},$$

und da

$$(1, \mathfrak{D})\,(\mathfrak{D}, \mathfrak{N}) = (1, \mathfrak{N}) = \frac{\varphi'(k)}{\varphi'(m)}$$

sein muss, so ergiebt sich für $(\mathfrak{D}, \mathfrak{N})$, also für $(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}\mathfrak{N})$ wieder der obige Ausdruck.

Aus der eben festgestellten Bedeutung der Gruppe $\mathfrak{R}\mathfrak{N}$ ziehen wir endlich noch folgenden Schluss. Ist ω wieder eine gegebene relative Primzahl zu m, und bedeutet ω_1 wie oben eine bestimmte relative Primzahl zu k, welche $\equiv \omega \pmod{m}$ ist, so war $\mathfrak{N}\omega_1$ der Complex aller der Klassen in $\mathfrak{K}$, deren Zahlen ebenfalls $\equiv \omega \pmod{m}$ sind; ebenso leuchtet jetzt ein, dass $\mathfrak{R}\mathfrak{N}\omega_1$ der Complex aller der Klassen in $\mathfrak{K}$ ist, deren Zahlen $\equiv z\omega \pmod{m}$ sind, wo z alle rationalen relativen Primzahlen zu m durchläuft.

Nach diesen Vorbereitungen wenden wir uns zum Beweise des oben ausgesprochenen Satzes über die Umformung der Summe $6H$. Wir heben zunächst die charakteristische Eigenschaft aller in den Moduln k_ν enthaltenen Zahlen λ hervor, welche darin besteht, dass ***der grösste gemeinsame Theiler von k und λ immer eine natürliche Zahl*** ist. Da nämlich $\lambda \equiv x\nu \pmod{k}$, und x rational, ferner ν relative Primzahl zu k ist, so ist der rationale (positiv genommene) grösste gemeinsame Theiler n der beiden rationalen Zahlen k, x auch derjenige von k und $x\nu$, also (nach D. § 180. S. 566) auch derjenige von k und λ; setzt man daher $k = mn$, so wird $\lambda = \omega n$, wo ω ***relative Primzahl zu m*** ist.

Umgekehrt, wenn eine solche Zahl $\lambda = \omega n$ gegeben ist, so suchen wir alle Moduln k_ν, in denen λ enthalten ist. Die erforderliche und hinreichende Bedingung dafür, dass λ in k_ν enthalten sei, besteht in der Existenz einer rationalen Zahl x, welche der Congruenz $x\nu \equiv \lambda = \omega n \pmod{k}$ genügt, und da $k = mn$, und ν relative Primzahl zu k ist, so muss zunächst x durch n theilbar, also $x = ny$ sein; hieraus folgt $y\nu \equiv \omega \pmod{m}$, und weil ω relative Primzahl zu m ist, so gilt dasselbe auch von der rationalen Zahl y; es giebt daher rationale Zahlen z, welche der Congruenz $yz \equiv 1 \pmod{m}$

genügen, und hieraus folgt $\nu \equiv z\omega \pmod{m}$; zufolge der obigen Bemerkung muss daher ν einer Klasse des Complexes $\mathfrak{R}\mathfrak{N}\omega_1$ angehören, wo ω_1 wieder eine relative Primzahl zu k bedeutet, welche $\equiv \omega \pmod{m}$ ist, und umgekehrt leuchtet ein, dass dann die Zahl λ wirklich in dem Modul k_ν enthalten ist, weil aus $\nu \equiv z\omega \pmod{m}$ rückwärts $y\nu \equiv \omega \pmod{m}$, $x\nu \equiv \omega n = \lambda \pmod{k}$ folgt, wo $yz \equiv 1 \pmod{m}$ und $x = ny$ ist. Mithin ist der Complex $\mathfrak{R}\mathfrak{N}\omega_1$ der *Inbegriff* aller derjenigen Zahlklassen ν, welche die Eigenschaft haben, dass die gegebene Zahl $\lambda = \omega n$ in dem Modul k_ν enthalten ist*), und die Anzahl dieser verschiedenen Moduln k_ν, d. h. die Anzahl der in dem Complexe $\mathfrak{R}\mathfrak{N}\omega_1$ enthaltenen verschiedenen Complexe $\mathfrak{R}\nu$, ist $= (\mathfrak{R}, \mathfrak{R}\mathfrak{N}) = \varphi''(k) : \varphi''(m)$. Wir haben nun zwei wesentlich verschiedene Fälle zu betrachten.

Ist die gegebene Zahl λ selbst relative Primzahl zu k, so ist $n = 1$, $m = k$, $\mathfrak{N} = 1$; die Zahl λ tritt daher nur in einem einzigen Modul $k_\nu = k_\lambda$ auf und erzeugt nur ein einziges, mit dem Coefficienten $\psi(\lambda)$ behaftetes Glied $N(\lambda)^{-s}$, und dieses Glied findet sich ebenso in der ersten, wie in der zweiten Summe, deren Identität wir zu beweisen haben.

Ist aber λ *nicht* relative Primzahl zu k, ist also $n > 1$, $m < k$, so liefert λ gar keinen Beitrag zu der ersten Summe; da aber die Zahl λ in $(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}\mathfrak{N})$ verschiedenen Moduln k_ν enthalten ist, so liefert sie zu der zweiten Summe ebensoviele Beiträge $\psi(\nu)N(\lambda)^{-s}$; um daher auch für diesen Fall die Identität der beiden Summen und hiermit unseren Satz zu beweisen, brauchen wir nur noch zu zeigen, dass die über alle diese Moduln k_ν erstreckte Summe $\Sigma\psi(\nu) = 0$ ist. Hierzu berufen wir uns auf den Satz XVI in § 8, den wir nach unserer jetzigen Bezeichnung offenbar so aussprechen können, dass es in der Gruppe $\mathfrak{N}$ eine Zahlklasse μ giebt, für welche $\psi(\mu) = \varrho$, also *nicht* $= 1$ wird. Die Gruppe $\mathfrak{N}$ ist daher *kein Theiler***) der in § 9 definirten Gruppe ψ_0, und folglich ist der grösste gemeinsame Theiler $\mathfrak{E}$ dieser beiden Gruppen ein *echter* Theiler von $\mathfrak{N}$, d. h. $\mathfrak{E}$ ist verschieden von $\mathfrak{N}$, mithin $(\mathfrak{E}, \mathfrak{N}) = (\psi_0, \mathfrak{N}) = (\psi_0, \psi_0\mathfrak{N}) > 1$, und da $(\psi_0, \psi_0\mathfrak{N})\,(\psi_0\mathfrak{N}, \mathfrak{K}) = (\psi_0, \mathfrak{K}) = 3$ sein muss, so folgt $(\mathfrak{E}, \mathfrak{N}) = 3$, (und

---

*) Dasselbe ergiebt sich auch aus dem leicht zu beweisenden Satze $\mathfrak{o}n - k_\nu = nm_\nu$, wo $\mathfrak{o}n - k_\nu$ das kleinste gemeinsame Vielfache der beiden Moduln $\mathfrak{o}n$, k_ν und $m_\nu = \mathfrak{o}m + [\nu] = k_\nu m_1$ ist.

**) Vergl. den Schluss der zweiten Anmerkung zu § 9 auf S. 80, worin das Wesen des obigen Beweises enthalten ist.

$(\psi_0\mathfrak{N}, \mathfrak{K}) = 1$, also $\psi_0\mathfrak{N} = \mathfrak{K}$). Mithin besteht die Gruppe $\mathfrak{N}$ aus den drei verschiedenen Complexen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}\mu$, $\mathfrak{E}\mu^2$, und für die in ihnen enthaltenen Klassen nimmt der Charakter ψ resp. die Werthe 1, ϱ, ϱ^2 an, während $\psi(\mu^3) = \psi(\mu)^3 = 1$, also $\mathfrak{E}\mu^3 = \mathfrak{E}$ ist. Bedenkt man ferner, dass die Gruppe $\mathfrak{N}$ (nach § 9) ein Theiler der Gruppe ψ_0, also die Gruppe $\mathfrak{N}\mathfrak{E}$ ein gemeinsamer Theiler der beiden Gruppen ψ_0, $\mathfrak{N}\mathfrak{N}$ ist*), so ergiebt sich ebenso, dass die Gruppe $\mathfrak{N}\mathfrak{N}$ aus den drei verschiedenen Complexen $\mathfrak{N}\mathfrak{E}$, $\mathfrak{N}\mathfrak{E}\mu$, $\mathfrak{N}\mathfrak{E}\mu^2$, und folglich der Complex $\mathfrak{N}\mathfrak{N}\omega_1$ aus den drei verschiedenen Complexen $\mathfrak{N}\mathfrak{E}\omega_1$, $\mathfrak{N}\mathfrak{E}\mu\omega_1$, $\mathfrak{N}\mathfrak{E}\mu^2\omega_1$ besteht. Zerlegt man nun die Gruppe $\mathfrak{N}\mathfrak{E}$ in lauter verschiedene Complexe von der Form $\mathfrak{N}\varepsilon$ (deren Anzahl offenbar $= \varphi''(k) : 3\varphi''(m)$ ist), so ist hiermit auch der Complex $\mathfrak{N}\mathfrak{N}\omega_1$ in lauter verschiedene Complexe $\mathfrak{N}\nu$ zerlegt, und zwar hat ν alle Klassen $\varepsilon\omega_1$, $\varepsilon\mu\omega_1$, $\varepsilon\mu^2\omega_1$ zu durchlaufen, welche den verschiedenen Klassen ε entsprechen. Hiermit sind zugleich alle Moduln k_ν gefunden, in denen die Zahl λ enthalten ist; vereinigt man nun immer die drei Klassen ν, welche derselben Klasse ε entsprechen, und bedenkt man, dass $\psi(\varepsilon\omega_1) = \psi(\omega_1)$, $\psi(\varepsilon\mu\omega_1) = \varrho\psi(\omega_1)$, $\psi(\varepsilon\mu^2\omega_1) = \varrho^2\psi(\omega_1)$, und folglich die Summe dieser drei Werthe $= 0$ ist, so ergiebt sich, dass auch die über alle Klassen ν erstreckte Summe $\Sigma\psi(\nu) = 0$ ist, und hiermit ist unser obiger Satz vollständig bewiesen. —

§ 11.

Binäre quadratische Formen.

Die sämmtlichen $\varphi''(k)$ verschiedenen Moduln $k_\nu = \mathfrak{o}k + [\nu]$ sind (nach D. § 187. S. 651–657) dadurch vollständig charakterisirt, dass sie die Ordnung $k_1 = [1, k\varrho]$ haben und der Bedingung $\mathfrak{o}k_\nu = \mathfrak{o}$ genügen, und da $k_\mu k_\nu = k_{\mu\nu}$ ist, so bilden sie hinsichtlich ihrer Multiplication eine ***Abelsche Gruppe***. Da ferner unsere Function ψ für alle diejenigen in einem solchen Modul k_ν enthaltenen Zahlen, welche relative Primzahlen zu k sind, den-

*) Offenbar ist $\mathfrak{N}\mathfrak{E}$ der ***grösste*** gemeinsame Theiler von ψ_0, $\mathfrak{N}\mathfrak{N}$, und dieser Satz gilt allgemein für irgend welche Theiler ψ_0, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}$ einer beliebigen *Abel*schen Gruppe $\mathfrak{K}$, wenn $\mathfrak{N}$ Theiler von ψ_0, und $\mathfrak{E}$ der grösste gemeinsame Theiler von ψ_0, $\mathfrak{N}$ ist. Bedient man sich einer kürzlich von mir vorgeschlagenen Ausdrucksweise (§ 4 des Aufsatzes „Ueber Zerlegungen von Zahlen durch ihre grössten gemeinsamen Theiler“ in der Festschrift zur Braunschweiger Naturforscher-Versammlung 1897), so ist diese Eigenschaft so auszusprechen, dass die sämmtlichen Theiler einer beliebigen *Abel*schen Gruppe immer eine Dualgruppe vom Modultypus bilden.

selben Werth besitzt, so kann man sie von den Zahlen oder Zahlklassen ν auf die Moduln k_ν eindeutig übertragen, indem man $\psi(k_\nu) = \psi(\nu)$ setzt; aus der Eigenschaft $\psi(\mu\nu) = \psi(\mu)\psi(\nu)$ folgt dann $\psi(k_\mu k_\nu) = \psi(k_{\mu\nu}) = \psi(\mu\nu) = \psi(k_\mu)\psi(k_\nu)$, mithin ist ψ jetzt auch ein *Charakter* der eben genannten Gruppe aller Moduln k_ν. Zugleich wird

$$6H = \Sigma\psi(k_\nu)S(k_\nu),$$

wo die Summe Σ über alle $\varphi''(k)$ Moduln k_ν auszudehnen ist, und hier ist

$$S(k_\nu) = \Sigma\frac{1}{N(\lambda)^s},$$

wo λ alle Zahlen des Moduls k_ν (mit Ausnahme der Null) zu durchlaufen hat.

Bezeichnet man nun die Moduln k_ν mit $\mathfrak{k}_0, \mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2$, je nachdem $\psi(k_\nu) = \psi(\nu) = 1, \varrho, \varrho^2$ ist, so nimmt der obige Ausdruck die Form

$$6H = \Sigma S(\mathfrak{k}_0) + \varrho\,\Sigma S(\mathfrak{k}_1) + \varrho^2\,\Sigma S(\mathfrak{k}_2)$$

an, wo die erste, zweite, dritte Summe resp. über alle Moduln $\mathfrak{k}_0, \mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2$ auszudehnen ist. Die Moduln $\mathfrak{k}_0$ bilden für sich eine *Gruppe,* welche offenbar der Gruppe ψ_0 in § 9 entspricht, und wenn man wieder $\varphi''(k) = 9k''$ setzt (wie in § 9), so ist ihre Anzahl $= 3k''$, und ebenso gross ist die der Moduln $\mathfrak{k}_1$, wie die der Moduln $\mathfrak{k}_2$.

Da zwischen den in §§ 6, 7 erklärten Functionen J, G, H der Variabeln s die Relation $J = GH$ besteht, und da J und G durchaus *reell* sind, so gilt dasselbe auch für H; hieraus folgt, dass in dem vorstehenden Ausdruck $\Sigma S(\mathfrak{k}_1) = \Sigma S(\mathfrak{k}_2)$, und folglich

$$6H = \Sigma S(\mathfrak{k}_0) - \Sigma S(\mathfrak{k}_1)$$

sein muss. Dasselbe bestätigt sich leicht auf folgende Weise. Ist ν relative Primzahl zu der rationalen Zahl k, so gilt dasselbe von der mit ν conjugirten Zahl ν', und die beiden Moduln $k_\nu = \mathfrak{o}k + [\nu]$, $k_{\nu'} = \mathfrak{o}k + [\nu']$ sind ebenfalls mit einander *conjugirt,* d. h. jede Zahl λ des Moduls k_ν ist conjugirt mit einer Zahl λ' des Moduls $k_{\nu'}$, und umgekehrt. Da nun $N(\lambda) = N(\lambda')$, so ist auch $S(k_\nu) = S(k_{\nu'})$; da ferner $\psi(\nu') = \psi(\nu)^2$ ist (nach § 7. X), so wird, je nachdem k_ν ein Modul $\mathfrak{k}_0, \mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2$ ist, $k_{\nu'}$ ein Modul $\mathfrak{k}_0, \mathfrak{k}_2, \mathfrak{k}_1$ sein*); die Moduln $\mathfrak{k}_2$ sind daher die sämmtlichen mit den Moduln $\mathfrak{k}_1$ conjugirten Moduln, und folglich ist $\Sigma S(\mathfrak{k}_1) = \Sigma S(\mathfrak{k}_2)$, w. z. b. w.

---

*) Dasselbe ergiebt sich auch aus dem Satze $k_\nu k_{\nu'} = k_{\nu\nu'} = k_1$, welcher daraus folgt, dass die Zahl $\nu\nu'$ rational ist, also einer Klasse der Gruppe $\mathfrak{R}$ angehört (vergl. D. S. 645, 653).

Eine zweite Vereinfachung ergiebt sich aus der Betrachtung der *äquivalenten* Moduln k_ν. Die sämmtlichen mit der Ordnung k_1 äquivalenten Moduln k_μ sind (nach D. S. 655) von der Form σk_1, wo σ alle Einheiten ± 1, $\pm\varrho$, $\pm\varrho^2$ durchläuft, und da jeder Modul durch Multiplication mit (-1) in sich selbst übergeht, so sind nur die drei Moduln

$$k_1 = \mathfrak{o}k + [1], \quad \varrho k_1 = \mathfrak{o}k + [\varrho] = k_\varrho, \quad \varrho^2 k_1 = \mathfrak{o}k + [\varrho^2] = k_{\varrho^2}$$

zu betrachten; diese drei äquivalenten Moduln sind aber wirklich von einander ***verschieden, weil*** $k > 1$ ***ist,*** und weil folglich die drei Klassencomplexe $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}\varrho$, $\mathfrak{R}\varrho^2$ verschieden sind. Bezeichnet man mit $\mathfrak{S}$ die Gruppe der durch die sechs Einheiten σ repräsentirten Klassen (welche alle verschieden sind, weil $k > 2$ ist), so haben $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{S}$ die beiden Klassen ± 1 gemein, und die Gruppe $\mathfrak{R}\mathfrak{S}$ besteht aus den drei Complexen $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}\varrho$, $\mathfrak{R}\varrho^2$; zugleich ist $(\mathfrak{R}\mathfrak{S}, \mathfrak{R}) = 3k''$, und man erkennt leicht, dass jedem Complex $\mathfrak{R}\mathfrak{S}\nu$ ein Tripel von drei verschiedenen Moduln

$$k_\nu, \quad k_{\nu\varrho} = \varrho k_\nu, \quad k_{\nu\varrho^2} = \varrho^2 k_\nu$$

entspricht, welche mit einander, aber mit keinem anderen Modul äquivalent sind. Da nun, wenn λ alle Zahlen in k_ν durchläuft, $\varrho\lambda$ alle Zahlen in ϱk_ν, und $\varrho^2\lambda$ alle Zahlen in $\varrho^2 k_\nu$ durchläuft, so folgt $S(k_\nu) = S(k_{\nu\varrho}) = S(k_{\nu\varrho^2})$, weil $N(\lambda) = N(\varrho\lambda) = N(\varrho^2\lambda)$ ist; da ausserdem $\psi(\sigma) = 1$, also $\psi(k_\nu) = \psi(k_{\nu\varrho})$ $= \psi(k_{\nu\varrho^2})$ ist, so gehören je drei solche äquivalente Moduln entweder alle zu den Moduln $\mathfrak{k}_0$, oder alle zu den Moduln $\mathfrak{k}_1$, oder alle zu den Moduln $\mathfrak{k}_2$. Behält man daher von je drei Moduln $k_\nu, k_{\nu\varrho}, k_{\nu\varrho^2}$ immer nur einen bei, so geht unsere obige Gleichung in

$$2H = \Sigma' S(\mathfrak{k}_0) - \Sigma' S(\mathfrak{k}_1)$$

über, wo die Summationen Σ' auf alle ***nicht äquivalenten*** Moduln $\mathfrak{k}_0$, $\mathfrak{k}_1$ auszudehnen sind; jede dieser beiden Summen besteht daher aus k'' Gliedern.

Die Anzahl aller nicht äquivalenten Ordnungswurzeln k_ν ist daher $= 3k''$, und ebenso gross ist (nach D. S. 656) die Anzahl aller derjenigen nicht äquivalenten endlichen Moduln $\mathfrak{m}$ des Körpers Q, deren Ordnung $\mathfrak{m}^0 = k_1 = [1, k\varrho]$ ist. Dies beruht wesentlich darauf, dass alle Ideale (und Idealbrüche) des Körpers Q (d. h. alle Moduln von der Ordnung $\mathfrak{o}$) nur eine einzige Klasse bilden, also äquivalent sind, oder dass, was dasselbe sagt, je zwei Zahlen η, θ des Körpers Q stets (und zwar auf sechs verschiedene Arten) in die Form $\eta = \alpha\delta$, $\theta = \beta\delta$ gesetzt werden können, wo

α, β ganze relative Primzahlen bedeuten*); ist nun $\mathfrak{m}$ irgend ein endlicher Modul von der Ordnung $\mathfrak{m}^0 = k_1$, so enthält er gewiss zwei von einander unabhängige Zahlen und ist folglich (nach D. § 172. VI) ein zweigliedriger Modul $\mathfrak{m} = [\eta, \theta] = \delta[\alpha, \beta] = \delta\mathfrak{f}$; der mit $\mathfrak{m}$ äquivalente Modul $\mathfrak{f} = [\alpha, \beta]$ hat (nach D. § 181. S. 579 oder § 187. S. 655) dieselbe Ordnung $\mathfrak{f}^0 = \mathfrak{m}^0 = k_1$, und da zugleich $\mathfrak{o}\mathfrak{f} = \mathfrak{o}\alpha + \mathfrak{o}\beta = \mathfrak{o}$ ist, so ist $\mathfrak{f}$ eine der Wurzeln k_ν der Ordnung k_1, w. z. b. w.

Um nun die dem Modul k_ν entsprechende Summe $S(k_\nu) = \Sigma N(\lambda)^{-s}$ zu bilden, wo λ alle Zahlen in k_ν (mit Ausnahme der Null) durchläuft, ist es zweckmässig, die dreigliedrige Basis des Moduls

$$k_\nu = \mathfrak{o}k + [\nu] = [k, k\varrho, \nu]$$

durch eine irreducibele, also aus *zwei* Zahlen α, β bestehende Basis zu ersetzen, was bekanntlich auf unendlich viele Arten geschehen kann (D. § 172. S. 517–523). Wir bemerken zuvor, dass k_ν ein Theiler von $\mathfrak{o}k$ ist und, weil ν relative Primzahl zu k ist, aus k Zahlklassen (mod. k) besteht, deren Repräsentanten die Zahlen $0, \nu, 2\nu \ldots (k-1)\nu$ sind; nach der Bezeichnung der Modultheorie ist daher

$$(k_\nu, \mathfrak{o}k) = k,$$

und da $\mathfrak{o}$ ein Theiler von k_ν, also $(\mathfrak{o}, k_\nu)(k_\nu, \mathfrak{o}k) = (\mathfrak{o}, \mathfrak{o}k) = N(k) = k^2$ ist, so folgt auch

$$(\mathfrak{o}, k_\nu) = k.$$

Setzt man nun

$$k_\nu = [\alpha, \beta],$$

so folgt aus $\mathfrak{o}k_\nu = \mathfrak{o}$, dass α, β relative Primzahlen sind, und wenn man

$$\alpha = a_1 + a_2\varrho, \qquad \beta = b_1 + b_2\varrho$$

setzt, wo a_1, a_2, b_1, b_2 ganze rationale Zahlen bedeuten, so ist (nach D. § 172. VII. S. 523) die Determinante $a_1b_2 - b_1a_2 = \pm(\mathfrak{o}, k_\nu) = \pm k$. Da nun der Modul k_ν durch Vertauschung der beiden Basiszahlen α, β nicht geändert wird, so dürfen und wollen wir festsetzen, dass *immer*

$$a_1b_2 - b_1a_2 = +k$$

---

*) Dass α, β hier und im Folgenden eine ganz andere Bedeutung haben, wie in §§ 2–5, kann wohl keine Störung verursachen.

sein soll, und demgemäss soll α die ***erste,*** β die ***zweite Basiszahl*** von k_ν heissen; zufolge dieser Bezeichnung wird gleichzeitig

$$k_\nu = [\alpha, \beta] = [-\alpha, -\beta] = [\beta, -\alpha] = [-\beta, \alpha],$$

und die allgemeinste Darstellung ist

$$k_\nu = [\alpha_1, \beta_1], \qquad \alpha_1 = a\alpha + c\beta, \qquad \beta_1 = b\alpha + d\beta,$$

wo a, b, c, d vier ganze rationale Zahlen bedeuten, die der Bedingung

$$ad - bc = +1$$

genügen*). Führt man die mit α, β conjugirten Zahlen α', β' ein, so ist der mit k_ν conjugirte Modul

$$k_{\nu'} = [\alpha', -\beta'].$$

Benutzt man ferner die bekannte Bezeichnung für die Zusammensetzung der Substitutionen (D. § 55. S. 134), so wird

$$\begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \alpha', & \beta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, & \varrho \\ 1, & \varrho^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1, & b_1 \\ a_2, & b_2 \end{pmatrix},$$

und wenn man die Determinanten nimmt, so drückt sich die obige Unterscheidung zwischen der ersten und zweiten Basiszahl durch die Gleichung

$$\alpha\beta' - \beta\alpha' = k(\varrho^2 - \varrho) = -k(1 + 2\varrho) = -k\sqrt{-3}$$

aus, welche zugleich lehrt, wie aus α, β rückwärts die Zahl k, also auch die Ordnung $k_1 = [1, k\varrho]$ des Moduls $[\alpha, \beta]$ zu bestimmen ist.

Zufolge dieser letzten Bemerkung gilt auch die folgende Umkehrung: wenn zwei relative Primzahlen α, β der vorstehenden Bedingung $\alpha\beta' - \beta\alpha' = k(\varrho^2 - \varrho)$ genügen, so ist der Modul $\mathfrak{k} = [\alpha, \beta]$ gewiss eine Wurzel der Ordnung $k_1 = [1, k\varrho]$. Da nämlich $\alpha\beta' - \beta\alpha'$ nicht verschwindet, so folgt zunächst, dass die Basis α, β irreducibel ist, mithin besitzt $\mathfrak{k}$ (nach D. S. 642) eine Ordnung $\mathfrak{k}^0$ von der Form $[1, m\varrho]$, wo m eine natürliche Zahl ist; da ferner α, β relative Primzahlen sind, so folgt $\mathfrak{o}\mathfrak{k} = \mathfrak{o}$, mithin ist $\mathfrak{k}$ (nach D. S. 651—652) eine Wurzel der Ordnung $\mathfrak{k}^0$, und hieraus folgt nach der obigen Untersuchung, dass $\alpha\beta' - \beta\alpha' = m(\varrho^2 - \varrho)$, also $m = k$, $\mathfrak{k}^0 = [1, k\varrho]$, mithin $\mathfrak{k}$ einer der Moduln k_ν ist, w. z. b. w.

Hat man nun eine bestimmte Basis α, β des Moduls k_ν gewählt, so ist jede in k_ν enthaltene Zahl λ stets und nur auf eine einzige Weise in der Form

$$\lambda = \alpha x + \beta y$$

---

*) Die Zahlen a, b sind natürlich nicht zu verwechseln mit den Invarianten des kubischen Körpers K in §§ 2—9.

darstellbar, wo x als erste und y als zweite Variabele unabhängig von einander alle ganzen rationalen Zahlen durchlaufen; zugleich wird

$$N(\lambda) = \lambda\lambda' = (\alpha x + \beta y)(\alpha' x + \beta' y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2,$$

wo zur Abkürzung

$$A = \alpha\alpha', \qquad B = \alpha\beta' + \beta\alpha', \qquad C = \beta\beta'$$

gesetzt ist, und dem Modul k_ν entspricht die Summe

$$S(k_\nu) = \Sigma \frac{1}{(Ax^2 + Bxy + Cy^2)^s},$$

welche über alle Paare x, y mit Ausnahme des Paares 0, 0 auszudehnen ist.

Offenbar sind A, C positive und, wie auch B, ganze rationale Zahlen, und da α relative Primzahl zu β, also auch α' relative Primzahl zu β' ist, so können A, B, C ***keinen gemeinsamen Theiler*** haben; denn wenn π eine in A und C aufgehende Primzahl des Körpers Q bedeutet, so sind von den vier Zahlen $\alpha, \beta', \alpha', \beta$ entweder nur die beiden ersten oder nur die beiden letzten durch π theilbar, und in beiden Fällen kann π nicht in B aufgehen. Da ferner

$$B^2 - 4AC = (\alpha\beta' - \beta\alpha')^2 = -3k^2 = D$$

ist, so entspricht jeder Basis α, β des Moduls k_ν eine bestimmte ***positive, ursprüngliche, binäre quadratische Form*** $(A, \frac{1}{2}B, C)$, ***deren Discriminante**) die Grundzahl D des kubischen Körpers K ist*** (§ 4). Ersetzt man aber α, β durch die oben angegebene allgemeinste Basis α_1, β_1, und bezeichnet man mit x_1, y_1 die zugehörigen Variabelen, welche wieder alle ganzen rationalen Zahlen durchlaufen, so folgt aus der doppelten Darstellung

$$\lambda = \alpha x + \beta y = \alpha_1 x_1 + \beta_1 y_1,$$

dass die alten und neuen Variabelen durch die Gleichungen

$$x = ax_1 + by_1, \qquad y = cx_1 + dy_1$$

verbunden sind; mithin geht die Form $(A, \frac{1}{2}B, C)$ durch die Substitution $\left(\begin{smallmatrix} a, & b \\ c, & d \end{smallmatrix}\right)$ in diejenige Form über, welche der neuen Basis α_1, β_1 entspricht. Alle diese Formen sind daher eigentlich äquivalent (D. § 56. S. 136) und bilden die sämmtlichen Individuen einer bestimmten *Formenklasse* $\mathfrak{F}_\nu$, welche

*) Vergl. D. § 145. Anmerkung auf S. 388—389.

dem Modul k_ν entspricht. Dieselbe Formenklasse entspricht aber auch den beiden anderen, mit k_ν äquivalenten Moduln

$$k_{\nu\varrho} = \varrho k_\nu = [\alpha\varrho, \beta\varrho], \qquad k_{\nu\varrho^2} = \varrho^2 k_\nu = [\alpha\varrho^2, \beta\varrho^2],$$

weil die Zahlen A, B, C offenbar ungeändert bleiben, wenn α, β resp. durch $\alpha\varrho, \beta\varrho$ oder durch $\alpha\varrho^2, \beta\varrho^2$ ersetzt werden; es ist daher $\mathfrak{F}_\nu = \mathfrak{F}_{\nu\varrho} = \mathfrak{F}_{\nu\varrho^2}$.

Umgekehrt, wenn irgend eine positive ursprüngliche Form $(A, \frac{1}{2}B, C)$ von der Discriminante

$$B^2 - 4AC = D = -3k^2$$

gegeben ist, so fragen wir, ob es eine Basis α, β eines Moduls $k_\nu = [\alpha, \beta]$ giebt, welcher diese Form im obigen Sinne entspricht. Um dies zu untersuchen, betrachten wir die beiden conjugirten, offenbar ganzen Zahlen

$$\Theta = \frac{B + k\sqrt{-3}}{2} = \frac{B+k}{2} + k\varrho, \qquad \Theta' = \frac{B - k\sqrt{-3}}{2} = \frac{B-k}{2} - k\varrho,$$

welche mit A, B, C, k durch die Gleichungen

$$\Theta + \Theta' = B, \qquad \Theta\Theta' = AC, \qquad \Theta' - \Theta = -k(1+2\varrho)$$

verbunden sind. Soll nun die gegebene Form der Basis α, β entsprechen, so ist erforderlich und hinreichend, dass α, β relative Primzahlen sind, welche den obigen Bedingungen $\alpha\beta' - \beta\alpha' = -k(1+2\varrho)$, $\alpha\alpha' = A$, $\alpha\beta' + \beta\alpha' = B$, $\beta\beta' = C$, also den Bedingungen

$$\alpha\alpha' = A, \qquad \beta\alpha' = \Theta, \qquad \alpha\beta' = \Theta', \qquad \beta\beta' = C$$

genügen. Durch die beiden ersten, und ebenso durch die beiden letzten dieser vier Bedingungen ist zunächst das Verhältniss der beiden gesuchten relativen Primzahlen α, β aus den gegebenen Zahlen A, Θ, Θ', C vollständig zu bestimmen in den beiden Formen

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\Theta}{A} = \frac{C}{\Theta'}$$

welche vermöge der Relation $AC = \Theta\Theta'$ mit einander übereinstimmen. Offenbar giebt es immer nur sechs verschiedene solche Paare von relativen Primzahlen α, β; denn die beiden gegebenen Zahlen A, Θ besitzen im Körper Q sechs verschiedene associirte grösste gemeinsame Theiler γ, und jeder von ihnen liefert ein entsprechendes Zahlenpaar

$$\alpha = \frac{A}{\gamma}, \qquad \beta = \frac{\Theta}{\gamma}.$$

Hat man nun eine bestimmte Wahl über γ, also auch über α, β getroffen,

so folgt aus $C\alpha = \Theta'\beta$, dass C durch β, ebenso Θ' durch α theilbar ist; wir haben daher eine Zerlegung von der Form

$$A = \alpha\gamma, \qquad \Theta = \beta\gamma, \qquad \Theta' = \alpha\delta, \qquad C = \beta\delta,$$

wo δ ein durch die Wahl von γ bestimmter, grösster gemeinsamer Theiler von Θ', C ist. Durch den Uebergang zu den conjugirten Zahlen ergiebt sich hieraus die zweite Zerlegung

$$A = \alpha'\gamma', \qquad \Theta = \alpha'\delta', \qquad \Theta' = \beta'\gamma', \qquad C = \beta'\delta',$$

mithin muss α' als gemeinsamer Theiler von A, Θ ein Theiler von γ sein, und wenn man $\gamma = \alpha'\varepsilon$ setzt, so folgt aus $A = \alpha\alpha'\varepsilon$, dass $\varepsilon = \varepsilon'$ eine natürliche Zahl ist, weil dasselbe von $\alpha\alpha'$ und von dem ersten Coefficienten A der positiven Form $(A, \frac{1}{2}B, C)$ gilt; aus der doppelten Darstellung von Θ folgt ferner $\beta\gamma = \beta\alpha'\varepsilon = \alpha'\delta'$, also $\delta' = \beta\varepsilon$, $\delta = \beta'\varepsilon$, und die beiden obigen Zerlegungen fliessen zusammen in die folgende

$$A = \alpha\alpha'\varepsilon, \qquad \Theta = \beta\alpha'\varepsilon, \qquad \Theta' = \alpha\beta'\varepsilon, \qquad C = \beta\beta'\varepsilon.$$

Die natürliche Zahl ε ist daher gemeinsamer Theiler von A, C, Θ, Θ', also auch von $B = \Theta + \Theta'$, und da $(A, \frac{1}{2}B, C)$ eine ursprüngliche Form ist, so folgt $\varepsilon = 1$, also

$$A = \alpha\alpha', \qquad \Theta = \beta\alpha', \qquad \Theta' = \alpha\beta', \qquad C = \beta\beta'.$$

Jedes der auf die obige Weise aus den gegebenen Zahlen A, Θ abgeleiteten sechs Paare von relativen Primzahlen α, β ist daher wirklich eine Basis eines Moduls k_ν, der die gegebene Form $(A, \frac{1}{2}B, C)$ entspricht, und ausser diesen Basen giebt es keine andere. Bezeichnet man eine bestimmte von ihnen mit α, β, so haben sie die gemeinsame Form $\alpha\sigma$, $\beta\sigma$, wo σ alle sechs Einheiten ± 1, $\pm\varrho$, $\pm\varrho^2$ durchläuft, und sie liefern immer drei verschiedene, aber äquivalente Moduln

$$k_\nu = [\alpha, \beta], \qquad k_{\nu\varrho} = [\alpha\varrho, \beta\varrho], \qquad k_{\nu\varrho^2} = [\alpha\varrho^2, \beta\varrho^2].$$

Das hiermit gewonnene Resultat können wir so aussprechen:

Jedem Tripel von äquivalenten Moduln $k_\nu, k_{\nu\varrho}, k_{\nu\varrho^2}$ entspricht eine bestimmte Klasse $\mathfrak{F}_\nu$ von eigentlich äquivalenten quadratischen Formen der Discriminante $D = -3k^2$, und umgekehrt entspricht jede solche Formenklasse immer einem und nur einem solchen Tripel von Moduln. Die gemeinsame Anzahl der Modultripel und Formenklassen ist $= 3k''$.

Jeder Basis α, β des Moduls k_ν entspricht, wie oben bemerkt, eine Basis $\alpha', -\beta'$ des mit k_ν conjugirten Moduls $k_{\nu'}$; ersetzt man aber α, β resp.

durch $\alpha', -\beta'$, so gehen die drei Zahlen A, B, C resp. in $A, -B, C$ über, also entsprechen diesen Basen der Moduln k_ν, $k_{\nu'}$ die beiden ***entgegengesetzten*** Formen $(A, \frac{1}{2}B, C)$ und $(A, -\frac{1}{2}B, C)$; zugleich ist $k_{\nu'\varrho^2}$ mit $k_{\nu'\varrho}$, und ebenso $k_{\nu'\varrho}$ mit $k_{\nu\varrho^2}$ conjugirt, und zwei solchen conjugirten Tripeln entsprechen zwei ***entgegengesetzte Formenklassen*** $\mathfrak{F}_\nu$ und $\mathfrak{F}_{\nu'}$.

Hinsichtlich der Auswahl der Basen α, β und der entsprechenden Formen $(A, \frac{1}{2}B, C)$ erwähnen wir zwei verschiedene Regeln, deren jede sich durch besondere Vorzüge empfiehlt. Die eine besteht darin, dass man (nach D. § 187. S. 652–655) für die erste Basiszahl α eine natürliche Zahl m wählt; setzt man dann die zweite Basiszahl $\beta = t + n\varrho$, so wird immer $mn = k$, und die entsprechende Form hat die Coefficienten

$$A = m^2, \qquad B = m(2t - n), \qquad C = t^2 - tn + n^2;$$

diese Formen bilden einen speciellen Fall derjenigen Formen, welche *Gauss* in den Artikeln 254, 255 der Disquisitiones Arithmeticae betrachtet (vergl. D. §§ 150, 151). Nach der zweiten Regel wählt man die Basis immer so, dass ihr eine sogenannte ***reducirte*** Form $(A, \frac{1}{2}B, C)$ entspricht, in welcher absolut genommen $B \leqq A \leqq C$, und welche aus der ersten Form leicht abzuleiten ist (Art. 171 der Disqu. Arithm. oder D. § 164).

Wir erinnern noch daran, dass (nach D. § 187) der ***Multiplication der Moduln***, welche durch $k_\mu k_\nu = k_{\mu\nu}$ ausgedrückt wird, die ***Composition der Formenklassen*** $\mathfrak{F}_\mu \mathfrak{F}_\nu = \mathfrak{F}_{\mu\nu}$ entspricht, und knüpfen hieran die folgende Betrachtung. Da jeder Formenklasse $\mathfrak{F}_\nu$ ein und nur ein Tripel von Moduln $k_\nu, k_{\nu\varrho}, k_{\nu\varrho^2}$ entspricht, welche denselben Charakter $\psi(\nu)$ haben, so kann man diesen Charakter eindeutig auf die Formenklasse übertragen, indem man $\psi(\mathfrak{F}_\nu) = \psi(k_\nu) = \psi(\nu)$ setzt, und da hieraus $\psi(\mathfrak{F}_\mu \mathfrak{F}_\nu) = \psi(\mathfrak{F}_\mu)\,\psi(\mathfrak{F}_\nu)$ folgt, so ist jetzt ψ ein ***Charakter der Abelschen Gruppe*** $\mathfrak{H}$, welche aus den $3k''$ Formenklassen $\mathfrak{F}$ besteht. Wir haben oben mit $\mathfrak{f}_0$ alle diejenigen Moduln k_ν bezeichnet, deren Charakter $\psi(k_\nu) = 1$ ist; sie bilden eine aus k'' Tripeln bestehende Gruppe, und ebenso bilden die zugehörigen k'' Formenklassen eine ***Gruppe*** $\mathfrak{G}$, welche wieder der Gruppe ψ_0 in § 9 entspricht; zugleich ist $(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}) = 3$, und wenn man mit $\mathfrak{F}_\tau$ eine bestimmt gewählte Formenklasse bezeichnet, deren Charakter $= \varrho$ ist, so besteht die Gesammtgruppe $\mathfrak{H}$ der $3k''$ Formenklassen aus den drei Complexen $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}\mathfrak{F}_\tau = \mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}\mathfrak{F}_\tau^2 = \mathfrak{G}_2$, denen resp. die Charaktere $1, \varrho, \varrho^2$ zukommen. In welcher Beziehung steht nun diese Gruppe $\mathfrak{G}$ zu unserem kubischen Körper K?

Um diese Frage zu beantworten, betrachten wir alle diejenigen in D nicht aufgehenden natürlichen Primzahlen p, welche $\equiv 1 (\text{mod. } 3)$ sind, von welchen also die Grundzahl D quadratischer Rest ist. Im quadratischen Körper Q ist daher $p = \pi\pi'$, wo π, π' zwei conjugirte, wesentlich verschiedene Primzahlen bedeuten, die nicht in $3k$ aufgehen; diese Primzahlen sind resp. in den beiden conjugirten Moduln $k_\pi, k_{\pi'}$ enthalten, und da $p = N(\pi) = N(\pi')$ ist, so ist p ***darstellbar*** durch jede in den beiden entgegengesetzten Formenklassen $\mathfrak{F}_\pi, \mathfrak{F}_{\pi'}$ enthaltene Form $(A, \frac{1}{2}B, C)$. Da umgekehrt (nach D. § 60) jede solche Form, durch welche p darstellbar ist, mit einer Form $(p, \frac{1}{2}r, q)$ äquivalent ist, wo $r^2 = D + 4pq \equiv D (\text{mod. } 4p)$, und da die letztere Form, wie oben gezeigt ist, immer nur drei äquivalenten Moduln $k_\nu = [\alpha, \beta]$ entspricht, wo $\alpha\alpha' = p$, also α mit π oder π' associirt und folglich auch relative Primzahl zu k ist, so muss $k_\nu = k_{\sigma\pi}$ oder $= k_{\sigma\pi'}$ sein, mithin gehört die Form $(p, \frac{1}{2}r, q)$ einer der beiden Formenklassen $\mathfrak{F}_\pi, \mathfrak{F}_{\pi'}$ an, und die natürliche Primzahl p ist daher ***ausschliesslich*** darstellbar durch die Formen dieser beiden Klassen (vergl. D. §§ 86, 87). Nun gehört die Formenklasse $\mathfrak{F}_\pi$ dem Complexe $\mathfrak{G}, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2$, und gleichzeitig gehört die Formenklasse $F_{\pi'}$ dem Complexe $\mathfrak{G}, \mathfrak{G}_2, \mathfrak{G}_1$ an, je nachdem $\psi(\pi) = 1, \varrho, \varrho^2$ ist; nach der Definition der Function ψ in § 7 tritt aber der erste dieser drei Fälle dann und nur dann ein, wenn ab^2 ***kubischer Rest der natürlichen Primzahl*** p ist, wo a, b die Invarianten des kubischen Körpers K bedeuten. Wollen wir diesen Körper K nicht ausdrücklich erwähnen, so besteht das hiermit gewonnene Resultat in dem folgenden

Satz. ***Ist mindestens eine der beiden natürlichen Zahlen*** $a, b > 1$, ***und*** ab ***durch kein Quadrat einer natürlichen Primzahl theilbar, setzt man ferner*** $k = 3ab$ ***oder*** $= ab$, ***je nachdem*** $(a^2 - b^2)$ ***durch*** 9 ***untheilbar oder theilbar ist, so ist die Anzahl aller nicht äquivalenten, positiven, ursprünglichen binären quadratischen Formen*** $(A, \frac{1}{2}B, C)$ ***von der Discriminante*** $B^2 - 4AC = D = -3k^2$ ***immer ein Vielfaches*** $3k''$ ***von*** 3, ***und ein Drittel der durch diese Formen vertretenen Formenklassen bildet eine Compositionsgruppe*** $\mathfrak{G}$, ***welche durch die folgende Eigenschaft charakterisirt ist: Bedeutet*** p ***jede natürliche Primzahl, welche*** $\equiv 1 (\text{mod. } 3)$ ***ist und nicht in*** D ***aufgeht, so sind durch die*** k'' ***Formen der Gruppe*** $\mathfrak{G}$ ***alle und nur solche Primzahlen*** p ***darstellbar, von denen*** ab^2, ***also auch*** a^2b ***kubischer Rest ist, während durch die Formen der übrigen*** $2k''$ ***Klassen alle und nur solche Primzahlen*** p ***darstellbar sind, von denen*** ab^2 ***kubischer Nichtrest ist.***

Wollen wir aber die Bedeutung der quadratischen Formen für den kubischen Körper K hervorheben, so erinnern wir uns daran, dass (nach § 5) die natürliche Primzahl p, je nachdem ab^2 kubischer Rest oder Nichtrest von p ist, im Körper K durch drei verschiedene Primideale ersten Grades theilbar oder selbst eine Primzahl dritten Grades ist, und erhalten den folgenden*)

Satz. *Bedeutet D die Grundzahl eines kubischen Körpers K, so ist die Anzahl der Klassen, in welche die ursprünglichen binären quadratischen Formen von der Discriminante D zerfallen, ein Vielfaches von 3, und ein Drittel dieser Klassen bildet eine durch folgende Eigenschaft charakterisirte Compositionsgruppe $\mathfrak{G}$: Bedeutet p jede, in D nicht aufgehende, natürliche Primzahl, von welcher D quadratischer Rest ist, so wird p im Körper K durch drei verschiedene Primideale theilbar oder selbst eine Primzahl sein, je nachdem p durch eine Form der Gruppe $\mathfrak{G}$ darstellbar ist oder nicht.*

Auf einem der Papiere aus dem Nachlasse von *Gauss*, welche mir — wahrscheinlich im Jahre 1860 — zur Ansicht, aber nicht zur Herausgabe mitgetheilt wurden, befand sich eine Bemerkung über kubische Reste, welche nach meiner Abschrift folgendermassen lautet:

Observatio venustissima inductione facta.

2 *est Residuum vel non residuum cubicum numeri primi p formae* $3n+1$, *prout p repraesentabilis est per formam*

$$xx+27yy$$

vel $4xx+2xy+7yy$.

3 *est Residuum vel non residuum, prout p repraesentabilis est per*

$$xx+243yy \text{ aut } 4xx+2xy+61yy$$

vel $7xx+6xy+36yy$ *aut* $9xx+6xy+28yy$.

5 *est Residuum*		*Nonresiduum*
(1, 0, 675)	*si*	(7, 2, 97)
(25, 0, 27)	*p*	(9, 3, 76)
(13, 1, 52)	*repraesentatur per*	(19, 3, 36)
(4, 1, 169)		(25, 5, 28)
		(25, 10, 31)
		(27, 9, 28)

*) Die Form, in welcher ich diesen Fundamentalsatz hier ausspreche, ist so gewählt, dass sie, wie ich glaube, für *alle* kubischen Körper ohne Ausnahme, selbst für die Kreiskörper gilt; den allgemeinen Beweis dieses Satzes zu finden, ist mir aber bisher nicht gelungen. Dagegen bietet die Zerlegung aller anderen Primzahlen p in Primideale keine erhebliche Schwierigkeit dar.

In diesen Sätzen muss man ohne Zweifel die frühesten Entdeckungen erblicken, die ***Gauss*** auf dem Gebiete der kubischen (und biquadratischen) Reste gemacht hat, und durch welche er bald darauf zu der Erweiterung des Begriffes der ganzen Zahl geführt ist (vergl. § 7).

Noch bevor dieses merkwürdige Fragment mir bekannt geworden war, hatte ich den *ersten* dieser drei Sätze bei dem Versuche gefunden, die Methode, durch welche ***Gauss*** den biquadratischen Charakter der Zahl 2 bestimmt (Theoria residuorum biquadraticorum I. Art. 15—23), auf die Theorie der kubischen Reste zu übertragen. Der Beweis, den ich am 7. Januar 1858 in einer algebraischen Vorlesung zu Göttingen vorgetragen habe, ergiebt sich in der That sehr einfach aus Art. 358 der Disquisitiones Arithmeticae; behält man nämlich die dortige Bezeichnung bei, bedeutet also n eine natürliche Primzahl, welche $\equiv 1 \pmod 3$ ist, so zeigt ***Gauss***, dass immer

$$4n = MM + 27NN$$

und gleichzeitig, wenn $M \equiv 1 \pmod 3$ gewählt wird,

$$9a = n + 1 + M$$

ist, wo $a - 1 = (\mathfrak{K}\mathfrak{K})$ die Anzahl derjenigen incongruenten kubischen Reste z von n bedeutet, welche die Eigenschaft besitzen, dass auch $(z+1)$ kubischer Rest von n ist. Setzt man nun $z+1 \equiv z_1 \pmod n$ und bedenkt, dass die Zahl (-1) immer kubischer Rest von n ist, so folgt aus $-z_1+1 \equiv -z \pmod n$, dass die Zahl $(-z_1)$ dieselbe Eigenschaft wie z besitzt. Man kann daher alle diese $(a-1)$ Zahlklassen z in eine Reihe von Paaren z und $(-z-1)$ ordnen, und folglich wird $a-1$ eine gerade Zahl sein, wenn nicht etwa der Fall vorkommt, dass die beiden Zahlen derselben Klasse angehören, also $2z \equiv -1 \pmod n$ ist; dies geschieht immer und nur dann, wenn die Zahl 2 selbst ein kubischer Rest von n ist, und da es in diesem Falle auch nur für eine einzige Klasse z geschieht, so ergiebt sich, dass a gerade oder ungerade ist, je nachdem die Zahl 2 kubischer Rest oder Nichtrest von n ist*). Da ferner immer $a \equiv M \equiv N \pmod 2$ ist, so folgt, dass die Prim-

*) Aus der Bedeutung der ***Gauss***schen Zahlen $b = (\mathfrak{K}\mathfrak{K}')$, $c = (\mathfrak{K}\mathfrak{K}'')$, welche nicht beide ungerade sein können, ergiebt sich allgemeiner, dass die Zahl 2 dem Complex $\mathfrak{K}$ oder $\mathfrak{K}'$ oder $\mathfrak{K}''$ angehört, je nachdem $a \equiv b \equiv c \equiv 0$ oder $a+1 \equiv b+1 \equiv c \equiv 0$ oder $a+1 \equiv b \equiv c+1 \equiv 0 \pmod 2$ ist.

zahl n im ersten Falle und nur in diesem durch die Hauptform $(1, 0, 27) = xx+27yy$ darstellbar ist; wenn aber 2 kubischer Nichtrest von n ist, so muss n durch die beiden anderen reducirten Formen $(4, \pm 1, 7) = 4xx \pm 2xy + 7yy$ der Determinante -27 oder der Discriminante -108 darstellbar sein. Hiermit ist der obige Satz vollständig bewiesen, und man überzeugt sich leicht, dass er mit unserer allgemeinen Theorie übereinstimmt, weil die Invarianten des durch die Zahl $\sqrt[3]{2}$ erzeugten kubischen Körpers K_1 die Zahlen 2 und 1 sind, woraus $k = 6$, $k'' = 1$ folgt.

Unterhalb 100 giebt es nur zwei Primzahlen n oder p, von denen die Zahl 2 kubischer Rest ist, nämlich

$$31 = 2^2+27\cdot 1^2, \qquad 43 = 4^2+27\cdot 1^2,$$

und wenn t eine willkürliche Zahl bedeutet, so ist

$$t^3-2 \equiv (t-4)(t-7)(t+11) \pmod{31},$$
$$t^3-2 \equiv (t+9)(t+11)(t-20) \pmod{43},$$

wie man leicht mit Hülfe des Canon Arithmeticus von *Jacobi* findet.

Gehen wir jetzt zu den beiden anderen Sätzen über, um sie ebenfalls mit unserer Theorie zu vergleichen, so ist es auch hier zweckmässig, zu jeder der von *Gauss* angegebenen reducirten Formen, falls sie nicht eine zweiseitige (eine forma anceps) ist, die entgegengesetzte Form hinzuzufügen. In dem *zweiten* Satze, der von dem kubischen Charakter der Zahl 3 handelt, ist das Formensystem der *Determinante* -243 ausserdem noch durch die beiden oben fehlenden Formen $(13, \pm 2, 19)$ zu ergänzen, und wir wollen (wie im folgenden § 12) zur Abkürzung

$$(1, \ 0, 243) = (00), \quad (7, -3, 36) = (10), \quad (7, \ 3, 36) = (20),$$
$$(4, \ 1, \ 61) = (01), \quad (9, \ 3, 28) = (11), \quad (13, -2, 19) = (21),$$
$$(4, -1, \ 61) = (02), \quad (13, \ 2, 19) = (12), \quad (9, -3, 28) = (22)$$

setzen. Die Bedeutung dieser Bezeichnung ist folgende. Jede Form $(y\,z)$, wo die beiden Zahlen y, z durch beliebige nach dem Modul 3 congruente Zahlen ersetzt werden dürfen, soll auch als Zeichen für die durch sie repräsentirte Formenklasse angesehen werden; dann ist die aus den Klassen $(y_1 z_1)$ und $(y_2 z_2)$ zusammengesetzte Klasse

$$(y_1 z_1)(y_2 z_2) = (y\,z), \quad \text{wo } y \equiv y_1+y_2, \quad z \equiv z_1+z_2 \pmod{3},$$

also auch

$$(y\,z) = (10)^y(01)^z, \qquad (10)^3 = (01)^3 = (00),$$

und der Satz von *Gauss* besteht darin, dass die Zahl 3 kubischer Rest oder Nichtrest der natürlichen Primzahl p ist, je nachdem p durch eine der drei Formen (00), (01), (02) darstellbar ist oder nicht. Die kleinsten durch die Formen (00), (01) darstellbaren Primzahlen sind

$$307 = 8^2+243.1^2, \qquad 61 = 4.0^2+2.0.1+61.1^2,$$

und es ist

$$t^3-3 \equiv (t+79)(t+113)(t+115) \pmod{307}$$
$$t^3-3 \equiv (t-4)(t-5)(t+9) \pmod{61}.$$

Vergleichen wir nun diesen zweiten Satz von *Gauss* mit unserer Theorie, so ergiebt sich Folgendes. Die Invarianten des durch die Zahl $\sqrt[3]{3}$ erzeugten Körpers K_2 sind die Zahlen 3, 1, und da folglich $k = 9$, $k'' = 1$ ist, so müssen schon die drei reducirten Formen

$$(1, \tfrac{1}{2}, 61), \qquad (7, \pm\tfrac{3}{2}, 9)$$

der *Discriminante* -243 die Entscheidung über den kubischen Charakter der Zahl 3 geben; die oben mit $\mathfrak{G}$ bezeichnete Gruppe besteht allein aus der Hauptklasse $(1, \frac{1}{2}, 61)$, und die Zahl 3 ist daher kubischer Rest von allen und nur von denjenigen Primzahlen p, welche durch diese Form darstellbar sind. In der That ist wieder

$$307 = 7^2+7.2+61.2^2, \qquad 61 = 0^2+0.1+61.1^2$$

und man erkennt leicht, dass der Satz von *Gauss* vollständig mit dem unsrigen übereinstimmt. Dies beruht auf den allgemeinen Sätzen über den Zusammenhang zwischen den Formen verschiedener *Ordnung;* jede Gruppe $\mathfrak{G}$ innerhalb der Gesammtgruppe $\mathfrak{H}$ aller Formen der Discriminante D liefert eine entsprechende Gruppe $\mathfrak{G}'$ innerhalb der Gesammtgruppe $\mathfrak{H}'$ aller Formen, deren Discriminante D' irgend ein quadratisches Vielfaches De^2 von D ist, und zwar bleibt die Anzahl $(\mathfrak{G}', \mathfrak{H}')$ invariant $= (\mathfrak{G}, \mathfrak{H})$, weil jede Formenklasse der Discriminante D sich in gleich viele Formenklassen der Discriminante D' zertheilt*). Jede solche, aus einer Gruppe $\mathfrak{G}$ *abgeleitete* Gruppe $\mathfrak{G}'$ ist daran kenntlich, dass sie die Gruppe aller derjenigen Formenklassen der Discriminante D' in sich enthält, welche durch Composition mit der Hauptklasse der Discriminante D diese selbe Hauptklasse erzeugen. In unserem Falle ist $e = 2$, $D = -3(9)^2$, $D' = -3(18)^2$, und je drei Formenklassen $(y\ z)$

*) Vergl. D. §§ 150, 151, 187 und die obige Anmerkung zu § 10 auf S. 83.

der letzteren Discriminante liefern durch Composition mit der Klasse $(1, \frac{1}{2}, 61)$ eine Klasse der Discriminante D, was in leicht verständlicher Weise durch

$$\begin{aligned} &|(00), (01), (02)|(1, \tfrac{1}{2}, 61) = (1, \tfrac{1}{2}, 61) \\ &|(10), (11), (12)|(1, \tfrac{1}{2}, 61) = (7, -\tfrac{3}{2}, 9) \\ &|(20), (21), (22)|(1, \tfrac{1}{2}, 61) = (7, \tfrac{3}{2}, 9) \end{aligned}$$

oder durch

$$(yz)(1, \tfrac{1}{2}, 61) = (7, -\tfrac{3}{2}, 9)^y$$

bezeichnet werden kann.

Aus demselben Grunde könnte man in umgekehrter Weise den *ersten* Satz von *Gauss* so umformen, dass zur Entscheidung über den kubischen Charakter der Zahl 2 die Formen der Discriminante $D = -3(6)^2$ durch je drei Formen der Discriminante $D' = -3(18)^2$ ersetzt werden; in der That ist

$$\begin{aligned} &|(00), (11), (22)|(1, 0, 27) = (1, 0, 27) \\ &|(01), (12), (20)|(1, 0, 27) = (4, -1, 7) \\ &|(02), (10), (21)|(1, 0, 27) = (4, 1, 7) \end{aligned}$$

oder

$$(yz)(1, 0, 27) = (4, -1, 7)^{2y+z},$$

und die Zahl 2 ist kubischer Rest oder Nichtrest einer Primzahl p, je nachdem letztere darstellbar oder nicht darstellbar durch eine der drei Formen (00), (11), (22) ist; so z. B. werden die beiden oben genannten Primzahlen 31 und 43, von denen 2 kubischer Rest ist, durch die Form $(11) = (9, 3, 28)$ dargestellt:

$$31 = 9.1^2+6.1.(-1)+28.(-1)^2, \qquad 43 = 9.1^2+6.1.1+28.1^2.$$

Ganz ähnlich verhält es sich mit dem *dritten* Satz von *Gauss*, wo zur Entscheidung über die Zahl 5 die 18 Formen der Discriminante $D' = -3(30)^2$ benutzt werden, während nach unserer Theorie schon die 6 Formen der Discriminante $D = -3(15)^2$ hierzu ausreichen. Um die Composition der ersteren 18 Formen mit einander übersichtlich darzustellen (wie bei dem zweiten Satze), wollen wir sie gemeinsam durch (yz) bezeichnen, wo z wieder nach dem Modul 3, aber y jetzt nach dem Modul 6 zu nehmen ist; setzen wir

$$(10) = (7, 2, 97), \qquad (01) = (4, 1, 169), \qquad (yz) = (10)^y(01)^z,$$

so wird

$$(60) = (03) = (00),$$

ferner

$$\begin{array}{lll}
(00) = (1,\ 0,\ 675), & (01) = (4,\ 1,\ 169), & (02) = (4,\ -1,\ 169)\\
(10) = (7,\ 2,\ 97), & (11) = (27,-9,\ 28), & (12) = (25,\ 5,\ 28)\\
(20) = (19,\ 3,\ 36), & (21) = (25,\ 10,\ 31), & (22) = (9,\ -3,\ 76)\\
(30) = (25,\ 0,\ 27), & (31) = (13,\ 1,\ 52), & (32) = (13,\ -1,\ 52)\\
(40) = (19,-3,\ 36), & (41) = (9,\ 3,\ 76), & (42) = (25,-10,\ 31)\\
(50) = (7,-2,\ 97), & (51) = (25,-5,\ 28), & (52) = (27,\ 9,\ 28)
\end{array}$$

und die Composition dieser Formenklassen mit der Hauptklasse $(1, \frac{1}{2}, 169)$ kann durch

$$\begin{array}{l}
\{(00),\ (01),\ (02)\}(1,\ \frac{1}{2},\ 169) = (1,\ \frac{1}{2},\ 169)\\
\{(10),\ (11),\ (12)\}(1,\ \frac{1}{2},\ 169) = (7,-\frac{5}{2},\ 25)\\
\{(20),\ (21),\ (22)\}(1,\ \frac{1}{2},\ 169) = (9,-\frac{3}{2},\ 19)\\
\{(30),\ (31),\ (32)\}(1,\ \frac{1}{2},\ 169) = (13,\ \frac{1}{2},\ 13)\\
\{(40),\ (41),\ (42)\}(1,\ \frac{1}{2},\ 169) = (9,\ \frac{3}{2},\ 19)\\
\{(50),\ (51),\ (52)\}(1,\ \frac{1}{2},\ 169) = (7,\ \frac{5}{2},\ 25)
\end{array}$$

oder kurz durch

$$(yz)(1,\ \tfrac{1}{2},\ 169) = (7,\ -\tfrac{5}{2},\ 25)^y$$

dargestellt werden. Die Zahl 5 ist dann und nur dann kubischer Rest der Primzahl p, wenn p durch eine der beiden zweiseitigen Formen

$$(1,\ \tfrac{1}{2},\ 169), \qquad (13,\ \tfrac{1}{2},\ 13)$$

darstellbar ist; offenbar ist 13 die kleinste solche Primzahl, und sie ist darstellbar durch die Formen (31), (32); zugleich ist

$$t^3 - 5 \equiv (t+2)(t+5)(t+6) \pmod{13}.$$

Die 18 Formen (yz) der Discriminante $D' = -3(30)^2$ geben, weil je sechs von ihnen aus einer Form der Discriminante $D = -3(6)^2$ entstehen, auch wieder die Entscheidung über den kubischen Charakter der Zahl 2; aus

$$(10)(1,\ 0,\ 27) = (01)(1,\ 0,\ 27) = (4,\ 1,\ 7)$$

folgt

$$(yz)(1,\ 0,\ 27) = (4,\ 1,\ 7)^{y+z},$$

mithin entspricht der Hauptklasse (1, 0, 27) die Gruppe der sechs Klassen (00), (12), (21), (30), (42), (51), welche die Potenzen der Klasse (12) oder (51) sind, und die Zahl 2 ist dann und nur dann kubischer Rest der Primzahl p, wenn p durch eine Form dieser Gruppe darstellbar ist; so z. B. wird die oben angeführte Primzahl 43 durch die beiden Formen (12),

(51), und ebenso die Primzahl 31 durch die beiden Formen (21), (42) dargestellt. —

Wir haben an den drei Sätzen von *Gauss* soeben gezeigt, wie der kubische Charakter einer Zahl ab^2, der nach unserer Theorie von den Formen der Discriminante $D = -3k^2$ abhängt, auch durch die Formen jeder Discriminante $D' = De^2 = -3(ke)^2$ bestimmt werden kann, welche ein quadratisches Vielfaches von D ist. Aus der Definition der Function ψ in § 7 und aus dem Satze XVI in § 8 folgt aber auch, wie der Leser leicht finden wird, dass die Grundzahl D des kubischen Körpers K wirklich die absolut *kleinste* Discriminante ist, deren Formen die fragliche Entscheidung geben, und hierin liegt eine wesentliche Vervollständigung des oben in doppelter Form ausgesprochenen allgemeinen Satzes. Noch wichtiger ist aber der Umstand, dass die in § 10 bewiesene Umformung der Function H *nicht* mehr gelten würde, wenn man statt der Moduln k_ν, denen die Formenklassen $\mathfrak{F}_\nu$ von der Discriminante D entsprechen, solche Moduln $(ke)_\nu$ einführen wollte, denen Formen von absolut grösserer Discriminante $D' = De^2$ entsprechen; auch dies beruht auf dem Satze XVI in § 8, doch wollen wir uns hier begnügen, die Thatsache an den folgenden Beispielen nachzuweisen.

§ 12.

Beispiele.

Wir haben schon am Schlusse von § 4 hervorgehoben, dass ein (reeller) reiner kubischer Körper K durch seine Grundzahl $D = -3k^2$ im Allgemeinen noch nicht vollständig bestimmt ist, dass es also verschiedene Körper K geben kann, welche demselben Werthe der natürlichen Zahl k entsprechen. Zu allen diesen Körpern K gehört dann auch dasselbe System von Moduln k_ν des quadratischen Körpers Q (in § 10) und dasselbe System $\mathfrak{H}$ von binären Formen (in § 11); aber diese Körper K werden sich immer von einander unterscheiden durch die zugehörige Function ψ (in § 7) und folglich durch die Gruppe $\mathfrak{G}$ (in § 11), welche aus einem Drittel der Gruppe $\mathfrak{H}$ besteht. Zufolge der Tabelle in § 2 tritt dieser Fall zuerst für den Werth $k = 18$ ein, welchem die beiden durch die Zahlen $\sqrt[3]{6}$ und $\sqrt[3]{12}$ erzeugten Körper K_4 und K_5 entsprechen, und da die Zahl 18 durch die beiden ersten in der Tabelle auftretenden Werthe 6 und 9 von k theilbar ist, so wird die Untersuchung des Falles $k = 18$ zugleich die Theorie der durch die Zahlen $\sqrt[3]{2}$ und $\sqrt[3]{3}$ erzeugten Körper K_1 und K_2 umfassen, mit

welchen wir uns eben schon in § 11 beschäftigt haben; die Durchführung dieses Beispiels wird daher besonders lehrreich sein.

Zunächst kommt es nach § 9 darauf an, im quadratischen Körper Q alle ganzen Zahlen μ übersichtlich darzustellen, welche relative Primzahlen zum Modul $k = 18$ sind; da 2 und 3 die einzigen in 18 aufgehenden natürlichen Primzahlen sind, so erhalten wir

$$\varphi(k) = \varphi(18) = 18(1-\tfrac{1}{2})(1-\tfrac{1}{3}) = 6,$$
$$\varphi''(k) = 9k'' = \varphi''(18) = 18(1-\tfrac{-1}{2})(1-\tfrac{0}{3}) = 27,$$

also $k'' = 3$, und die Anzahl der incongruenten Zahlen μ ist

$$\varphi'(k) = \varphi(k)\varphi''(k) = \varphi'(18) = 162 = 2 \cdot 3^4.$$

Die Gruppe $\mathfrak{R}$ dieser Zahlklassen μ lässt sich durch

$$\mu \equiv 5^w \varrho^x (4-3\varrho)^y (1+9\varrho)^z \pmod{18}$$

darstellen, wo der Exponent w nach dem Modul 6, die Exponenten x, y, z aber nach dem Modul 3 zu nehmen sind, weil

$$5^6 \equiv \varrho^3 \equiv (4-3\varrho)^3 \equiv (1+9\varrho)^3 \equiv 1 \pmod{18}$$

ist. Dass diese Darstellung vollständig und wesentlich nur auf eine einzige Weise möglich ist, erkennt man leicht daraus, dass sie aus den beiden folgenden Darstellungen

$$\mu \equiv (-1)^w \varrho^x \cdot 4^w (4-3\varrho)^y \pmod{9},$$
$$\mu \equiv \varrho^{x+y+2z} \pmod{2}$$

zusammengesetzt ist; die erstere stimmt mit der in § 8. S. 70 angegebenen überein und dient dazu, um aus der gegebenen Zahl μ die Exponenten w (mod. 6), x(mod. 3) und y(mod. 3) zu bestimmen, während aus der letzteren Darstellung sich die Zahl z(mod. 3) ergiebt; zugleich folgt aus § 8. S. 70 die Bestimmung

$$\left(\frac{3}{\mu}\right) = \varrho^{2y}.$$

Setzen wir ferner

$$\sigma = \varrho^{2x},$$

so genügt diese Einheit der Bedingung $\sigma\mu \equiv \pm 1 \pmod{3}$, und zugleich wird

$$\sigma\mu \equiv \varrho^{y+2z} \pmod{2};$$

da nun die Zahl 2 auch im Körper Q eine Primzahl, und $N(2) = 4 = 3 \cdot 1 + 1$ ist, so folgt aus der Definition das kubischen Charakters in § 7 auch

$$\left(\frac{\sigma\mu}{2}\right) = \varrho^{y+2z}.$$

Endlich bemerken wir, dass aus der obigen Darstellung der Zahlen μ (mod. 18) auch die Darstellung

$$\mu' \equiv 5^w \varrho^{2x}(4-3\varrho)^{2y}(1+9\varrho)^{2z} \qquad (\text{mod. } 18)$$

der conjugirten Zahlen μ' folgt, weil $4-3\varrho^2 \equiv (4-3\varrho)^2$, und $1+9\varrho^2 \equiv (1+9\varrho)^2 (\text{mod. } 18)$ ist.

Gehen wir nun dazu über, nach den Regeln in §§ 10, 11 die 27 Moduln k_μ zu bestimmen, so ist zunächst zu bemerken, dass die Gruppe $\mathfrak{R}$ derjenigen Klassen, welche auch rationale Zahlen enthalten, aus den 6 Klassen

$$5^w \equiv 1, 5, 7, 17, 13, 11 \qquad (\text{mod. } 18),$$

und die Gruppe $\mathfrak{RS}$ (in § 11. S. 88) aus den 18 Klassen $5^w\varrho^x$ besteht. Wir werden daher alle Moduln k_μ und jeden nur einmal erhalten, wenn wir in der obigen Darstellung immer $w = 0$ setzen, während jede der Zahlen x, y, z ihre drei Werthe durchlaufen muss. Da ferner diese 27 Moduln in 9 Tripel von der Form $k_\mu, k_{\mu\varrho}, k_{\mu\varrho^2}$ zerfallen, welche je einem Complex $\mathfrak{RS}\mu$ entsprechen, und da für unseren Zweck von je drei solchen äquivalenten Moduln nur einer erforderlich ist, so dürfen wir auch $x = 0$ setzen und erhalten die folgende, sogleich zu erläuternde Tabelle:

y	z	μ	$(18)_\mu$	9_μ	6_μ	ψ_1	ψ_2	ψ_4	ψ_5
0	0	1	$1,18\varrho$	$1,9\varrho$	$1,6\varrho$	1	1	1	1
1	0	$4+15\varrho$	$6,2+3\varrho$	$3,2+3\varrho$	$2,3\varrho$	ϱ	ϱ^2	1	ϱ
2	0	$7+3\varrho$	$6,1+3\varrho$	$3,1+3\varrho$	$2,1+3\varrho$	ϱ^2	ϱ	1	ϱ^2
0	1	$1+9\varrho$	$2,1+9\varrho$	$1,9\varrho$	$2,1+3\varrho$	ϱ^2	1	ϱ^2	ϱ
1	1	$13+6\varrho$	$3,1+6\varrho$	$3,2+3\varrho$	$1,6\varrho$	1	ϱ^2	ϱ^2	ϱ^2
2	1	$16+3\varrho$	$6,4+3\varrho$	$3,1+3\varrho$	$2,3\varrho$	ϱ	ϱ	ϱ^2	1
0	2	$10+9\varrho$	$2,9\varrho$	$1,9\varrho$	$2,3\varrho$	ϱ	1	ϱ	ϱ^2
1	2	$13+15\varrho$	$6,5+3\varrho$	$3,2+3\varrho$	$2,1+3\varrho$	ϱ^2	ϱ^2	ϱ	1
2	2	$7+12\varrho$	$3,2+6\varrho$	$3,1+3\varrho$	$1,6\varrho$	1	ϱ	ϱ	ϱ

Die Zahlen y, z der beiden ersten Spalten bestimmen in Verbindung mit $w = x = 0$ die Zahlenklasse $\mu (\text{mod. } 18)$ der dritten Spalte, und in der folgenden Spalte ist für den zugehörigen Modul $(18)_\mu = [18, 18\varrho, \mu]$ eine zweigliedrige Basis angegeben, deren erstes Glied eine natürliche Zahl ist; diese Basis ist nach bekannten Regeln (D. § 172. S. 519—520) immer

leicht zu finden. Die 9 Moduln $(18)_\mu$ bilden eine Gruppe, und das Gesetz ihrer Multiplication ergiebt sich aus ihrer Darstellung

$$(18)_\mu = [6, 2+3\varrho]^y[2, 1+9\varrho]^z.$$

Die binären quadratischen Formen $(A, \frac{1}{2}B, C)$ von der Discriminante $-3(18)^2$, welche den hier angegebenen Modulbäsen entsprechen (§ 11), sind nicht reducirt, aber es hat (nach D. § 64) keine Schwierigkeit, die ihnen äquivalenten reducirten Formen herzustellen, und diese letzteren sind mit denjenigen identisch, welche wir in § 11 bei der Besprechung des *zweiten* Satzes von *Gauss* mit (yz) bezeichnet haben. In der fünften und sechsten Spalte findet man zweigliedrige Basen für die durch die Zahl μ bestimmten Moduln

$$9_\mu = [9, 9\varrho, \mu] = (18)_\mu[1, 9\varrho] = (18)_\mu 9_1,$$
$$6_\mu = [6, 6\varrho, \mu] = (18)_\mu[1, 6\varrho] = (18)_\mu 6_1,$$

und die ihnen entsprechenden Formenklassen von den Discriminanten $-3\cdot 9^2$ und $-3\cdot 6^2$ ergeben sich durch Composition der Formen (yz) mit den Formen $(1, \frac{1}{2}, 61)$ und $(1, 0, 27)$, wie ebenfalls schon in § 11 besprochen ist.

Die vier letzten Spalten enthalten endlich die Werthe der Charaktere $\psi(\mu)$ für die durch $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[3]{6}$, $\sqrt[3]{12}$ erzeugten reinen kubischen Körper K_1, K_2, K_4, K_5, welche den Zeilen 1, 2, 4, 5 der Tabelle in § 2 entsprechen. Da alle vier Körper von erster Art sind, so ist die Formel XI in § 8 (S. 72) anzuwenden, also

$$\psi(\mu) = \left(\tfrac{3}{\mu}\right)^{u+2v}\left(\frac{\sigma\mu}{a_1 b_1^2}\right),$$

wo die Einheit σ der Bedingung $\sigma\mu \equiv \pm 1 (\mathrm{mod.}\ 3)$ genügen muss, und wo die Zahlen u, v, a_1, b_1 aus den Invarianten a, b des Körpers K so zu bestimmen sind, dass

$$a = 3^u \cdot a_1, \qquad b = 3^v \cdot b_1,$$

und a_1, b_1 nicht durch 3 theilbar werden. Die Einheit σ ist oben schon für jede Zahl μ bestimmt, und zugleich ist

$$\left(\frac{3}{\mu}\right) = \varrho^{2y}, \qquad \left(\frac{\sigma\mu}{2}\right) = \varrho^{y+2z};$$

hieraus ergeben sich für unsere vier Körper die folgenden Bestimmungen:

Körper K_1; $k = 6$; $k'' = 1$.

$a = 2, b = 1$; $u = 0, v = 0$; $a_1 = 2, b_1 = 1$,

$$\psi_1(\mu) = \left(\frac{\sigma\mu}{2}\right) = \varrho^{y+2z}.$$

Körper K_2; $k = 9$; $k'' = 1$.

$a = 3, b = 1$; $u = 1, v = 0$; $a_1 = 1, b_1 = 1$;

$$\psi_2(\mu) = \left(\frac{3}{\mu}\right) = \varrho^{2y}.$$

Körper K_4; $k = 18$; $k'' = 3$.

$a = 6, b = 1$; $u = 1, v = 0$; $a_1 = 2, b_1 = 1$;

$$\psi_4(\mu) = \left(\frac{3}{\mu}\right)\left(\frac{\sigma\mu}{2}\right) = \varrho^{2z}.$$

Körper K_5; $k = 18$; $k'' = 3$.

$a = 3, b = 2$; $u = 1, v = 0$; $a_1 = 1, b_1 = 2$;

$$\psi_5(\mu) = \left(\frac{3}{\mu}\right)\left(\frac{\sigma\mu}{4}\right) = \left(\frac{3}{\mu}\right)\left(\frac{\sigma\mu}{2}\right)^2 = \varrho^{y+z}.$$

Nachdem hiermit die vier letzten Spalten unserer Tabelle ausgefüllt sind, ergeben sich aus diesen Werthen von ψ die (nicht äquivalenten) Moduln $\mathfrak{k}_0, \mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2$, für welche $\psi(\mathfrak{k}_0) = 1$, $\psi(\mathfrak{k}_1) = \varrho$, $\psi(\mathfrak{k}_2) = \varrho^2$, und deren gemeinsame Anzahl $= k''$ ist:

Körper K_1.

$$\mathfrak{k}_0 = [1, 6\varrho],\ \mathfrak{k}_1 = [2, 3\varrho],\ \mathfrak{k}_2 = [2, 1+3\varrho].$$

Körper K_2.

$$\mathfrak{k}_0 = [1, 9\varrho],\ \mathfrak{k}_1 = [3, 1+3\varrho],\ \mathfrak{k}_2 = [3, 2+3\varrho]$$

Körper K_4.

$$\mathfrak{k}_0 = [1, 18\varrho],\ [6, 1+3\varrho],\ [6, 2+3\varrho]$$
$$\mathfrak{k}_1 = [2, 9\varrho],\ [3, 2+6\varrho],\ [6, 5+3\varrho]$$
$$\mathfrak{k}_2 = [2, 1+9\varrho],\ [3, 1+6\varrho],\ [6, 4+3\varrho].$$

Körper K_5.

$$\mathfrak{k}_0 = [1, 18\varrho],\ [6, 4+3\varrho],\ [6, 5+3\varrho]$$
$$\mathfrak{k}_1 = [2, 1+9\varrho],\ [3, 2+6\varrho],\ [6, 2+3\varrho]$$
$$\mathfrak{k}_2 = [2, 9\varrho],\ [3, 1+6\varrho],\ [6, 1+3\varrho].$$

Die zu diesen 15 Moduln gehörigen reducirten quadratischen Formen sind schon früher angegeben, und hiermit sind zugleich die beiden ersten Sätze von *Gauss* in § 11 durch unsere allgemeine Theorie bestätigt. Um

nun für die hier betrachteten vier Körper K_1, K_2, K_4, K_5 auch die entsprechenden Functionen H_1, H_2, H_4, H_5 zu bestimmen, welche in § 11 (S. 88) in der Form

$$2H = \Sigma' S(\mathfrak{k}_0) - \Sigma' S(\mathfrak{k}_1)$$

dargestellt sind, setzen wir zur Abkürzung

$$U = S[1, 18\varrho] = \Sigma(x^2+243y^2)^{-s},$$
$$U_1 = S[3, 1+6\varrho] = S[3, 2+6\varrho] = \Sigma(9x^2+6xy+28y^2)^{-s},$$
$$U_2 = S[2, 9\varrho] = S[2, 1+9\varrho] = \Sigma(4x^2+2xy+61y^2)^{-s},$$
$$U_4 = S[6, 1+3\varrho] = S[6, 2+3\varrho] = \Sigma(7x^2+6xy+36y^2)^{-s},$$
$$U_5 = S[6, 4+3\varrho] = S[6, 5+3\varrho] = \Sigma(13x^2+4xy+19y^2)^{-s},$$

ferner

$$V_1 = S[1, 6\varrho] = \Sigma(x^2+27y^2)^{-s},$$
$$W_1 = S[2, 3\varrho] = S[2, 1+3\varrho] = \Sigma(4x^2+2xy+7y^2)^{-s},$$
$$V_2 = S[1, 9\varrho] = \Sigma(x^2+xy+61y^2)^{-s},$$
$$W_2 = S[3, 1+3\varrho] = S[3, 2+3\varrho] = \Sigma(7x^2+3xy+9y^2)^{-s}$$

und erhalten

$$2H_1 = V_1 - W_1, \quad 2H_2 = V_2 - W_2,$$
$$2H_4 = (U+2U_4) - (U_1+U_2+U_5),$$
$$2H_5 = (U+2U_5) - (U_1+U_2+U_4).$$

Wir wollen jetzt, wie wir schon am Schlusse von § 11 angekündigt haben, diese Beispiele benutzen, um noch einmal auf die in § 10 bewiesene Umformung der Function H zurückzukommen. Wir haben dort, wenn k_ν irgend eine Wurzel der Ordnung $k_1 = [1, k\varrho]$ bedeutet, mit $S(k_\nu)$ die Summe der Grössen $N(\lambda)^{-s}$ bezeichnet, wo λ *alle* (von Null verschiedenen) Zahlen des Moduls k_ν durchläuft; wir wollen jetzt unter dem Zeichen k_ν^* den Inbegriff aller derjenigen von diesen Zahlen λ verstehen, welche ***relative Primzahlen zu k*** sind, und wollen den von diesen Zahlen herrührenden Theil der Summe $S(k_\nu)$ mit $S(k_\nu^*)$ bezeichnen; offenbar ist diese letztere Summe identisch mit der am Schlusse von § 9 erklärten Summe $S(\Re\nu)$, und der in § 10 bewiesene Satz lautet

$$6H = \Sigma\psi(\nu) S(k_\nu^*) = \Sigma\psi(\nu) S(k_\nu),$$

wo k_ν alle Wurzeln der Ordnung k_1 durchläuft. Wir haben dann in § 11 die zweite Summe durch die Betrachtung der Paare von conjugirten Moduln und der Tripel von äquivalenten Moduln vereinfacht, und da dieselbe

Vereinfachung offenbar auch für die erste Summe gilt, so nimmt der vorstehende Satz die folgende Form an

$$2H = \Sigma' S(\mathfrak{f}_0^*) - \Sigma' S(\mathfrak{f}_1^*) = \Sigma' S(\mathfrak{f}_0) - \Sigma' S(\mathfrak{f}_1),$$

wo die Summationen nur auf alle nicht äquivalenten Moduln $\mathfrak{f}_0$, $\mathfrak{f}_1$ auszudehnen sind. Diese beiden Ausdrücke für $2H$ unterscheiden sich dadurch von einander, dass in beiden Bestandtheilen des ersten Ausdruckes nur solche Glieder $N(\lambda)^{-s}$ auftreten, in welchen λ, also auch $N(\lambda)$ relative Primzahl zu k ist, während in beiden Bestandtheilen des zweiten Ausdruckes auch solche Glieder $N(\lambda)^{-s}$ auftreten, in welchen $N(\lambda)$ ***nicht*** relative Primzahl zu k ist, und der Satz besteht also darin, dass diese letzteren Glieder sich gegenseitig aufheben. Dies wollen wir jetzt wenigstens an unseren Beispielen bestätigen.

Es ist in § 10 schon gezeigt, dass der grösste gemeinsame Theiler von k und irgend einer in k_ν enthaltenen Zahl λ immer mit einer natürlichen Zahl n associirt ist, und wenn man $k = mn$ setzt, so überzeugt man sich leicht, dass der Inbegriff aller der in k_ν enthaltenen Zahlen λ, welchen dieselbe Zahl n entspricht, $= n \cdot m_\nu^*$, d. h. der Inbegriff aller mit n multiplicirten Zahlen des Systems m_ν^* ist, und hieraus ergiebt sich offenbar der allgemeine Satz

$$S(k_\nu) = \Sigma \frac{S(m_\nu^*)}{n^{2s}},$$

wo das Summenzeichen sich auf alle Zerlegungen $k = mn$ bezieht; multiplicirt man mit k^{2s}, so erhält man

$$k^{2s} S(k_\nu) = \Sigma m^{2s} S(m_\nu^*),$$

wo m alle natürlichen Divisoren von k durchläuft, und hieraus folgt nach bekannten Regeln (D. § 138. S. 362), wie umgekehrt die Summen von der Form $S(k_\nu^*)$ sich durch Summen von der Form $S(m_\nu)$ darstellen lassen.

Um diesen Satz auf unsere Beispiele anzuwenden, betrachten wir auch die Moduln 3_ν, 2_ν, welche je ein Tripel bilden, und den Modul $1_\nu = [1, \varrho]$ und setzen

$$X = S[1, 3\varrho] = \Sigma(x^2 + xy + 7y^2)^{-s}$$
$$Y = S[1, 2\varrho] = \Sigma(x^2 + 3y^2)^{-s}$$
$$Z = S[1, \varrho] = \Sigma(x^2 + xy + y^2)^{-s}.$$

Bezeichnen wir ferner, falls $S(m_\nu) = M$ gesetzt ist, mit M^* immer die Summe $S(m_\nu^*)$, so erhalten wir die Relationen

$$\begin{aligned} Z = Z^*,\ Y = Y^* + 2^{-2s} Z^*,\quad X = X^* + 3^{-2s} Z^*, \\ V_1 - V_1^* = W_1 - W_1^* = 3^{2s} T, \\ V_2 - V_2^* = W_2 - W_2^* = 3^{-2s} X, \\ U - U^* = 3^{-2s} V_1^* + 2^{-2s} V_2^* + T, \\ U_1 - U_1^* = 3^{-2s} V_1^* + 2^{-2s} W_2^* + T, \\ U_2 - U_2^* = 3^{-2s} W_1^* + 2^{-2s} V_2^* + T, \\ U_4 - U_4^* = U_5 - U_5^* = 3^{-2s} W_1^* + 2^{-2s} W_2^* + T, \end{aligned}$$

wo zur Abkürzung

$$T = 6^{-2s} X^* + 9^{-2s} Y^* + (18)^{-2s} Z^*$$

gesetzt ist, und hieraus folgt

$$\begin{aligned} 2H_1 &= V_1 - W_1 = V_1^* - W_1^*, \\ 2H_2 &= V_2 - W_2 = V_2^* - W_2^*, \\ 2H_4 &= (U + 2U_4) - (U_1 + U_2 + U_5) \\ &= (U^* + 2U_4^*) - (U_1^* + U_2^* + U_5^*) \\ 2H_5 &= (U + 2U_5) - (U_1 + U_2 + U_4), \\ &= (U^* + 2U_5^*) - (U_1^* + U_2^* + U_4^*), \end{aligned}$$

wodurch die in § 10 bewiesene Umformung bestätigt wird.

Bei der Besprechung des zweiten Satzes von *Gauss* über den kubischen Charakter der Zahl 3 haben wir bemerkt, dass derselbe vollständig mit unserer Theorie übereinstimmt, obgleich *Gauss* die Darstellung der Primzahlen p durch quadratische Formen von der Discriminante $-3.(18)^2$ benutzt, während schon die Darstellung durch quadratische Formen von der Discriminante -3.9^2 dieselbe Entscheidung liefert; jede der letzteren Formen löst sich gewissermassen in drei Formen der höheren Discriminante auf. Ganz dasselbe gilt von dem ersten Satze über den kubischen Charakter der Zahl 2; jede der von *Gauss* (in Uebereinstimmung mit unserer Theorie) betrachteten Formen der Discriminante -3.6^2 könnte durch drei entsprechende Formen der höheren Discriminante $-3.(18)^2$ ersetzt werden. Aber um so wichtiger ist es hervorzuheben, dass die Wahl der einen oder der anderen Discriminante durchaus *nicht* freisteht, wenn es sich um die Herstellung der Function

$$2H = \Sigma' S(\mathfrak{f}_0) - \Sigma' S(\mathfrak{f}_1)$$

handelt. In der That, wollte man (nach § 11) die Formen von den Discriminanten -3.6^2 und -3.9^2 durch je drei entsprechende Formen der Discriminante $-3.(18)^2$ ersetzen, so würde man für $2H_1$ und $2H_2$ die beiden Ausdrücke

$$P_1 = (U+2U_1)-(U_2+U_4+U_5),$$
$$P_2 = (U+2U_2)-(U_1+U_4+U_5)$$

erhalten, die aber von den oben gefundenen Ausdrücken (V_1-W_1) und (V_2-W_2) wesentlich ***verschieden*** sind. Behält man von den Gliedern $N(\lambda)^{-s}$ dieser Summen nur diejenigen bei, in denen $N(\lambda)$ relative Primzahl zu 18 ist, so erhält man die beiden entsprechenden Ausdrücke

$$P_1^* = (U^*+2U_1^*)-(U_2^*+U_4^*+U_5^*),$$
$$P_2^* = (U^*+2U_2^*)-(U_1^*+U_4^*+U_5^*),$$

und aus den obigen Formeln ergiebt sich

$$P_1 = P_1^*+3.3^{-2s}(V_1^*-W_1^*),$$
$$P_2 = P_2^*+3.2^{-2s}(V_2^*-W_2^*).$$

Hieraus folgt zunächst, dass P_1, P_2 resp. verschieden sind von P_1^*, P_2^*; ferner leuchtet aus der ersten Gleichung ein, dass P_1 auch von $2H_1$, d. h. von $(V_1^*-W_1^*)$ verschieden ist, weil sonst das Aggregat P_1^* auch solche Glieder $N(\lambda)^{-s}$ enthalten müsste, in denen $N(\lambda)$ durch 3 theilbar ist, was nicht der Fall ist; dass aber auch P_2 verschieden von $2H_2$, d. h. von $(V_2^*-W_2^*)$ ist, folgt aus der zweiten Gleichung erst dann, wenn man aus §§ 6, 7 noch die Thatsache hinzuzieht, dass H_2 von der Form $(1-2^{-2s})^{-1}M$ ist, wo M nur solche Glieder $N(\lambda)^{-s}$ enthält, in denen $N(\lambda)$ relative Primzahl zu 2 ist.

Um nun den Zusammenhang zwischen den Functionen H_1, P_1, P_1^* und den zwischen H_2, P_2, P_2^* vollständig aufzuklären, wollen wir bemerken, dass ausser dem obigen Satze über die Zerlegung der Summe $k^{2s}S(k_\nu)$ in Summen von der Form $m^{2s}S(m_\nu^*)$ noch eine Reihe von Relationen zwischen unseren Summen $S(m_\nu)$ besteht, die mit der Transformation der elliptischen Functionen nahe zusammenhängen, und denen ebensoviele Relationen zwischen den Summen $S(m_\nu^*)$ entsprechen. Für unseren Zweck genügt es, den einfachsten Fall dieses allgemeinen Satzes zu betrachten, der sich in sehr verschiedenen Einkleidungen darstellen lässt; wir wählen die folgende. Sind α, β zwei Constanten von irrationalem Verhältniss, und p eine natürliche

Primzahl, so bilden wir zwei Systeme von je $(p+1)$ zweigliedrigen Moduln; das erste System $\mathfrak{M}_1$ soll aus den $(p+1)$ Moduln

$$[\alpha, \beta], \quad [p\alpha, p\beta], \quad [p\alpha, p\beta], \quad \ldots [p\alpha, p\beta]$$

bestehen, welche mit Ausnahme des ersten $[\alpha, \beta]$ sämmtlich mit $[p\alpha, p\beta]$ identisch sind, während das zweite System $\mathfrak{M}_2$ aus den $(p+1)$ Moduln

$$[\alpha, p\beta], \quad [p\alpha, \beta], \quad [p\alpha, \alpha+\beta], \quad \ldots [p\alpha, (p-1)\alpha+\beta]$$

bestehen soll, welche mit Ausnahme des ersten $[\alpha, p\beta]$ von der Form $[p\alpha, c\alpha+\beta]$ sind, wo c die p Zahlen $0, 1, 2 \ldots (p-1)$ durchläuft. Alle in diesen $(2p+2)$ Moduln enthaltenen Zahlen λ sind von der Form $\lambda = x\alpha+y\beta$, wo x, y ganze rationale Zahlen bedeuten, und jede solche Zahl λ tritt, wie der Leser leicht finden wird, ebenso oft in den Moduln des Systems $\mathfrak{M}_1$ wie in den Moduln des Systems $\mathfrak{M}_2$ auf; sind nämlich beide Zahlen x, y durch p theilbar, so ist λ in allen $(p+1)$ Moduln des Systems $\mathfrak{M}_1$ und in allen $(p+1)$ Moduln des Systems $\mathfrak{M}_2$ enthalten; ist aber mindestens eine der beiden Zahlen x, y untheilbar durch p, so ist λ in einem einzigen Modul des Systems $\mathfrak{M}_1$ und in einem einzigen Modul des Systems $\mathfrak{M}_2$ enthalten. Man kann daher sagen, dass $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ denselben Gehalt von Zahlen λ besitzen, wobei zugleich die Häufigkeit des Auftretens dieser Zahlen berücksichtigt werden soll. Wir nehmen jetzt ferner an, dass das Verhältniss der Constanten α, β ***nicht reell*** ist, und setzen wie früher $N(\lambda) = \lambda\lambda' = (x\alpha+y\beta)(x\alpha'+y\beta')$, wo λ' die mit λ conjugirte complexe Zahl bedeutet, und

$$S[\alpha, \beta] = \Sigma N(\lambda)^{-s},$$

wo λ alle von Null verschiedenen Zahlen des Moduls $[\alpha, \beta]$ einfach durchläuft, während die Constante $s>1$ ist; dann folgt aus der obigen Uebereinstimmung der Systeme $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ der ***Satz***

$$S[\alpha, \beta]+pS[p\alpha, p\beta] = S[\alpha, p\beta]+\Sigma S[p\alpha, c\alpha+\beta],$$

wo das Summenzeichen Σ sich auf die p Zahlen c bezieht; die linke Seite dieser Gleichung lässt sich offenbar auch in der Form

$$(1+p.p^{-2s})\, S[\alpha, \beta]$$

darstellen, und die Beispiele $p=2$, $p=3$ liefern die beiden folgenden Sätze

$$(1+2.2^{-2s}(S[\alpha, \beta] = S[\alpha, 2\beta]+S[2\alpha, \beta]+S[2\alpha, \alpha+\beta],$$

$$(1+3.3^{-2s}(S[\alpha, \beta] = S[\alpha, 3\beta]+S[3\alpha, \beta]+S[3\alpha, \alpha+\beta]+S[3\alpha, 2\alpha+\beta].$$

Wendet man den ersten Satz auf die vier Moduln

$$[\alpha, \beta] = [1, \varrho],\quad [1, 3\varrho],\quad [1, 9\varrho],\quad [3, 1+3\varrho],$$

den zweiten auf die fünf Moduln

$$[\alpha, \beta] = [1, \varrho],\quad [1, 2\varrho],\quad [1, 3\varrho],\quad [1, 6\varrho],\quad [2, 3\varrho]$$

an, und berücksichtigt die Identitäten

$$[2, \varrho] = \varrho[1, 2\varrho],\quad [2, 1+\varrho] = \varrho^2[1, 2\varrho],$$
$$[3, \varrho] = \varrho[1, 3\varrho],\quad [3, 1+\varrho] = \varrho^2[1, 3\varrho],\quad [3, 2+\varrho] = (2+\varrho)[1, \varrho],$$
$$[3, 2\varrho] = \varrho[2, 1+3\varrho],\quad [3, 2+2\varrho] = \varrho^2[2, 3\varrho],\quad [3, 1+2\varrho] = (1+2\varrho)[1, 2\varrho],$$
$$[3, 3\varrho] = 3[1, \varrho],\quad [3, 6\varrho] = 3[1, 2\varrho],\quad [6, 3\varrho] = 3\varrho[1, 2\varrho],$$

so erhält man die folgenden neun Relationen

$$(1+2.2^{-2s})\,\mathfrak{Z} = 3\mathfrak{Y};\ (1+3.3^{-2s}-3^{-s})\,\mathfrak{Z} = 3\mathfrak{X},$$
$$(1+3.3^{-2s}-3^{-s})\,\mathfrak{Y} = (1+2.2^{-2s})\,\mathfrak{X} = \mathfrak{V}_1+2\mathfrak{W}_1,$$
$$(1+3.3^{-2s})\,\mathfrak{X}-3^{-2s}\mathfrak{Z} = \mathfrak{V}_2+2\mathfrak{W}_2,$$
$$(1+3.3^{-2s})\,\mathfrak{V}_1-3^{-2s}\mathfrak{Y} = \mathfrak{U}+2\mathfrak{U}_1,$$
$$(1+3.3^{-2s})\,\mathfrak{W}_1-3^{-2s}\mathfrak{Y} = \mathfrak{U}_2+\mathfrak{U}_4+\mathfrak{U}_5,$$
$$(1+2.2^{-2s})\,\mathfrak{V}_2 = \mathfrak{U}+2\mathfrak{U}_2,$$
$$(1+2.2^{-2s})\,\mathfrak{W}_2 = \mathfrak{U}_1+\mathfrak{U}_4+\mathfrak{U}_5,$$

von denen aber nur acht von einander unabhängig sind.

Drückt man nun jede Summe $\mathfrak{M}$ nach den obigen Formeln durch Summen von der Form $\mathfrak{M}^*$ aus, so ergeben sich für die letzteren die einfacheren Relationen

$$(1-2^{-2s})\,\mathfrak{Z}^* = 3\mathfrak{Y}^*;\ (1-3^{-s})\,\mathfrak{Z}^* = 3\mathfrak{X}^*,$$
$$(1-3^{-s})\,\mathfrak{Y}^* = (1-2^{-2s})\,\mathfrak{X}^* = \mathfrak{V}_1^*+2\mathfrak{W}_1^*;\ \mathfrak{X}^* = \mathfrak{V}_2^*+2\mathfrak{W}_2^*,$$
$$\mathfrak{V}_1^* = \mathfrak{U}^*+2\mathfrak{U}_1^*;\ \mathfrak{W}_1^* = \mathfrak{U}_2^*+\mathfrak{U}_4^*+\mathfrak{U}_5^*,$$
$$(1-2^{-2s})\,\mathfrak{V}_2^* = \mathfrak{U}^*+2\mathfrak{U}_2^*;\ (1-2^{-2s})\,\mathfrak{W}_2^* = \mathfrak{U}_1^*+\mathfrak{U}_4^*+\mathfrak{U}_5^*.$$

Wir wollen bemerken, dass man diese letzteren Relationen auch auf einem ganz anderen Wege ableiten kann, bei welchem der leicht zu beweisende Hülfssatz zur Anwendung kommt, dass, wenn μ (ebenso wie ν) relative Primzahl zu k ist, der Inbegriff der durch μ theilbaren Zahlen in k_ν identisch mit $\mu.k_{\nu\mu'}$ ist, wo μ' wieder die mit μ conjugirte Zahl bedeutet. Ist nun p eine natürliche Primzahl, und ν relative Primzahl zu pk, so kann man jede der $\varphi(k)$ Zahlklassen (mod. k), aus welchen das System k_ν^* besteht, in p^2 Zahlklassen (mod. pk) zerlegen, welche sich, wenn

p in k aufgeht, in Systeme von der Form $(pk)^*_\mu$ zusammenfassen lassen, während im entgegengesetzten Falle auch noch die Zahlen in k^*_ν zu gruppiren sind, welche nicht relative Primzahlen zu p sind. Für unseren Zweck genügt es, die Resultate für die beiden Primzahlen $p = 2$, $p = 3$ anzugeben. Ist k gerade, so *besteht* das System k^*_ν aus den beiden Systemen

$$(2k)^*_\nu, \quad (2k)^*_{\nu(1+k\varrho)},$$

d. h. jede in k^*_ν enthaltene Zahl findet sich in einem und nur einem dieser beiden Systeme, und umgekehrt sind alle Zahlen dieser beiden Systeme auch in k^*_ν enthalten. Ist aber k ungerade, so besteht k^*_ν aus den vier Systemen

$$2.k^*_\nu, \quad (2k)^*_\nu, \quad (2k)^*_{\nu(1+k\varrho)}, \quad (2k)^*_{\nu(1+k\varrho^2)},$$

deren erstes der Inbegriff aller mit 2 multiplicirten Zahlen des Systems k^*_ν ist. Wenn ferner k durch 3 theilbar ist, so besteht k^*_ν aus den drei Systemen

$$(3k)^*_\nu, \quad (3k)^*_{\nu(1+k\varrho)}, \quad (3k)^*_{\nu(1+k\varrho^2)},$$

und wenn k nicht durch 3 theilbar ist, so besteht k^*_ν aus den vier Systemen

$$(1-\varrho).k^*_{\nu(2+\varrho)}, \quad (3k)^*_\nu, \quad (3k)^*_{\nu(3+k\varrho)}, \quad (3k)^*_{\nu(3+k\varrho^2)}.$$

Der erste dieser vier Sätze kann hier nicht zur Anwendung kommen, weil 18 nicht durch 4 theilbar ist; wendet man aber den zweiten, dritten, vierten Satz resp. auf die Beispiele

$$k_\nu = [1, \varrho], \quad [1, 3\varrho], \quad [1, 9\varrho], \quad [3, 1+3\varrho],$$
$$k_\nu = [1, 3\varrho], \quad [1, 6\varrho], \quad [2, 3\varrho],$$
$$k_\nu = [1, \varrho], \quad [1, 2\varrho]$$

an und bildet die entsprechenden Summen $S(k^*_\nu)$, so erhält man die obigen neun Relationen zwischen den Functionen M^*, von denen die eine aus den übrigen folgt.

Aus den letzten vier dieser Relationen ergeben sich nun für die oben mit P^*_1, P^*_2 bezeichneten Aggregate die Ausdrücke

$$P^*_1 = V^*_1 - W^*_1, \qquad P^*_2 = (1-2^{-2s})(V^*_2 - W^*_2),$$

deren Form sich dadurch erklärt, dass jede relative Primzahl zu 6 auch relative Primzahl zu 18 ist, während die relativen Primzahlen zu 9 nicht alle auch relative Primzahlen zu 18 sind. Berücksichtigt man noch die oben gefundenen Beziehungen zwischen P^*_1, P^*_2 und P_1, P_2, so vervollständigen

sich unsere früheren Ausdrücke für die beiden Functionen $2H_1$, $2H_2$ in folgender Weise

$$2H_1 = V_1 - W_1 = V_1^* - W_1^* = P_1^* = \frac{P_1}{1+3.3^{-2s}},$$

$$2H_2 = V_2 - W_2 = V_2^* - W_2^* = \frac{P_2^*}{1-2^{-2s}} = \frac{P_2}{1+2.2^{-2s}},$$

und hiermit ist unsere Absicht, diese Functionen durch die Formen der Discriminante $-3(18)^2$ darzustellen, wirklich erreicht.

§ 13.

Der Grenzsatz von *Kronecker*.

Nachdem wir durch die vorhergehenden Beispiele die Bildung des Charakters ψ, der Moduln k_ν, und hiermit auch der Function

$$2H = \Sigma' S(\mathfrak{k}_0) - \Sigma' S(\mathfrak{k}_1)$$

hinreichend erläutert haben, wenden wir uns zur Lösung der Aufgabe, welche wir uns in § 6 gestellt haben. Es handelt sich darum, die Anzahl h der Idealklassen des reinen kubischen Körpers K durch die wirkliche Ausführung des in der Gleichung

$$h\frac{2\pi\log\varepsilon}{k\sqrt{3}} = \lim(s-1)J$$

angedeuteten Grenzprocesses zu bestimmen, welcher darin besteht, dass die positive Variabele $(s-1)$ unendlich klein wird. In § 7 ist die *Dirichlet*sche Idealfunction J in die beiden Factoren G, H zerlegt, von denen der erste die über alle natürlichen Zahlen n ausgedehnte Summe

$$G = \Sigma\frac{1}{n^s}$$

ist, während der zweite Factor H nach manchen Umformungen in § 11 die obige Gestalt angenommen hat. Da nun bekanntlich

$$\lim(s-1)G = 1$$

ist, so wird

$$h\frac{2\pi\log\varepsilon}{k\sqrt{3}} = \lim H,$$

und dieser Grenzwerth lässt sich mit Hülfe eines berühmten Satzes von *Kronecker* leicht bestimmen. Da die Anzahl k'' der nicht äquivalenten Moduln $\mathfrak{k}_0$ mit der der Moduln $\mathfrak{k}_1$ übereinstimmt, so genügt hierzu schon der Ausdruck für den Grenzwerth der Differenz

$$\Sigma(Ax^2+Bxy+Cy^2)^{-s} - \Sigma(A_1x^2+B_1xy+C_1y^2)^{-s},$$

wo $(A, \frac{1}{2}B, C)$, $(A_1, \frac{1}{2}B_1, C_1)$ irgend zwei positive Formen von derselben negativen Discriminante $D = B^2 - 4AC$ bedeuten. Die Darstellung dieses Grenzwerthes durch Thetafunctionen hat ***Kronecker*** zuerst im Monatsbericht der Berliner Akademie vom 22. Januar 1863 ohne Beweis mitgetheilt. Es lag nun nahe, diesen ersten Satz als Ausfluss eines zweiten aufzufassen, durch welchen das Verhalten der von einer einzelnen Form $(A, \frac{1}{2}B, C)$ erzeugten Summe

$$\Sigma(Ax^2+Bxy+Cy^2)^{-s}$$

für unendlich kleine positive Werthe von $(s-1)$ genauer ermittelt wird. Bekanntlich hat ***Dirichlet*** zuerst bewiesen, dass diese Function unendlich gross wird wie

$$\frac{2\pi}{(s-1)\sqrt{-D}},$$

und hierin besteht eine wesentliche Grundlage seiner Methode, die Klassenanzahl der Formen von der negativen Discriminante D zu bestimmen. Jetzt kam es darauf an, einen Schritt weiter zu gehen, nämlich den endlichen Grenzwerth der Differenz

$$\Sigma(Ax^2+Bxy+Cy^2)^{-s} - \frac{2\pi}{(s-1)\sqrt{-D}}$$

zu ermitteln. Diese Aufgabe ist zuerst für beliebige reelle Coefficienten A, B, C von ***H. Weber*** in einem an mich gerichteten Briefe vom 12. October 1881 vollständig gelöst, dessen Inhalt er später veröffentlicht hat im Bd. 33 der Mathematischen Annalen (1889) und in § 113 seines Werkes „Elliptische Functionen und Algebraische Zahlen“ (1891). Inzwischen ist aber auch ***Kronecker*** in zahlreichen Aufsätzen über die elliptischen Functionen auf diesen Gegenstand zurückgekommen; schon im Sitzungsberichte der Berliner Akademie vom 30. Juli 1885 findet sich seine, von der *Weber*schen wesentlich verschiedene Ableitung des fraglichen Grenzwerthes, zunächst für rationale Coefficienten, und endlich hat er im Sitzungsberichte vom 21. Februar 1889 den Satz auch auf Formen mit complexen Coefficienten ausgedehnt. Wir beschränken uns hier auf Formen mit reellen Coefficienten und stellen den Satz in der für unseren Zweck geeigneten Form folgendermassen dar.

Es seien α und $\beta = \alpha\omega$ irgend zwei complexe Constanten von imaginärem Verhältniss ω, und zwar setzen wir fest, dass der reelle Theil von $i\omega$ ***negativ*** sei; bezeichnen wir immer mit α' die mit α conjugirte

complexe Zahl und mit $N(\alpha)$ das stets positive Product $\alpha\alpha'$, so können wir dies auch durch die Bedingung

$$\Delta = i(\alpha\beta' - \beta\alpha') = i(\omega' - \omega)N(\alpha) > 0$$

ausdrücken, und wir nennen zugleich α die erste, β die zweite Basiszahl des binären Moduls $\mathfrak{k} = [\alpha, \beta] = \alpha[1, \omega]$, dessen Zahlen von der Form $\lambda = \alpha x + \beta y$ sind, wo x, y alle ganzen rationalen Zahlen durchlaufen. Sind α_1 und $\beta_1 = \alpha_1\omega_1$ ebenfalls eine erste und zweite Basiszahl desselben Moduls $\mathfrak{k} = [\alpha, \beta] = [\alpha_1, \beta_1]$, so bestehen zwischen diesen beiden Basen Relationen von der Form

$$\alpha_1 = a\alpha + c\beta, \quad \beta_1 = b\alpha + d\beta$$

wo a, b, c, d vier ganze rationale Zahlen bedeuten, die der Bedingung

$$ad - bc = +1$$

genügen (vergl. § 11). Hieraus geht hervor, dass die oben mit Δ bezeichnete positive Grösse eine Invariante des Moduls $\mathfrak{k}$, d. h. unabhängig von der Wahl seiner Basis ist. Bedient man sich ferner einer in der Theorie der elliptischen Modulfunctionen üblichen Ausdrucksweise*), so gehören die durch die Gleichung.

$$\omega_1 = \frac{b + d\omega}{a + c\omega}$$

verbundenen Zahlen ω, ω_1 derselben ***Klasse äquivalenter Zahlen*** an, und diese Klasse ist also ebenfalls eine Invariante des Moduls $\mathfrak{k}$, oder vielmehr eine Invariante der ***Modul-Klasse***, welche aus allen mit $\mathfrak{k}$ äquivalenten Moduln besteht. Von hervorragender Wichtigkeit für die eben genannte Theorie ist die Function

$$\eta(\omega) = e^{\frac{\pi i\omega}{12}} \Pi(1 - e^{2\pi i\omega n}),$$

wo n in dem Producte Π alle natürlichen Zahlen durchläuft; das Gesetz ihrer linearen Transformation wird durch die Gleichung

$$\eta(\omega_1) = r(a + c\omega)^{\frac{1}{2}}\eta(\omega)$$

---

*) Vergl. meinen Aufsatz in diesem Journal, Bd. 83, und meine Erläuterungen zum Fragment XXVIII in der zweiten Auflage von *Riemanns* Werken (1892). Eine ausführliche Darstellung der ganzen Theorie findet man in dem oben citirten Werke von *H. Weber* und in den Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunctionen von *F. Klein* und *R. Fricke* (1890–1892).

ausgedrückt, wo $r^{24}=1$, und ω_1 die obige Bedeutung hat; berücksichtigt man noch, dass $\eta(-\omega')$ die mit $\eta(\omega)$ conjugirte Grösse, und dass

$$\omega_1'-\omega_1=\frac{\omega'-\omega}{(a+c\omega)(a+c\omega')}$$

ist, so ergiebt sich hieraus leicht, dass die Grösse

$$H(\omega)=H(-\omega')=\eta(\omega)\eta(-\omega')\sqrt{i(\omega'-\omega)},$$

wo die Quadratwurzel immer positiv genommen werden soll, für alle mit ω äquivalenten Zahlen einen und denselben positiven Werth besitzt, welcher mithin eine Invariante der aus allen diesen Zahlen bestehenden Klasse ist. Durchläuft nun λ alle von Null verschiedenen Zahlen des Moduls $\mathfrak{k}$, und bezeichnen wir (wie in §§ 10, 11, 12) mit $S(\mathfrak{k})$ die Summe aller entsprechenden Potenzen $N(\lambda)^{-s}$, so besteht der Satz von ***Kronecker*** darin, dass

$$S(\mathfrak{k})=\frac{2\pi}{\Delta}\left\{\frac{1}{s-1}-2\Gamma'(1)-\log\Delta-2\log H(\omega)\right\}+(0)$$

ist, wo die Function (0) gleichzeitig mit $(s-1)$ ***unendlich klein*** wird, während $-\Gamma'(1)=0{,}5772\ldots$ die bekannte ***Euler***sche Constante ist.

Um nun diesen Satz auf unsere Moduln $\mathfrak{k}=k_\nu$ anzuwenden, bemerken wir zunächst, dass die obige Unterscheidung zwischen der ersten und zweiten Basiszahl mit der in § 11 festgesetzten übereinstimmt, wenn wir jetzt noch annehmen, dass dort unter ϱ immer diejenige Kubikwurzel der Einheit verstanden wird, für welche

$$1+2\varrho=\sqrt{-3}=i\sqrt{3}$$

wird, wo $\sqrt{3}$ ***positiv*** zu nehmen ist; behält man die dortigen Bezeichnungen bei, so wird zugleich

$$\Delta=i(\alpha\beta'-\beta\alpha')=k\sqrt{3}$$

und

$$\omega=\frac{\beta}{\alpha}=\frac{b_1+b_2\varrho}{a_1+a_2\varrho}=\frac{B+ik\sqrt{3}}{2A},$$

wo $(A, \frac{1}{2}B, C)$ wieder die der Basis α, β entsprechende binäre quadratische Form bedeutet. Hat man nun für jeden der k'' Moduln $\mathfrak{k}_0$ und für jeden der k'' Moduln $\mathfrak{k}_1$ nach Belieben eine Basis α, β gewählt, und bezeichnet man mit ω_0, ω_1 die entsprechenden Werthe von ω, so liefert der Satz von ***Kronecker*** das Resultat

$$\lim H=\frac{2\pi}{k\sqrt{3}}\left\{\Sigma'\log H(\omega_1)-\Sigma'\log H(\omega_0)\right\},$$

und hieraus ergiebt sich die Bestimmung der Anzahl h der Idealklassen im Körper K durch die Gleichung

$$\varepsilon^h = \frac{\Pi H(\omega_1)}{\Pi H(\omega_0)},$$

wo ε die Fundamentaleinheit des Körpers K bedeutet, und wo die Productzeichen Π im Nenner und Zähler sich auf alle nicht äquivalenten Zahlen ω_0, ω_1 beziehen.

Mit diesem Resultate, in welchem der Zusammenhang zwischen den reinen kubischen Körpern und den aus der complexen Multiplication der elliptischen Functionen entspringenden algebraischen Zahlkörpern enthalten ist, brechen wir die gegenwärtige Abhandlung ab; doch fügen wir noch die folgenden Bemerkungen hinzu, die sich auf die wirkliche Berechnung der Klassenanzahl h beziehen. Für diesen Zweck ist, wie wir gestehen müssen, die Brauchbarkeit des gewonnenen Resultates noch an gewisse Bedingungen gebunden, die zur Zeit keineswegs als allgemein erfüllt anzusehen sind. Vor Allem ist zu bemerken, dass hierzu die Kenntniss der *Fundamentaleinheit* ε des Körpers K erforderlich ist; nun haben sich zwar verschiedene ausgezeichnete Mathematiker damit beschäftigt, die zuerst von *Jacobi**) angegebene und an einigen Beispielen durchgeführte Methode zu vervollkommnen, aber ein einfacher und zugleich nachweislich unfehlbarer Weg zur Gewinnung von ε, der sich mit der Lösung der *Pell*schen Gleichung in der Theorie der quadratischen Körper vergleichen liesse, ist meines Wissens bisher noch immer nicht gefunden. Für die Beispiele der in § 2 aufgestellten Tabelle ist es freilich ohne grosse Mühe möglich, die Aufgabe zu lösen, und zwar gelingt dies meistens durch die Zerlegung einiger wenigen Zahlen des Körpers in ihre idealen Primfactoren; für Diejenigen, welche solche Berechnungen anstellen mögen, bemerke ich Folgendes. Giebt man den Buchstaben a, b, α, β wieder dieselbe Bedeutung wie in § 2, so findet man leicht, dass jede im Körper K enthaltene Zahl

$$\varkappa = z + x\alpha + y\beta,$$

von deren rationalen Coordinaten z, x, y höchstens eine verschwindet, auch als Quotient in den Formen

$$\varkappa = \frac{y_1\alpha - bx_1}{bx - y\alpha} = \frac{x_1\beta - ay_1}{ay - x\beta} = \frac{z_1 - y_1\beta}{z - x\alpha} = \frac{z_1 - x_1\alpha}{z - y\beta}$$

---

*) Allgemeine Theorie der kettenbruchähnlichen Algorithmen, in welchen jede Zahl aus drei vorhergehenden gebildet wird (dieses Journal, Bd. 69).

darstellbar ist, wo

$$z_1 = z^2 - abxy, \qquad x_1 = ay^2 - zx, \qquad y_1 = bx^2 - zy$$

die Coordinaten ihres Supplementes

$$z'z'' = z_1 + x_1\alpha + y_1\beta$$

bedeuten. Hierdurch wird man veranlasst, nür solche Zahlen z zu betrachten, in welchen eine der Coordinaten x, y verschwindet, während die beiden anderen ganze Zahlen ohne gemeinsamen Theiler sind; eine solche Zahl z ist nur durch Primideale *ersten* Grades theilbar, und z kann auch nicht durch zwei verschiedene, in derselben natürlichen Primzahl p aufgehende Primideale theilbar sein, ausgenommen den Fall $p = 3$ bei den Körpern zweiter Art, wo $\mathfrak{o}3 = \mathfrak{p}^2\mathfrak{p}_1$, und wo jede Zahl z entweder relative Primzahl zu 3 oder theilbar durch $\mathfrak{p}\mathfrak{p}_1$, aber niemals theilbar durch $\mathfrak{p}^2$ ist. Auf Grund dieser Eigenschaften schliesst man aus der Norm von z, welche die leicht zu berechnende Form $z^3 + ab^2x^3$ oder $z^3 + a^2by^3$ hat, sofort auf die Zerlegung des Ideals $\mathfrak{o}z$ in seine Primfactoren. Um zu bewirken, dass eine solche Zahl z durch ein in der natürlichen Primzahl p aufgehendes Primideal ersten Grades $\mathfrak{p}$ theilbar wird, braucht man nur mit Hülfe des Canon Arithmeticus die beiden rationalen Zahlen u, v zu bestimmen, für welche $\alpha \equiv u$, $\beta \equiv v (\mathrm{mod.}\ \mathfrak{p})$, also $u^3 \equiv ab^2$, $v^3 \equiv a^2b$, $uv \equiv ab (\mathrm{mod.}\ p)$ wird; dann ist der Modul $[p, \alpha - u, \beta - v]$ das kleinste gemeinsame Vielfache $\mathfrak{p} - \mathfrak{n}$ von $\mathfrak{p}$ und der Ordnung $\mathfrak{n} = [1, \alpha, \beta]$, und unter den in ihm enthaltenen Zahlen z wird man vorzugsweise diejenigen wählen, deren Coordinaten so klein wie möglich sind. In allen Beispielen der Tabelle in § 2 und einigen anderen, die ich untersucht habe, findet man bald, dass aus wenigen so zerlegten Zahlen z sich zwei Producte von verschiedenem Absolutwerth bilden lassen, welche aus denselben Primidealen zusammengesetzt sind, deren Quotient folglich eine irrationale Einheit ist. Die Aufsuchung der Fundamentaleinheit ε, welche hierdurch bekanntlich in endliche Grenzen eingeschlossen ist, kann freilich noch ziemlich mühselig sein, obgleich die Anzahl der anzustellenden Versuche durch Zuziehung gewisser Congruenzen sich noch beschränken lässt.

Am Schlusse der in der Einleitung erwähnten Abhandlung giebt Herr ***Markoff*** eine werthvolle Tabelle von Einheiten für diejenigen 52 aus $\alpha = \sqrt[3]{ab^2}$ gebildeten Körper, in welchen $ab^2 \leqq 70$ ist (von den 54 in der Tabelle angegebenen Einheiten treten zwei je zweimal auf, die eine bei

$ab^2 = 12$ und $ab^2 = 18$, die andere bei $ab^2 = 20$ und $ab^2 = 50$); dass der von ihm eingeschlagene Weg der Berechnung mit dem eben beschriebenen wesentlich übereinstimmt, geht theils aus der Darstellungsform dieser Einheiten hervor, theils aus der in § 5 (S. 20) enthaltenen Bemerkung: „Ne nous arrêtant pas aux méthodes sûres mais fatigantes pour déterminer l'unité complexe fondamentale nous remarquons, que pour les valeurs petites de a et b il est facile de trouver les unités complexes par le tâtonnement en considérant plusieurs nombres ξ composés des mêmes facteurs premiers". Unter diesen 52 Körpern befinden sich auch alle in meiner Tabelle (§ 2) angegebenen 21 Körper ($ab \leqq 23$), und die in diesem Umfange angestellte Vergleichung mit meinen Rechnungen hat ergeben, dass die von Herrn *Markoff* gefundenen Einheiten sämmtlich fundamental sind mit einziger Ausnahme des Beispiels $ab^2 = 28$, in welchem die von ihm angegebene Einheit das Quadrat der Fundamentaleinheit ist.

Während die von Herrn *Markoff* und mir angewandte Methode auf der Zerlegung der Zahlen in ihre idealen Primfactoren beruht, hat Herr *Mehmke* schon seit dem Jahre 1885 den zuerst von *Jacobi* angegebenen, später von Herrn *Bachmann**) behandelten Algorithmus der Annäherung wieder aufgenommen und durch gewisse Modificationen zu vervollkommnen gesucht, worüber er mir brieflich in den Jahren 1889—1893 interessante Mittheilungen gemacht hat, die mir die Veröffentlichung seiner Methoden sehr wünschenswerth erscheinen lassen; mit bestem Danke erwähne ich einer von ihm berechneten Tabelle von 39 Einheiten, unter denen sich acht auf die Beispiele $ab^2 = 76, 124, 126, 140, 198, 207, 234, 350$ beziehen, also nicht in der *Markoff*schen Tabelle enthalten sind.

Die weiter unten zu benutzenden Fundamentaleinheiten ε der in § 12 mit K_1, K_2, K_4, K_5 bezeichneten Körper und ihre reciproken Werthe ε^{-1} sind die folgenden:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= 1+\alpha+\beta, & \varepsilon_1^{-1} &= -1+\alpha \\
\varepsilon_2 &= 4+3\alpha+2\beta, & \varepsilon_2^{-1} &= -2+\beta \\
\varepsilon_4 &= 109+60\alpha+33\beta, & \varepsilon_4^{-1} &= 1-6\alpha+3\beta \\
\varepsilon_5 &= 55+24\alpha+21\beta, & \varepsilon_5^{-1} &= 1+3\alpha-3\beta.
\end{aligned}$$

Wenden wir uns jetzt zu der Berechnung der Function $H(\omega)$, welche

*) Zur Theorie von *Jacobi*s Kettenbruch-Algorithmen (dieses Journal Bd. 75. 1873). Vergl. *Fr. Meyer*: Ueber kettenbruchähnliche Algorithmen (Verhandlungen des Mathematiker-Congresses in Zürich 1897).

für alle einander äquivalenten Zahlen ω denselben Werth besitzt, so ist es vortheilhaft, für den Repräsentanten einer solchen Klasse immer die in derselben enthaltene ***reducirte*** Zahl ω zu wählen, welche den Bedingungen

$$-1 \leqq \omega+\omega' \leqq +1, \qquad \omega\omega' \geqq 1$$

genügt, weil dann der analytische Modul (oder absolute Betrag) von $e^{2\pi i\omega}$ bekanntlich so klein wie möglich wird; da es ohnehin feststeht, dass h eine ***ganze*** Zahl ist, so genügt in der Regel die ***Annäherung***

$$\eta(\omega) = e^{\frac{\pi i\omega}{12}}, \qquad \eta(-\omega') = e^{-\frac{\pi i\omega'}{12}},$$

$$H(\omega) = e^{-\frac{\pi i\,(\omega'-\omega)}{12}}\sqrt{i(\omega'-\omega)}.$$

Setzt man wie oben

$$\omega = \frac{B+ik\sqrt{3}}{2A}, \quad -\omega' = \frac{-B+ik\sqrt{3}}{2A}, \quad i(\omega'-\omega) = \frac{k\sqrt{3}}{A},$$

wo $(A, \frac{1}{2}B, C)$ die der reducirten Zahl ω entsprechende reducirte Form von der Discriminante $B^2-4AC = D = -3k^2$ bedeutet, so wird

$$\log H(\omega) = -\frac{\pi k\sqrt{3}}{12A} - \tfrac{1}{2}\log A + \tfrac{1}{2}\log(k\sqrt{3});$$

setzt man hierin für ω die k'' Werthe ω_0 und die k'' Werthe ω_1 ein und bezeichnet die entsprechenden Werthe von A mit A_0 und A_1, so ergiebt sich

$$h\log\varepsilon = \frac{\pi k\sqrt{3}}{12}\left\{\Sigma\frac{1}{A_0} - \Sigma\frac{1}{A_1}\right\} + \tfrac{1}{2}\left\{\Sigma\log A_0 - \Sigma\log A_1\right\};$$

führt man endlich statt der natürlichen Logarithmen log die gemeinen Logarithmen Log ein, und setzt zur Abkürzung

$$M = \frac{\pi\sqrt{3}}{12}\operatorname{Log} e = 0{,}1969308\ldots, \quad \operatorname{Log} M = 0{,}2943137\ldots - 1,$$

so erhält man die Annäherung

$$h\operatorname{Log}\varepsilon = Mk\left\{\Sigma\frac{1}{A_0} - \Sigma\frac{1}{A_1}\right\} + \tfrac{1}{2}\left\{\Sigma\operatorname{Log} A_0 - \Sigma\operatorname{Log} A_1\right\},$$

welche, wie gesagt, zur Berechnung der ganzen Zahl h in der Regel vollständig ausreicht*). Um eine Probe für die Genauigkeit dieser Formel zu machen, deren rechte Seite mit $\mathfrak{M}$ bezeichnet werden möge, wollen wir sie

*) Nach einer oberflächlichen Schätzung ist für jede reducirte Zahl ω der absolute Betrag der Differenz $\operatorname{Log}\eta(\omega) - \frac{\pi i\omega}{12}\operatorname{Log} e$ immer $<0{,}0018943$.

auf die vier Körper K_1, K_2, K_4, K_5 anwenden, für welche die Werthe der Zahlen A_0, A_1 in § 12 angegeben sind; die hiernach zu berechnenden Werthe von $\mathfrak{M}$ sind dann mit den obigen Werthen der Fundamentaleinheiten ε zu vergleichen.

Körper K_1.

$$k = 6,\ k'' = 1;\ A_0 = 1;\ A_1 = 4;\ \mathfrak{M} = 0{,}5851586;$$
$$\varepsilon = 3{,}8473221,\ \operatorname{Log}\varepsilon = 0{,}5851585.$$

Körper K_2.

$$k = 9,\ k'' = 1;\ A_0 = 1;\ A_1 = 7;\ \mathfrak{M} = 1{,}0966315;$$
$$\varepsilon = 12{,}4869164,\ \operatorname{Log}\varepsilon = 1{,}0964550.$$

Körper K_4.

$$k = 18,\ k'' = 3;\ A_0 = 1, 7, 7;\ A_1 = 4, 9, 13;\ \mathfrak{M} = 2{,}5147929;$$
$$\varepsilon = 326{,}9908336,\ \operatorname{Log}\varepsilon = 2{,}5145356.$$

Körper K_5.

$$k = 18,\ k'' = 3;\ A_0 = 1, 13, 13;\ A_1 = 4, 7, 9;\ \mathfrak{M} = 2{,}2169007;$$
$$\varepsilon = 164{,}9818558,\ \operatorname{Log}\varepsilon = 2{,}2174362.$$

In allen diesen Beispielen schliesst man aus der obigen Näherungsformel $h \operatorname{Log}\varepsilon = \mathfrak{M}$ mit Sicherheit, dass die Klassenanzahl $h = 1$ ist, weil $\mathfrak{M}$ nahezu mit $\operatorname{Log}\varepsilon$ übereinstimmt.

Auf dieselbe Weise habe ich die Klassenanzahl h für alle Körper der Tabelle in § 2 und ausserdem für die drei Beispiele $ab^2 = 35, 53, 91$ berechnet, denen die Werthe $h = 3, 1, 9$ entsprechen.

Bedenkt man, dass für diese Bestimmungsart der Klassenanzahl h ausser der Kenntniss der Fundamentaleinheit ε auch die Aufstellung der Moduln $\mathfrak{k}$ und ihrer Charaktere ψ erforderlich ist, welche für grössere Werthe von ab immer zeitraubender wird, so kann man dem oben gewonnenen Resultate nur einen sehr geringen oder gar keinen *praktischen* Werth beilegen. Auf Grund des schönen Satzes von Herrn *Minkowski**), dass es in jeder Idealklasse mindestens ein Ideal giebt, dessen Norm absolut kleiner ist als die Quadratwurzel aus der Grundzahl des Körpers, gestaltet sich die Berechnung von h viel kürzer; die oben beschriebene Zerlegung der

---

*) Théorèmes arithmétiques (Compte rendu der Pariser Akademie vom 26. Januar 1891).

Zahlen z von der Form $z+x\alpha$ oder $z+y\beta$ in ihre idealen Primfactoren liefert (in allen 24 von mir behandelten Beispielen) so viele Aequivalenzen zwischen den fraglichen Idealen, dass sie sich wirklich in h Klassen einordnen, und es kommt nur noch darauf an zu zeigen, dass diese Klassen auch von einander verschieden sind, was meistens keine Schwierigkeit macht; in den Fällen, wo ab durch Primzahlen p von der Form $3m+1$ theilbar ist, dient hierzu namentlich die Bemerkung, dass $N(z+x\alpha+y\beta) \equiv z^3 \pmod{ab}$, also die Norm jedes Hauptideals kubischer Rest von jeder solchen Primzahl p ist, worauf zugleich die Eintheilung der Idealklassen in *Geschlechter* beruht. Ich bemerke schliesslich, dass auch Herr *Markoff* in § 6 seiner Abhandlung für einige Beispiele die Klassenanzahl h auf ganz ähnliche Weise bestimmt hat.

Ich habe im Vorworte leider versäumt, die kürzlich in der Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellchaft in Zürich (1897, Jahrgang 42) veröffentlichte nachgelassene Abhandlung: „Zur Theorie der zerlegbaren Formen, insbesondere der kubischen“ von *Arnold Meyer* zu erwähnen; sie ist schon im Jahre 1870 verfasst und bietet, abgesehen von der Ermittelung der Idealzahlen, nur wenige Berührungspunkte mit meiner Arbeit dar.

Inhalt.

		Seite
Vorwort		40
§ 1.	Reine kubische Zahlkörper	42
§ 2.	Invarianten des Körpers K	43
§ 3.	Die in $3ab$ aufgehenden Primideale	46
§ 4.	Die Grundzahl D	51
§ 5.	Die in der Grundzahl nicht aufgehenden Primideale	55
§ 6.	Die *Dirichlet*sche Idealfunction	58
§ 7.	Der quadratische Körper von der Grundzahl -3	60
§ 8.	Der kubische Reciprocitätssatz	68
§ 9.	Die Function ψ als Gruppencharakter	77
§ 10.	Die Wurzeln der Ordnung $[1, k\varrho]$	81
§ 11.	Binäre quadratische Formen	86
§ 12.	Beispiele	102
§ 13.	Der Grenzsatz von *Kronecker*	114

Die Existenzbedingungen eines von den ersten und zweiten Differentialquotienten der Coordinaten abhängigen kinetischen Potentials.[1])

(Von Herrn *Karl Boehm* in Heidelberg.)

Nachdem der von *Helmholtz*[2]) aufgestellte Satz über die Existenzbedingungen eines kinetischen Potentials in der Abhandlung des Herrn *Königsberger* über die Principien der Mechanik[3]) erstmals bewiesen worden war, hat Herr *A. Mayer* in den Berichten der Kgl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften[4]) gezeigt, dass der Beweis des genannten Satzes mit Hülfe eines Princips aus der Variationsrechnung in besonders einfacher Weise durchgeführt werden könne, und hat zugleich die Vermuthung ausgesprochen, dass die von ihm angewandte Methode auch die Lösung der von Herrn *Königsberger* aufgeworfenen Frage nach den Existenzbedingungen eines von den ν ersten Ableitungen der Coordinaten abhängigen kinetischen Potentials ermöglichen werde.

In der That verursacht eine solche Verallgemeinerung keine erheblichen Schwierigkeiten. Es kommt alles nur darauf an, das Problem so zu wenden, dass es sich auf die Behandlung eines Systems von linearen partiellen Differentialgleichungen zurückführen lässt. In welcher Weise

---

[1]) Die nachstehende Arbeit ist im Sommer 1897 entstanden und der Redaction dieses Journals eingereicht worden. Inzwischen hat Herr *Arthur Hirsch* im 50. Bande der Mathematischen Annalen das hier behandelte Problem nach einer anderen Methode in allgemeinster Weise gelöst.

[2]) Ueber die physikalische Bedeutung des Princips der kleinsten Wirkung. Journal für Mathematik, Bd. 100, S. 166. 1886. — Wissenschaftliche Abhandlungen, Bd. III, S. 236. Leipzig 1895.

[3]) Mathematische und Naturwissenschaftliche Mittheilungen aus den Sitzungsberichten der Königl. Preuss. Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Bericht vom 30. Juli 1896. S. 387.

[4]) Berichte der mathematisch-physikalischen Klasse. Sitzung vom 7. December 1896.

man dies erreichen könne, soll in der vorliegenden Arbeit zunächst für den Fall $\nu = 2$ gezeigt werden. Zu diesem Zwecke müssen wir uns — ehe wir die eigentliche Aufgabe angreifen — mit der Herleitung zweier Hülfsformeln befassen.

Seien $p_1, p_2, \cdots, p_n$ irgendwelche Functionen von t, und V eine Function von t; $p_1, p_2, \cdots, p_n$; $p_1', p_2', \cdots, p_n'$; $\cdots$; $p_1^{(\nu)}, p_2^{(\nu)}, \cdots, p_n^{(\nu)}$.

Bezeichnet man durch δV die Variation, welche V erfährt, wenn man den Variablen p die willkürlichen Variationen δp ertheilt, so hat man stets

$$\delta\left(\frac{d^\varrho V}{dt^\varrho}\right) \equiv \frac{d^\varrho}{dt^\varrho}(\delta V),$$

$$\sum_{\lambda=1}^{n}\left\{\frac{\partial\left(\frac{d^\varrho V}{dt^\varrho}\right)}{\partial p_\lambda}\delta p_\lambda + \frac{\partial\left(\frac{d^\varrho V}{dt^\varrho}\right)}{\partial p_\lambda'}\frac{d}{dt}(\delta p_\lambda) + \cdots + \frac{\partial\left(\frac{d^\varrho V}{dt^\varrho}\right)}{\partial p_\lambda^{(\nu+\varrho)}}\frac{d^{(\nu+\varrho)}}{dt^{(\nu+\varrho)}}(\delta p_\lambda)\right\} \equiv$$

$$\equiv \frac{d^\varrho}{dt^\varrho}\sum_{\lambda=1}^{n}\left\{\frac{\partial V}{\partial p_\lambda}\delta p_\lambda + \cdots + \frac{\partial V}{\partial p_\lambda^{(\sigma)}}\delta p_\lambda^{(\sigma)} + \cdots + \frac{\partial V}{\partial p_\lambda^{(\nu)}}\delta p_\lambda^{(\nu)}\right\}$$

$$\equiv \frac{d^{\varrho-1}}{dt^{\varrho-1}}\sum_{\lambda=1}^{n}\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial p_\lambda}\right)\cdot\delta p_\lambda + \cdots + \left[\frac{\partial V}{\partial p_\lambda^{(\sigma-1)}} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial p_\lambda^{(\sigma)}}\right)\right]\frac{d^\sigma}{dt^\sigma}\delta p_\lambda + \cdots + \frac{\partial V}{\partial p_\lambda^{(\nu)}}\cdot\frac{d^{(\nu+1)}}{dt^{(\nu+1)}}(\delta p_\lambda)\right\}$$

$$\equiv \frac{d^{\varrho-2}}{dt^{\varrho-2}}\sum_{\lambda=1}^{n}\left\{\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial V}{\partial p_\lambda}\right)\delta p_\lambda + \cdots + \left[\frac{\partial V}{\partial p_\lambda^{(\sigma-2)}} + 2\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial p_\lambda^{(\sigma-1)}}\right) + \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial V}{\partial p_\lambda^{(\sigma)}}\right)\right]\frac{d^\sigma}{dt^\sigma}(\delta p_\lambda) + \cdots\right.$$

$$\left. + \frac{\partial V}{\partial p_\lambda^{(\nu)}}\frac{d^{(\nu+2)}}{dt^{(\nu+2)}}(\delta p_\lambda)\right\}.$$

Man übersieht jetzt leicht, welches nach Ausführung aller ϱ Differentiationen nach t auf der rechten Seite der Coefficient von $\frac{d^\sigma}{dt^\sigma}(\delta p_\lambda)$ sein wird, nämlich:

für $\sigma \lessgtr \varrho$:

$$\binom{\varrho}{\sigma}\frac{d^{\varrho-\sigma}}{dt^{\varrho-\sigma}}\left(\frac{\partial V}{\partial p_\lambda}\right) + \binom{\varrho}{\sigma-1}\frac{d^{\varrho-\sigma+1}}{dt^{\varrho-\sigma+1}}\left(\frac{\partial V}{\partial p_\lambda'}\right) + \cdots + \binom{\varrho}{1}\frac{d^{\varrho-1}}{dt^{\varrho-1}}\left(\frac{\partial V}{\partial p_\lambda^{(\sigma-1)}}\right) + \frac{d^\varrho}{dt^\varrho}\left(\frac{\partial V}{\partial p_\lambda^{(\sigma)}}\right),$$

und für $\sigma \gtrless \varrho$:

$$\frac{\partial V}{\partial p_\lambda^{(\sigma-\varrho)}} + \binom{\varrho}{\varrho-1}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial p_\lambda^{(\sigma-\varrho+1)}}\right) + \cdots + \binom{\varrho}{1}\frac{d^{\varrho-1}}{dt^{\varrho-1}}\left(\frac{\partial V}{\partial p_\lambda^{(\sigma-1)}}\right) + \frac{d^\varrho}{dt^\varrho}\left(\frac{\partial V}{\partial p_\lambda^{(\sigma)}}\right).$$

Indem wir den einen dieser Ausdrücke gleich dem Coefficienten von $\frac{d^\sigma}{dt^\sigma}(\delta p_\lambda)$ auf der linken Seite unserer ersten Formel setzen, erhalten wir die beiden Relationen

für $\sigma \leqq \varrho$:

$$\text{(A)}\quad \frac{\partial}{\partial p_\lambda^{(\sigma)}}\left(\frac{d^\varrho V}{dt^\varrho}\right) \equiv \binom{\varrho}{\sigma}\frac{d^{\varrho-\sigma}}{dt^{\varrho-\sigma}}\left(\frac{\partial V}{\partial p_\lambda}\right) + \binom{\varrho}{\sigma-1}\frac{d^{\varrho-\sigma+1}}{dt^{\varrho-\sigma+1}}\left(\frac{\partial V}{\partial p_\lambda'}\right) + \cdots + \frac{d^\varrho}{dt^\varrho}\left(\frac{\partial V}{\partial p_\lambda^{(\sigma)}}\right),$$

und für $\sigma \geqq \varrho$:

$$(B)\qquad \frac{\partial}{\partial p_\lambda^{(\sigma)}}\left(\frac{d^\varrho V}{dt^\varrho}\right) \equiv \frac{\partial V}{\partial p_\lambda^{(\sigma-\varrho)}} + \binom{\varrho}{\varrho-1}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial p_\lambda^{(\sigma-\varrho+1)}}\right) + \cdots + \frac{d^\varrho}{dt^\varrho}\left(\frac{\partial V}{\partial p_\lambda^{(\sigma)}}\right).$$

Dieselben bilden die Verallgemeinerung der Formeln (A), (B), (C) in der erwähnten Abhandlung des Herrn ***Mayer***. Bildet man die Gleichung (A) für eine Function $R(t, p_1, p_2, \cdots, p_n)$, welche also nicht von den Ableitungen der p abhängt, so erhält man die Formel, von welcher Herr ***Königsberger*** in seiner Arbeit über die Principien der Mechanik ausgeht:

$$\frac{\partial}{\partial p_\lambda^{(\sigma)}}(R^{(\varrho)}) \equiv \binom{\varrho}{\sigma}\frac{d^{\varrho-\sigma}}{dt^{\varrho-\sigma}}\left(\frac{\partial R}{\partial p_\lambda}\right) \equiv \frac{\varrho(\varrho-1)\cdots(\varrho-\sigma+1)}{1\cdot 2\cdots\sigma}\cdot\frac{\partial(R^{(\varrho-\sigma)})}{\partial p_\lambda}.$$

Die Formeln (A) und (B) liegen in der nachstehenden Arbeit überall der Rechnung zu Grunde, so dass es mir überflüssig erschien, dies an einzelnen Stellen besonders anzumerken. Die Untersuchung, in welche wir jetzt eintreten, befasst sich mit folgender Frage:

Es seien $p_1, p_2, \ldots, p_n$ Functionen der unabhängigen Veränderlichen t. Wir suchen die Bedingungen aufzustellen, welchen n Function $P_1, P_2, \ldots, P_n$ von

$$t,\ p_\iota,\ \frac{dp_\iota}{dt} = p_\iota',\ \frac{d^2p_\iota}{dt^2} = p_\iota^{(2)},\ \frac{d^3p_\iota}{dt^3} = p_\iota^{(3)},\ \frac{d^4p_\iota}{dt^4} = p_\iota^{(4)} \qquad (\iota = 1, 2, \ldots, n)$$

genügen müssen, damit sie sich durch eine einzige Function H von $t, p_1, p_2, \ldots, p_n; p_1', p_2', \ldots, p_n'; p_1^{(2)}, p_2^{(2)}, \ldots, p_n^{(2)}$ in folgender Weise ausdrücken lassen:

$$(1.)\qquad P_\iota = -\left\{\frac{\partial H}{\partial p_\iota} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial p_\iota'}\right) + \frac{d^2}{dt_2}\left(\frac{\partial H}{\partial p_\iota^{(2)}}\right)\right\}. \qquad (\iota = 1, 2, \ldots, n)$$

Setzt man

$$(2.)\qquad \frac{\partial H}{\partial p_\iota^{(2)}} = \varphi_\iota,$$

$$(3.)\qquad \frac{\partial H}{\partial p_\iota'} - \frac{d\varphi_\iota}{dt} = \psi_\iota,$$

wodurch (1.) übergeht in

$$(4.)\qquad -\frac{\partial H}{\partial p_\iota} + \frac{d\psi_\iota}{dt} = P_\iota,$$

so ist zu untersuchen, unter welchen Bedingungen sich $2n+1$ Functionen $\varphi_\iota, \psi_\iota, H$ gemäss den Gleichungen (2.), (3.), (4.) bestimmen lassen.

Zunächst folgt aus (4.), da H von $p_\varkappa^{(3)}$ und $p_\varkappa^{(4)}$, ψ_ι von $p_\varkappa^{(4)}$ unabhängig ist, dass

$$(5.)\quad \begin{cases} \text{a)} & \dfrac{\partial P_\iota}{\partial p_\varkappa^{(4)}} = \dfrac{\partial \psi_\iota}{\partial p_\varkappa^{(3)}}, \\ \text{b)} & \dfrac{\partial P_\iota}{\partial p_\varkappa^{(3)}} = \dfrac{\partial \psi_\iota}{\partial p_\varkappa^{(2)}} + \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial \psi_\iota}{\partial p_\varkappa^{(3)}}\right). \end{cases}$$

Wir gehen dazu über, für die Gleichungen (2.), (3.), (4.) die Integrabilitätsbedingungen aufzustellen. Damit eine Function H der p_ι' und $p_\iota^{(2)}$ existire, welche den Gleichungen (2.) und (3.) genügt, ist es nothwendig und hinreichend, die ψ_ι so als Functionen der p_ι', $p_\iota^{(2)}$, $p_\iota^{(3)}$ und die φ_ι so als Functionen der p_ι' und $p_\iota^{(2)}$ zu bestimmen, dass die Gleichungen

$$(6.)\quad \begin{cases} \text{a)} & \dfrac{\partial \psi_\iota}{\partial p_\varkappa^{(3)}} = \dfrac{\partial \psi_\varkappa}{\partial p_\iota^{(3)}}, \\ \text{b)} & \dfrac{\partial \psi_\iota}{\partial p_\varkappa^{(2)}} + \dfrac{\partial \psi_\varkappa}{\partial p_\iota^{(2)}} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial \psi_\iota}{\partial p_\varkappa^{(3)}} + \dfrac{\partial \psi_\varkappa}{\partial p_\iota^{(3)}}\right), \\ \text{c)} & \dfrac{\partial \psi_\iota}{\partial p_\varkappa'} - \dfrac{\partial \psi_\varkappa}{\partial p_\iota'} = -\dfrac{\partial}{\partial p_\varkappa'}\left(\dfrac{d\varphi_\iota}{dt}\right) + \dfrac{\partial}{\partial p_\iota'}\left(\dfrac{d\varphi_\varkappa}{dt}\right), \end{cases}$$

und

$$(7.)\quad \begin{cases} \text{a)} & \dfrac{\partial \varphi_\iota}{\partial p_\varkappa^{(2)}} = -\dfrac{\partial \psi_\varkappa}{\partial p_\iota^{(3)}}, \\ \text{b)} & \dfrac{\partial \varphi_\iota}{\partial p_\varkappa'} - \dfrac{\partial \varphi_\varkappa}{\partial p_\iota'} = -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial \psi_\cdot}{\partial p_\varkappa^{(2)}} - \dfrac{\partial \psi_\varkappa}{\partial p_\iota^{(2)}}\right), \end{cases}$$

erfüllt sind. Dieselben können leicht mit Hülfe der Formeln (A) und (B) aus den $\frac{n(n-1)}{2} + n^2 + \frac{n(n-1)}{2}$ Integrabilitätsbedingungen

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial H}{\partial p_\iota^{(2)}}\right)}{\partial p_\varkappa^{(2)}} = \frac{\partial\left(\frac{\partial H}{\partial p_\varkappa^{(2)}}\right)}{\partial p_\iota^{(2)}}, \quad \frac{\partial\left(\frac{\partial H}{\partial p_\varkappa^{(2)}}\right)}{\partial p_\iota'} = \frac{\partial\left(\frac{\partial H}{\partial p_\iota'}\right)}{\partial p_\varkappa^{(2)}}, \quad \frac{\partial\left(\frac{\partial H}{\partial p_\iota'}\right)}{\partial p_\varkappa'} = \frac{\partial\left(\frac{\partial H}{\partial p_\varkappa'}\right)}{\partial p_\iota'}$$

hergeleitet werden und entsprechen den Gleichungen (7.), (8.), (9.), (10.), (11.) in der Abhandlung des Herrn *A. Mayer*. Ausserdem soll nun H als Function der p_ι die Gleichungen (4.) befriedigen; es treten also noch die $n^2 + n^2 + \frac{n(n-1)}{2}$ Bedingungen

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial H}{\partial p_\iota}\right)}{\partial p_\varkappa^{(2)}} = \frac{\partial\left(\frac{\partial H}{\partial p_\varkappa^{(2)}}\right)}{\partial p_\iota}, \quad \frac{\partial\left(\frac{\partial H}{\partial p_\iota}\right)}{\partial p_\varkappa'} = \frac{\partial\left(\frac{\partial H}{\partial p_\varkappa'}\right)}{\partial p_\iota}, \quad \frac{\partial\left(\frac{\partial H}{\partial p_\iota}\right)}{\partial p_\varkappa} = \frac{\partial\left(\frac{\partial H}{\partial p_\varkappa}\right)}{\partial p_\iota}.$$

hinzu, welche sich in folgende Form bringen lassen:

$$(8.)\quad \begin{cases} \text{a)} & \dfrac{\partial}{\partial p_\varkappa^{(2)}}\left(\dfrac{d\psi_\iota}{dt} - P_\iota\right) = \dfrac{\partial \varphi_\varkappa}{\partial p_\iota}, \\ \text{b)} & \dfrac{\partial}{\partial p_\varkappa'}\left(\dfrac{d\psi_\iota}{dt} - P_\iota\right) = \dfrac{\partial}{\partial p_\iota}\left(\dfrac{d\varphi_\varkappa}{dt} + \psi_\varkappa\right), \\ \text{c)} & \dfrac{\partial}{\partial p_\varkappa}\left(\dfrac{d\psi_\iota}{dt} - P_\iota\right) = \dfrac{\partial}{\partial p_\iota}\left(\dfrac{d\psi_\varkappa}{dt} - P_\varkappa\right). \end{cases}$$

Unser Problem ist darauf zurückgeführt, die Bedingungen anzugeben, welchen die P_ι unterworfen werden müssen, damit den Gleichungen (5.), (6.), (7.) und (8.) durch $2n$ Functionen φ_ι und ψ_ι genügt werden kann. Denn ist dies der Fall, so existirt jedenfalls eine Function H, welche die geforderten Eigenschaften besitzt, und zwar lässt sich dieselbe gemäss den Gleichungen (2.), (3.) und (4.) durch blosse Quadraturen bestimmen, wenn die φ_ι und ψ_ι gefunden sind.

Zur Lösung der so reducirten Aufgabe formen wir zuerst die Gleichungen (6.) und (8.) mit Benutzung von (5.) und (7.) um. Aus (6^a.), (6^b.), (6^c.) erhält man die Beziehungen

$$(9.)\qquad \frac{\partial P_\iota}{\partial p_\varkappa^{(4)}} = \frac{\partial P_\varkappa}{\partial p_\iota^{(4)}},$$

$$(10.)\qquad \frac{\partial P_\iota}{\partial p_\varkappa^{(3)}} + \frac{\partial P_\varkappa}{\partial p_\iota^{(3)}} = 2\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p_\varkappa^{(4)}} + \frac{\partial P_\varkappa}{\partial p_\iota^{(4)}}\right),$$

$$(11.)\qquad \frac{\partial \psi_\iota}{\partial p_\varkappa'} - \frac{\partial \psi_\varkappa}{\partial p_\iota'} + \frac{\partial \varphi_\iota}{\partial p_\varkappa} - \frac{\partial \varphi_\varkappa}{\partial p_\iota} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p_\varkappa^{(3)}} - \frac{\partial P_\varkappa}{\partial p_\iota^{(3)}}\right),$$

aus welchen man umgekehrt mit Hülfe von (5.) und (7^a.) die Gleichungen (6.) herleiten kann. Bildet man ferner Summe und Differenz der Gleichung (8^a.) oder

$$\frac{\partial P_\iota}{\partial p_\varkappa^{(2)}} = -\frac{\partial \varphi_\varkappa}{\partial p_\iota} + \frac{\partial \psi_\iota}{\partial p_\varkappa'} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \psi_\iota}{\partial p_\varkappa^{(2)}}\right)$$

und derjenigen, welche aus ihr durch Vertauschung von ι und $\varkappa$ hervorgeht, so ergeben sich

$$(12.)\qquad \frac{\partial P_\iota}{\partial p_\varkappa^{(2)}} - \frac{\partial P_\varkappa}{\partial p_\iota^{(2)}} = \tfrac{3}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p_\varkappa^{(3)}} - \frac{\partial P_\varkappa}{\partial p_\iota^{(3)}}\right)$$

und

$$(13.)\qquad \frac{\partial P_\iota}{\partial p_\varkappa^{(2)}} + \frac{\partial P_\varkappa}{\partial p_\iota^{(2)}} = -\frac{\partial \varphi_\iota}{\partial p_\varkappa} - \frac{\partial \varphi_\varkappa}{\partial p_\iota} + \frac{\partial \psi_\iota}{\partial p_\varkappa'} + \frac{\partial \psi_\varkappa}{\partial p_\iota'} + 2\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p_\varkappa^{(4)}}\right),$$

welche Formeln in Verbindung mit (5.), (7.), (9.), (10.), (11.) der Gleichung (8^a.) vollkommen äquivalent sind. Das gleiche Verfahren, auf (8^b.) oder

$$\frac{\partial P_\iota}{\partial p'_\varkappa} = \frac{\partial \psi_\iota}{\partial p_\varkappa} - \frac{\partial \psi_\varkappa}{\partial p_\iota} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \psi_\iota}{\partial p'_\varkappa}\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \varphi_\varkappa}{\partial p_\iota}\right)$$

angewendet, lehrt uns, dass diese Gleichung ersetzt werden kann durch

$$(14.) \qquad \frac{\partial P_\iota}{\partial p'_\varkappa} + \frac{\partial P_\varkappa}{\partial p'_\iota} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p_\varkappa^{(2)}} + \frac{\partial P_\varkappa}{\partial p_\iota^{(2)}}\right) - 2\frac{d^3}{dt^3}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial P_\varkappa^{(4)}}\right)$$

und

$$(15.) \qquad \frac{\partial P_\iota}{\partial p'_\varkappa} - \frac{\partial P_\varkappa}{\partial p'_\iota} = 2\left(\frac{\partial \psi_\iota}{\partial p_\varkappa} - \frac{\partial \psi_\varkappa}{\partial p_\iota}\right) + \tfrac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p_\varkappa^{(3)}} - \frac{\partial P_\varkappa}{\partial p_\iota^{(3)}}\right).$$

Endlich ist in einer Zusammenstellung mit den vorhergehenden die Gleichung (8^c.) äquivalent mit

$$(16.) \quad 2\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p_\varkappa} - \frac{\partial P_\varkappa}{\partial p_\iota}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p'_\varkappa} - \frac{\partial P_\varkappa}{\partial p'_\iota}\right) - \tfrac{1}{2}\frac{d^3}{dt^3}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p_\varkappa^{(3)}} - \frac{\partial P_\varkappa}{\partial p_\iota^{(3)}}\right),$$

so dass wir zu folgendem Resultate gelangen.

Damit eine Function H existire, welche die Forderungen (1.) erfüllt, ist das Bestehen der Identiäten (9.), (10.), (12.), (14.), (16.) nothwendig. Wenn sich alsdann die $2n$ Functionen φ_ι und ψ_ι gemäss den Gleichungen (5.), (7.), (11.), (13.) und (15.) bestimmen lassen, so wird die angegebene Bedingung zugleich hinreichend sein. Dass dies der Fall ist, soll im Folgenden gezeigt werden.

Die Gleichungen

$$(11.) \qquad \frac{\partial \varphi_\iota}{\partial p_\varkappa} - \frac{\partial \varphi_\varkappa}{\partial p_\iota} + \frac{\partial \psi_\iota}{\partial p'_\varkappa} - \frac{\partial \psi_\varkappa}{\partial p'_\iota} = \tfrac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p_\varkappa^{(3)}} - \frac{\partial P_\varkappa}{\partial p_\iota^{(3)}}\right)$$

und

$$(13.) \quad -\frac{\partial \varphi_\iota}{\partial p_\varkappa} - \frac{\partial \varphi_\varkappa}{\partial p_\iota} + \frac{\partial \psi_\iota}{\partial p'_\varkappa} + \frac{\partial \psi_\varkappa}{\partial p'_\iota} = \frac{\partial P_\iota}{\partial p_\varkappa^{(2)}} + \frac{\partial P_\varkappa}{\partial p_\iota^{(2)}} - 2\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p_\varkappa^{(4)}}\right)$$

lassen sich ersetzen durch ihre Summe und ihre Differenz, also durch die Gleichungen

$$(17.) \quad \frac{\partial \varphi_\iota}{\partial p_\varkappa} - \frac{\partial \psi_\varkappa}{\partial p'_\iota} = -\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p_\varkappa^{(2)}} + \frac{\partial P_\varkappa}{\partial p_\iota^{(2)}}\right) + \tfrac{1}{4}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p_\varkappa^{(3)}} - \frac{\partial P_\varkappa}{\partial p_\iota^{(3)}}\right) + \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p_\varkappa^{(4)}}\right),$$

und

$$(18.) \quad \frac{\partial \varphi_\varkappa}{\partial p_\iota} - \frac{\partial \psi_\iota}{\partial p'_\varkappa} = -\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p_\varkappa^{(2)}} + \frac{\partial P_\varkappa}{\partial p_\iota^{(2)}}\right) + \tfrac{1}{4}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial P_\varkappa}{\partial p_\iota^{(3)}} - \frac{\partial P_\iota}{\partial p_\varkappa^{(3)}}\right) + \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p_\varkappa^{(4)}}\right),$$

deren jede für $\iota = 1, 2, \ldots, n$; $\varkappa = 1, 2, \ldots, n$ bestehen muss. Da nun, mit

Berücksichtigung der Identitäten (9.), (18.) aus (17.) durch Vertauschung von ι und $\varkappa$ hervorgeht, so sind die $\frac{1}{2}n(n-1)$ Gleichungen (18.) mit den $\frac{1}{2}n(n-1)$ Gleichungen (17.) identisch, können also weggelassen werden.

Es müssen demnach die $2n$ Functionen φ_ι und ψ_ι Integrale des folgenden simultanen Systems linearer partieller Differentialgleichungen erster Ordnung sein:

$$\left\{\begin{array}{ll}
(7^{\text{a}}.) & \dfrac{\partial \varphi_\iota}{\partial p_\varkappa^{(2)}} = -\dfrac{\partial P_\varkappa}{\partial p_\iota^{(4)}}, \\
(7^{\text{b}}.) & \dfrac{\partial \varphi_\iota}{\partial p'_\varkappa} - \dfrac{\partial \varphi_\varkappa}{\partial p'_\iota} = -\frac{1}{2}\left(\dfrac{\partial P_\iota}{\partial p_\varkappa^{(3)}} - \dfrac{\partial P_\varkappa}{\partial p_\iota^{(3)}}\right), \\
(5^{\text{a}}.) & \dfrac{\partial \psi_\iota}{\partial p_\varkappa^{(3)}} = \dfrac{\partial P_\varkappa}{\partial p_\iota^{(4)}}, \\
(5^{\text{b}}.) & \dfrac{\partial \psi_\iota}{\partial p_\varkappa^{(2)}} = \dfrac{\partial P_\iota}{\partial p_\varkappa^{(3)}} - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial P_\iota}{\partial p_\varkappa^{(4)}}\right), \\
(17.) & \dfrac{\partial \varphi_\iota}{\partial p_\varkappa} - \dfrac{\partial \psi_\varkappa}{\partial p'_\iota} = -\frac{1}{2}\left(\dfrac{\partial P_\iota}{\partial p_\varkappa^{(2)}} + \dfrac{\partial P_\varkappa}{\partial p_\iota^{(2)}}\right) + \frac{1}{4}\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial P_\iota}{\partial p_\varkappa^{(3)}} - \dfrac{\partial P_\varkappa}{\partial p_\iota^{(3)}}\right) + \dfrac{d^2}{dt^2}\left(\dfrac{\partial P_\iota}{\partial p_\varkappa^{(4)}}\right), \\
(15.) & \dfrac{\partial \psi_\iota}{\partial p_\varkappa} - \dfrac{\partial \psi_\varkappa}{\partial p_\iota} = \frac{1}{2}\left(\dfrac{\partial P_\iota}{\partial p'_\varkappa} - \dfrac{\partial P_\varkappa}{\partial p'_\iota}\right) - \frac{1}{4}\dfrac{d^2}{dt^2}\left(\dfrac{\partial P_\iota}{\partial p_\varkappa^{(3)}} - \dfrac{\partial P_\varkappa}{\partial p_\iota^{(3)}}\right).
\end{array}\right.$$

Um zu zeigen, dass dieses System integrabel ist, werden wir aus den Identitäten

$$\left\{\begin{array}{ll}
(9.) & \dfrac{\partial P_\iota}{\partial p_\varkappa^{(4)}} \equiv \dfrac{\partial P_\varkappa}{\partial p_\iota^{(4)}}, \\
(10.) & \dfrac{\partial P_\iota}{\partial p_\varkappa^{(3)}} + \dfrac{\partial P_\varkappa}{\partial p_\iota^{(3)}} \equiv 4\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial P_\iota}{\partial p_\varkappa^{(4)}}\right), \\
(12.) & \dfrac{\partial P_\iota}{\partial p_\varkappa^{(2)}} - \dfrac{\partial P_\varkappa}{\partial p_\iota^{(2)}} \equiv \frac{3}{2}\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial P_\iota}{\partial p_\varkappa^{(3)}} - \dfrac{\partial P_\varkappa}{\partial p_\iota^{(3)}}\right), \\
(14.) & \dfrac{\partial P_\iota}{\partial p'_\varkappa} + \dfrac{\partial P_\varkappa}{\partial p'_\iota} \equiv \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial P_\iota}{\partial p_\varkappa^{(2)}} + \dfrac{\partial P_\varkappa}{\partial p_\iota^{(2)}}\right) - 2\dfrac{d^3}{dt^3}\left(\dfrac{\partial P_\iota}{\partial p_\varkappa^{(4)}}\right), \\
(16.) & \dfrac{\partial P_\iota}{\partial p_\varkappa} - \dfrac{\partial P_\varkappa}{\partial p_\iota} \equiv \frac{1}{2}\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial P_\iota}{\partial p'_\varkappa} - \dfrac{\partial P_\varkappa}{\partial p'_\iota}\right) - \frac{1}{4}\dfrac{d^3}{dt^3}\left(\dfrac{\partial P_\iota}{\partial p_\varkappa^{(3)}} - \dfrac{\partial P_\varkappa}{\partial p_\iota^{(3)}}\right),
\end{array}\right.$$

welche jetzt als erfüllt anzusehen sind, eine Reihe weiterer Relationen herleiten müssen.

Aus (10.) folgt, da links fünfte Differentialquotienten der p nicht vorkommen,

$$(19.) \qquad \frac{\partial^2 P_\iota}{\partial p_\varkappa^{(4)} \partial p_\lambda^{(4)}} \equiv 0.$$

Ebenso erhalten wir, indem wir (14.) und (16.) nach $p_\lambda^{(6)}$ differentiiren:

$$\frac{\partial^2 P_\iota}{\partial p_\varkappa^{(4)} \partial p_\lambda^{(3)}} \equiv 0, \tag{20.}$$

$$\frac{\partial}{\partial p_\lambda^{(3)}}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p_\varkappa^{(3)}} - \frac{\partial P_\varkappa}{\partial p_\iota^{(3)}}\right) \equiv 0, \tag{21.}$$

ferner, indem wir (14.) nach $p_\lambda^{(5)}$, (12.) nach $p_\lambda^{(4)}$ und (10.) nach $p_\lambda^{(3)}$ differentiiren:

$$\frac{\partial}{\partial p_\lambda^{(4)}}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p_\varkappa^{(2)}} + \frac{\partial P_\varkappa}{\partial p_\iota^{(2)}}\right) - 2\frac{\partial^2 P_\iota}{\partial p_\lambda^{(2)} \partial p_{\varkappa\varrho}^{(4)}} \equiv 0, \tag{22.}$$

$$\frac{\partial}{\partial p_\lambda^{(4)}}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p_\varkappa^{(2)}} - \frac{\partial P_\varkappa}{\partial p_\iota^{(2)}}\right) \equiv 0, \tag{23.}$$

$$\frac{\partial}{\partial p_\lambda^{(3)}}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p_\varkappa^{(3)}} + \frac{\partial P_\varkappa}{\partial p_\iota^{(3)}}\right) \equiv 4\frac{\partial^2 P_\iota}{\partial p_\lambda^{(2)} \partial p_\varkappa^{(4)}}, \tag{24.}$$

und durch Verbindung von (21.) und (24.):

$$\frac{\partial^2 P_\iota}{\partial p_\lambda^{(3)} \partial p_\varkappa^{(3)}} - 2\frac{\partial^2 P_\iota}{\partial p_\lambda^{(2)} \partial p_\varkappa^{(4)}} \equiv 0. \tag{24ª.}$$

Vier weitere Identitäten ergeben sich durch Differentiation der Gleichungen (16.), (14.), (12.), (10.) bezw. nach $p_\lambda^{(5)}$, $p_\lambda^{(4)}$, $p_\lambda^{(3)}$, $p_\lambda^{(2)}$ mit Benutzung der bereits oben abgeleiteten Formeln:

$$\frac{\partial}{\partial p_\lambda^{(4)}}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p_\varkappa'} - \frac{\partial P_\varkappa}{\partial p_\iota'}\right) - \tfrac{1}{2}\frac{\partial}{\partial p_\lambda^{(2)}}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p_\varkappa^{(3)}} - \frac{\partial P_\varkappa}{\partial p_\iota^{(3)}}\right) \equiv 0, \tag{25.}$$

woraus nach (9.) unmittelbar folgt:

$$\frac{\partial}{\partial p_\iota^{(2)}}\left(\frac{\partial P_\varkappa}{\partial p_\lambda^{(3)}} - \frac{\partial P_\lambda}{\partial p_\varkappa^{(3)}}\right) + \frac{\partial}{\partial p_\varkappa^{(2)}}\left(\frac{\partial P_\lambda}{\partial p_\iota^{(3)}} - \frac{\partial P_\iota}{\partial p_\lambda^{(3)}}\right) + \frac{\partial}{\partial p_\lambda^{(2)}}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p_\varkappa^{(3)}} - \frac{\partial P_\varkappa}{\partial p_\iota^{(3)}}\right) \equiv 0, \tag{25ª.}$$

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial p_\lambda^{(4)}}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p_\lambda'} + \frac{\partial P_\varkappa}{\partial p_\iota'}\right) - \frac{\partial}{\partial p_\lambda^{(3)}}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p_\varkappa^{(2)}} + \frac{\partial P_\varkappa}{\partial p_\iota^{(2)}}\right) - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial p_\lambda^{(4)}}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p_\varkappa^{(2)}} + \frac{\partial P_\varkappa}{\partial p_\iota^{(2)}}\right)\right] \\ &\qquad + 2\frac{\partial^2 P_\iota}{\partial p_\lambda' \partial p_\varkappa^{(4)}} + 6\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial^2 P_\iota}{\partial p_\lambda^{(2)} \partial p_\varkappa^{(4)}}\right] \equiv 0, \end{aligned}\right. \tag{26.}$$

oder nach (22.):

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial p_\lambda^{(4)}}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p_\varkappa'} + \frac{\partial P_\varkappa}{\partial p_\iota'}\right) - \frac{\partial}{\partial p_\lambda^{(3)}}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p_\varkappa^{(2)}} + \frac{\partial P_\varkappa}{\partial p_\iota^{(2)}}\right) + 2\frac{\partial^2 P_\iota}{\partial p_\lambda' \partial p_\varkappa^{(4)}} \\ &\qquad + 4\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial^2 P_\iota}{\partial p_\lambda^{(2)} \partial p_\varkappa^{(4)}}\right] \equiv 0, \end{aligned}\right. \tag{26ª.}$$

$$\frac{\partial}{\partial p_\lambda^{(3)}}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p_\varkappa^{(2)}} - \frac{\partial P_\varkappa}{\partial p_\iota^{(2)}}\right) \equiv \tfrac{3}{2}\frac{\partial}{\partial p_\lambda^{(2)}}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p_\varkappa^{(3)}} - \frac{\partial P_\varkappa}{\partial p_\iota^{(3)}}\right) \equiv 3\frac{\partial}{\partial p_\lambda^{(4)}}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p_\varkappa'} - \frac{\partial P_\varkappa}{\partial p_\iota'}\right), \tag{27.}$$

$$\frac{\partial}{\partial p_\lambda^{(2)}}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p_\varkappa^{(3)}} + \frac{\partial P_\varkappa}{\partial p_\iota^{(3)}}\right) \equiv 4\frac{\partial^2 P_\iota}{\partial p_\lambda' \partial p_\varkappa^{(4)}} + 4\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial^2 P_\iota}{\partial p_\lambda^{(2)} \partial p_\varkappa^{(4)}}\right]. \tag{28.}$$

Wenn wir von der Gleichung (25.) diejenige abziehen, welche aus ihr durch Vertauschung von λ und $\varkappa$ hervorgeht, und dabei die Relationen (9.) und (27.) berücksichtigen, so erhalten wir

$$(29.)\qquad \frac{\partial^2 P_\iota}{\partial p_\lambda^{(2)}\partial p_\varkappa^{(3)}} - \frac{\partial^2 P_\iota}{\partial p_\varkappa^{(2)}\partial p_\lambda^{(3)}} - \frac{\partial}{\partial p_\iota^{(4)}}\left(\frac{\partial P_\varkappa}{\partial p'_\lambda} - \frac{\partial P_\lambda}{\partial p'_\varkappa}\right) \equiv 0.$$

Weniger einfach als die vorhergehenden sind die vier Formeln (30.), (31.), (32.) und (33.), welche sich aus den Identitäten (16.), (14.), (12.), (10.) gewinnen lassen, wenn diese bezw. nach $p_\lambda^{(4)}$, $p_\lambda^{(3)}$, $p_\lambda^{(2)}$, p'_λ differentiirt werden.

$$(30.)\quad \begin{cases} 2\frac{\partial}{\partial p_\lambda^{(4)}}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p_\varkappa} - \frac{\partial P_\varkappa}{\partial p_\iota}\right) - \frac{\partial}{\partial p_\lambda^{(3)}}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p'_\varkappa} - \frac{\partial P_\varkappa}{\partial p'_\iota}\right) - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial p_\lambda^{(4)}}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p'_\varkappa} - \frac{\partial P_\varkappa}{\partial p'_\iota}\right)\right] \\ \qquad + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial p'_\lambda}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p_\varkappa^{(3)}} - \frac{\partial P_\varkappa}{\partial p_\iota^{(3)}}\right) + \frac{3}{2}\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial p_\lambda^{(2)}}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p_\varkappa^{(3)}} - \frac{\partial P_\varkappa}{\partial p_\iota^{(3)}}\right)\right] \equiv 0 \end{cases}$$

oder mit Benutzung von (27.):

$$(30^a.)\quad \begin{cases} 2\frac{\partial}{\partial p_\lambda^{(4)}}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p_\varkappa} - \frac{\partial P_\varkappa}{\partial p_\iota}\right) - \frac{\partial}{\partial p_\lambda^{(3)}}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p'_\varkappa} - \frac{\partial P_\varkappa}{\partial p'_\iota}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial p'_\lambda}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p_\varkappa^{(3)}} - \frac{\partial P_\varkappa}{\partial P_\iota^{(3)}}\right) \\ \qquad + 2\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial p_\lambda^{(4)}}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p'_\varkappa} - \frac{\partial P_\varkappa}{\partial p'_\iota}\right)\right] \equiv 0, \end{cases}$$

$$(31.)\quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial p_\lambda^{(3)}}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p'_\varkappa} + \frac{\partial P_\varkappa}{\partial p'_\iota}\right) - \frac{\partial}{\partial p_\lambda^{(2)}}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p_\varkappa^{(2)}} + \frac{\partial P_\varkappa}{\partial p_\iota^{(2)}}\right) - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial p_\lambda^{(3)}}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p_\varkappa^{(2)}} + \frac{\partial P}{\partial p_\iota^{(2)}}\right)\right] \\ \qquad + 2\frac{\partial^2 P_\iota}{\partial p_\lambda \partial p_\varkappa^{(4)}} + 6\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial^2 P_\iota}{\partial p'_\lambda \partial p_\varkappa^{(4)}}\right] + 6\frac{d^2}{dt^2}\left[\frac{\partial^2 P_\iota}{\partial p_\lambda^{(2)}\partial p_\varkappa^{(4)}}\right] \equiv 0 \end{cases}$$

oder mit Benutzung von (26ª.):

$$(31^a.)\quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial p_\lambda^{(3)}}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p'_\varkappa} + \frac{\partial P_\varkappa}{\partial p'_\iota}\right) - \frac{\partial}{\partial p_\lambda^{(2)}}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p_\varkappa^{(2)}} + \frac{\partial P_\varkappa}{\partial p_\iota^{(2)}}\right) + 2\frac{\partial^2 P_\iota}{\partial p_\lambda \partial p_\varkappa^{(4)}} \\ \qquad - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial p_\lambda^{(4)}}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p'_\varkappa} + \frac{\partial P_\varkappa}{\partial p'_\iota}\right) - 4\frac{\partial^2 P_\iota}{\partial p'_\lambda \partial p_\varkappa^{(4)}}\right] + 2\frac{d^2}{dt^2}\left[\frac{\partial^2 P_\iota}{\partial p_\lambda^{(2)}\partial p_\varkappa^{(4)}}\right] \equiv 0, \end{cases}$$

$$(32.)\quad \frac{\partial}{\partial p_\lambda^{(2)}}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p_\varkappa^{(2)}} - \frac{\partial P_\varkappa}{\partial p_\iota^{(2)}}\right) - \frac{3}{2}\frac{\partial}{\partial p'_\lambda}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p_\varkappa^{(3)}} - \frac{\partial P_\varkappa}{\partial p_\iota^{(3)}}\right) - \frac{3}{2}\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial p_\lambda^{(2)}}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p_\varkappa^{(3)}} - \frac{\partial P_\varkappa}{\partial p_\iota^{(3)}}\right)\right] \equiv 0,$$

$$(33.)\quad \frac{\partial}{\partial p'_\lambda}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p_\varkappa^{(3)}} + \frac{\partial P_\varkappa}{\partial p_\iota^{(3)}}\right) - 4\frac{\partial^2 P_\iota}{\partial p_\lambda \partial p_\varkappa^{(4)}} - 4\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial^2 P_\iota}{\partial p'_\lambda \partial p_\varkappa^{(4)}}\right] \equiv 0,$$

oder

$$(33^a.)\quad \begin{cases} 2\frac{\partial}{\partial p_\varkappa^{(3)}}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p'_\lambda} - \frac{\partial P_\lambda}{\partial p'_\iota}\right) - \frac{\partial}{\partial p'_\lambda}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p_\varkappa^{(3)}} - \frac{\partial P_\varkappa}{\partial p_\iota^{(3)}}\right) + \frac{\partial}{\partial p'_\iota}\left(\frac{\partial P_\lambda}{\partial p_\varkappa^{(3)}} - \frac{\partial P_\varkappa}{\partial p_\lambda^{(3)}}\right) \\ \qquad - 4\frac{\partial}{\partial p_\varkappa^{(4)}}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p_\lambda} - \frac{\partial P_\lambda}{\partial p_\iota}\right) - 4\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial p_\varkappa^{(4)}}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p'_\lambda} - \frac{\partial P_\lambda}{\partial p'_\iota}\right)\right] \equiv 0. \end{cases}$$

Aus (32.) folgt mit Benutzung von (25ª.):

$$(34.)\quad \frac{\partial}{\partial p'_\iota}\Big(\frac{\partial P_\varkappa}{\partial p_\lambda^{(3)}}-\frac{\partial P_\lambda}{\partial p_\varkappa^{(3)}}\Big)+\frac{\partial}{\partial p'_\varkappa}\Big(\frac{\partial P_\lambda}{\partial p_\iota^{(3)}}-\frac{\partial P_\iota}{\partial p_\lambda^{(3)}}\Big)+\frac{\partial}{\partial p'_\lambda}\Big(\frac{\partial P_\iota}{\partial p_\varkappa^{(3)}}-\frac{\partial P_\varkappa}{\partial p_\iota^{(3)}}\Big)\equiv 0,$$

so dass (33ª.) in eine noch etwas einfachere Form gebracht werden kann:

$$(33^{b}.)\quad \left\{\begin{aligned} &2\frac{\partial}{\partial p_\varkappa^{(3)}}\Big(\frac{\partial P_\iota}{\partial p'_\lambda}-\frac{\partial P_\lambda}{\partial p'_\iota}\Big)+\frac{\partial}{\partial p'_\varkappa}\Big(\frac{\partial P_\lambda}{\partial p_\iota^{(3)}}-\frac{\partial P_\iota}{\partial p_\lambda^{(3)}}\Big)-4\frac{\partial}{\partial p_\varkappa^{(4)}}\Big(\frac{\partial P_\iota}{\partial p_\lambda}-\frac{\partial P_\lambda}{\partial p_\iota}\Big)\\ &\qquad -4\frac{d}{dt}\Big[\frac{\partial}{\partial p_\varkappa^{(4)}}\Big(\frac{\partial P_\iota}{\partial p'_\lambda}-\frac{\partial P_\lambda}{\partial p'_\iota}\Big)\Big]\equiv 0. \end{aligned}\right.$$

Obwohl die soeben hergeleiteten Identitäten für unsere Zwecke nicht ausreichen werden, soll deren Anzahl doch erst dann vermehrt werden, wenn sich die Nothwendigkeit hiervon im Laufe der folgenden Untersuchung herausstellen wird.

Wir beschäftigen uns zunächst mit den Gleichungen (7ª.) und erkennen mit Hülfe von (19.) und (20.), dass deren rechte Seiten von den dritten und vierten Ableitungen der p frei sind, dass ferner nach (23.)

$$\frac{\partial}{\partial p_\iota^{(4)}}\Big(\frac{\partial P_\varkappa}{\partial p_\lambda^{(2)}}-\frac{\partial P_\lambda}{\partial p_\varkappa^{(2)}}\Big)\equiv 0,$$

d. h. dass die n Gleichungen, welchen die Function φ_ι gleichzeitig genügen soll, mit einander verträglich sind. Es ergiebt sich also mit Hülfe blosser Quadraturen φ_ι als Summe einer bestimmten Function von allen p sowie deren ersten und zweiten Differentialquotienten und einer willkürlichen Function von den p und deren ersten Differentialquotienten, was wir in folgender Weise bezeichnen wollen:

$$\varphi_\iota = \chi_\iota(p, p', p^{(2)})+\omega_\iota(p, p').$$

Dass sowohl χ_ι als ω_ι noch explicite von der unabhägigen Variablen t abhängig sein können — jenachdem die P_ι es sind oder nicht — interessirt uns hier nicht und ist deshalb auch in der angewandten Bezeichnung nicht zum Ausdruck gebracht worden.

Zur Bestimmung der willkürlichen Functionen ω_ι setzen wir den soeben gefundenen Ausdruck für φ_ι in die Gleichungen (7ᵇ.) ein:

$$(7^{b}.)\qquad \frac{\partial\omega_\iota}{\partial p'_\varkappa}-\frac{\partial\omega_\varkappa}{\partial p'_\iota}=-\Big(\frac{\partial\chi_\iota}{\partial p'_\varkappa}-\frac{\partial\chi_\varkappa}{\partial p'_\iota}\Big)-\tfrac{1}{2}\Big(\frac{\partial P_\iota}{\partial p_\varkappa^{(3)}}-\frac{\partial P_\varkappa}{\partial p_\iota^{(3)}}\Big)\equiv\Omega_{\iota\varkappa},$$

$$\frac{\partial\Omega_{\iota\varkappa}}{\partial p_\lambda^{(4)}}\equiv-\tfrac{1}{2}\frac{\partial}{\partial p_\lambda^{(4)}}\Big(\frac{\partial P_\iota}{\partial p_\varkappa^{(3)}}-\frac{\partial P_\varkappa}{\partial p_\iota^{(3)}}\Big)\equiv 0,\quad [\text{nach (20.)}],$$

$$\frac{\partial \Omega_{\iota\varkappa}}{\partial p_\lambda^{(3)}} \equiv -\tfrac{1}{2}\frac{\partial}{\partial p_\lambda^{(3)}}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p_\varkappa^{(3)}} - \frac{\partial P_\varkappa}{\partial p_\iota^{(3)}}\right) \equiv 0, \quad \text{[nach (21.)]},$$

$$\frac{\partial \Omega_{\iota\varkappa}}{\partial p_\lambda^{(2)}} \equiv -\frac{\partial^2 \varphi_\iota}{\partial p'_\varkappa \partial p_\lambda^{(2)}} + \frac{\partial^2 \varphi_\varkappa}{\partial p'_\iota \partial p_\lambda^{(2)}} - \tfrac{1}{2}\frac{\partial}{\partial p_\lambda^{(2)}}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p_\varkappa^{(3)}} - \frac{\partial P_\varkappa}{\partial p_\iota^{(3)}}\right)$$

$$\equiv \frac{\partial}{\partial p_\lambda^{(4)}}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p'_\varkappa} - \frac{\partial P_\varkappa}{\partial p'_\iota}\right) - \tfrac{1}{2}\frac{\partial}{\partial p_\lambda^{(2)}}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p_\varkappa^{(3)}} - \frac{\partial P_\varkappa}{\partial p_\iota^{(3)}}\right) \equiv 0 \quad \text{[nach (25)]},$$

$$\frac{\partial \Omega_{\iota\varkappa}}{\partial p'_\lambda} + \frac{\partial \Omega_{\varkappa\lambda}}{\partial p'_\iota} + \frac{\partial \Omega_{\lambda\iota}}{\partial p'_\varkappa} \equiv 0 \quad \text{[nach (34)]}.$$

Demnach sind für die Gleichungen (7^b.) die Bedingungen der Integrabilität erfüllt und folglich die Functionen φ_ι bis auf willkürliche Functionen der p bestimmbar.

In ähnlicher Weise soll jetzt die Integrabilität der Gleichungen (5^a.), (5^b.), (17.) und (15.) untersucht werden.

Da die rechten Seiten der Gleichungen (5^a.) nach (19.) nnd (20.) von den dritten und vierten Differentialquotienten der p frei sind, so erhalten wir — unter Einführung einer ähnlichen Bezeichnung, wie sie oben für die φ_ι gebraucht wurde — die n Functionen ψ_ι zunächst in der Form

$$\psi_\iota = \mu_\iota(p, p', p^{(2)}, p^{(3)}) + \nu_\iota(p, p', p^{(2)}),$$

worin die ν_ι willkürliche Functionen sind; den gefundenen Ausdruck setzen wir in (5^b.) ein und erhalten

$$\frac{\partial \nu_\iota}{\partial p_\varkappa^{(2)}} = -\frac{\partial \mu_\iota}{\partial p_\varkappa^{(2)}} + \frac{\partial P_\iota}{\partial p_\varkappa^{(3)}} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p_\varkappa^{(4)}}\right) \equiv X_{\iota\varkappa},$$

$$\frac{\partial X_{\iota\varkappa}}{\partial p_\lambda^{(4)}} \equiv 0 \quad \text{[nach (19.) und (20.)]},$$

$$\frac{\partial X_{\iota\varkappa}}{\partial p_\lambda^{(3)}} \equiv -\frac{\partial^2 \psi_\iota}{\partial p_\varkappa^{(2)} \partial p_\lambda^{(3)}} + \frac{\partial^2 P_\iota}{\partial p_\varkappa^{(3)} \partial p_\lambda^{(3)}} - \frac{\partial^2 P_\iota}{\partial p_\lambda^{(2)} \partial p_\varkappa^{(4)}} \equiv 0 \quad \text{[nach (5^a.) und (24^a.)]}.$$

Ferner ist

$$\frac{\partial X_{\iota\varkappa}}{\partial p_\lambda^{(2)}} - \frac{\partial X_{\iota\lambda}}{\partial p_\varkappa^{(2)}} \equiv \frac{\partial^2 P_\iota}{\partial p_\varkappa^{(3)} \partial p_\lambda^{(2)}} - \frac{\partial^2 P_\iota}{\partial p_\varkappa^{(2)} \partial p_\lambda^{(3)}} - \frac{\partial}{\partial p_\iota^{(4)}}\left(\frac{\partial P_\varkappa}{\partial p'_\lambda} - \frac{\partial P_\lambda}{\partial p'_\varkappa}\right) \equiv 0 \text{ [nach (23.) und (29)]}.$$

Somit sind auch diese Gleichungen integrabel, und wir erhalten durch einfache Quadraturen:

$$\nu_\iota = \varrho_\iota(p, p', p^{(2)}) + \sigma_\iota(p, p'),$$
$$\psi_\iota = \mu_\iota(p, p', p^{(2)}, p^{(3)}) + \varrho_\iota(p, p', p^{(2)}) + \sigma_\iota(p, p'),$$

wobei die σ_ι noch willkürliche Functionen sind, zu deren Bestimmung uns die Gleichungen (17.) und (15.) dienen sollen.

Nach (17.) ist zu setzen:

$$\frac{\partial \sigma_\varkappa}{\partial p'} = -\frac{\partial(\mu_\varkappa + \varrho_\varkappa)}{\partial p'_\iota} + \frac{\partial \varphi_\iota}{\partial p_\varkappa} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p_\varkappa^{(2)}} + \frac{\partial P_\varkappa}{\partial p_\iota^{(2)}}\right) - \tfrac{1}{4}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p_\varkappa^{(3)}} - \frac{\partial P_\varkappa}{\partial p_\iota^{(3)}}\right) - \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p_\varkappa^{(4)}}\right) \equiv \Phi_{\iota\varkappa}.$$

Es ergiebt sich alsdann auf Grund der Identität (22.):

$$\frac{\partial \Phi_{\iota\varkappa}}{\partial p_\lambda^{(4)}} \equiv \tfrac{1}{2}\frac{\partial}{\partial p_\lambda^{(4)}}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p_\varkappa^{(2)}} + \frac{\partial P_\varkappa}{\partial p_\iota^{(2)}}\right) - \frac{\partial^2 P_\iota}{\partial p_\lambda^{(2)} \partial p_\varkappa^{(4)}} \equiv 0.$$

Ebenso ist infolge von (25.) und (26ª.):

$$\frac{\partial \Phi_{\iota\varkappa}}{\partial p_\lambda^{(3)}} \equiv -\frac{\partial^2 P_\lambda}{\partial p'_\iota \partial p_\varkappa^{(4)}} + \tfrac{1}{2}\frac{\partial}{\partial p_\lambda^{(3)}}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p_\varkappa^{(2)}} + \frac{\partial P_\varkappa}{\partial p_\iota^{(2)}}\right) - \tfrac{1}{4}\frac{\partial}{\partial p_\lambda^{(2)}}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p_\varkappa^{(3)}} - \frac{\partial P_\varkappa}{\partial p_\iota^{(3)}}\right) - \frac{\partial^2 P_\iota}{\partial p'_\lambda \partial p_\varkappa^{(4)}}$$
$$-2\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial^2 P_\iota}{\partial p_\lambda^{(2)} \partial p_\varkappa^{(4)}}\right] \equiv 0.$$

Schliesslich findet man, dass

$$\frac{\partial \Phi_{\iota\varkappa}}{\partial p_\lambda^{(2)}} \equiv -\frac{\partial}{\partial p'_\iota}\left[\frac{\partial P_\varkappa}{\partial p_\lambda^{(3)}} - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial P_\varkappa}{\partial p_\lambda^{(4)}}\right]\right] - \frac{\partial^2 P_\lambda}{\partial p_\varkappa \partial p_\iota^{(4)}} + \tfrac{1}{2}\frac{\partial}{\partial p_\lambda^{(2)}}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p_\varkappa^{(2)}} + \frac{\partial P_\varkappa}{\partial p_\iota^{(2)}}\right) - \tfrac{1}{4}\frac{\partial}{\partial p'_\lambda}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p_\varkappa^{(3)}}\right.$$
$$\left. - \frac{\partial P_\varkappa}{\partial p_\iota^{(3)}}\right) - \tfrac{1}{4}\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial p_\lambda^{(2)}}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p_\varkappa^{(3)}} - \frac{\partial P_\varkappa}{\partial p_\iota^{(3)}}\right)\right] - \frac{\partial^2 P}{\partial p_\lambda \partial p_\varkappa^{(4)}} - 2\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial p'_\lambda}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p_\varkappa^{(4)}}\right)\right] - \frac{d^2}{dt^2}\left[\frac{\partial^2 P_\iota}{\partial p_\lambda^{(2)} \partial p_\varkappa^{(4)}}\right]$$

oder mit Benutzung von (25.) und (10):

$$\frac{\partial \Phi_{\iota\varkappa}}{\partial p_\lambda^{(2)}} \equiv -\tfrac{1}{2}\frac{\partial^2 P_\varkappa}{\partial p'_\iota \partial p_\lambda^{(3)}} + \tfrac{1}{4}\frac{\partial}{\partial p'_\iota}\left(\frac{\partial P_\lambda}{\partial p_\varkappa^{(3)}} - \frac{\partial P_\varkappa}{\partial p_\lambda^{(3)}}\right) - \tfrac{1}{4}\frac{\partial}{\partial p'_\lambda}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p_\varkappa^{(3)}} - \frac{\partial P_\varkappa}{\partial p_\iota^{(3)}}\right) - \frac{\partial^2 P_\lambda}{\partial p_\varkappa \partial p_\iota^{(4)}}$$
$$-\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial^2 P_\lambda}{\partial p'_\varkappa \partial p_\iota^{(4)}}\right] + \tfrac{1}{2}\frac{\partial}{\partial p_\lambda^{(2)}}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p_\varkappa^{(2)}} + \frac{\partial P_\varkappa}{\partial p_\iota^{(2)}}\right) + \tfrac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial P_\lambda^{(4)}}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p'_\varkappa} + \frac{\partial P_\varkappa}{\partial p'_\iota}\right)\right] - \frac{\partial^2 P_\iota}{\partial p_\lambda \partial p_\varkappa^{(4)}}$$
$$-2\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial p'_\lambda}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p_\varkappa^{(4)}}\right)\right] - \frac{d^2}{dt^2}\left[\frac{\partial^2 P_\iota}{\partial p_\lambda^{(2)} \partial p_\varkappa^{(4)}}\right]$$

und unter Berücksichtigung von (34.) und (10.)

$$\frac{\partial \Phi_{\iota\varkappa}}{\partial p_\lambda^{(2)}} \equiv -\tfrac{1}{2}\frac{\partial}{\partial p_\lambda^{(3)}}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p'_\varkappa} + \frac{\partial P_\varkappa}{\partial p'_\iota}\right) + \tfrac{1}{2}\frac{\partial}{\partial p_\lambda^{(2)}}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p_\varkappa^{(2)}} + \frac{\partial P_\varkappa}{\partial p_\iota^{(2)}}\right) + \tfrac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial p_\lambda^{(4)}}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p'_\varkappa} + \frac{\partial P_\varkappa}{\partial p'_\iota}\right)\right]$$
$$-\frac{\partial^2 P_\iota}{\partial p_\lambda \partial p_\varkappa^{(4)}} - 2\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial^2 P_\iota}{\partial p'_\lambda \partial p_\varkappa^{(4)}}\right] - \frac{d^2}{dt^2}\left[\frac{\partial^2 P_\iota}{\partial p_\lambda^{(2)} \partial p_\varkappa^{(4)}}\right].$$

Dass dieser Ausdruck verschwindet, erkennt man unmittelbar, wenn man das nach t genommene totale Differential der Gleichung (26ª.) von (31.) abzieht.

Um ferner zu zeigen, dass die n Differentialgleichungen, deren gemeinsame Lösung die Function $\sigma_\varkappa$ sein soll, mit einander verträglich sind, bilden wir den Ausdruck

$$\frac{\partial \Phi_{\iota\varkappa}}{\partial p'_\lambda} - \frac{\partial \Phi_{\lambda\varkappa}}{\partial p'_\iota} \equiv \frac{\partial}{\partial p_\varkappa}\left(\frac{\partial \varphi_\iota}{\partial p'_\lambda} - \frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial p'_\iota}\right) + \tfrac{1}{2}\frac{\partial}{\partial p'_\lambda}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p_\varkappa^{(2)}} + \frac{\partial P_\varkappa}{\partial p_\iota^{(2)}}\right) - \tfrac{1}{2}\frac{\partial}{\partial p'_\iota}\left(\frac{\partial P_\lambda}{\partial p_\varkappa^{(2)}} + \frac{\partial P_\varkappa}{\partial p_\lambda^{(2)}}\right)$$
$$-\tfrac{1}{4}\frac{\partial}{\partial p'_\lambda}\left(\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial P_\iota}{\partial p_\varkappa^{(3)}} - \frac{\partial P_\varkappa}{\partial p_\iota^{(3)}}\right]\right) + \tfrac{1}{4}\frac{\partial}{\partial p'_\iota}\left(\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial P_\lambda}{\partial p_\varkappa^{(3)}} - \frac{\partial P_\varkappa}{\partial p_\lambda^{(3)}}\right]\right)$$
$$-2\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial p_\varkappa^{(4)}}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p_\lambda} - \frac{\partial P_\lambda}{\partial p_\iota}\right)\right] - \frac{d^2}{dt^2}\left[\frac{\partial}{\partial p_\varkappa^{(4)}}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p'_\lambda} - \frac{\partial P_\lambda}{\partial p'_\iota}\right)\right]$$

oder mit Benutzung von (7ᵇ.) und (12.):

$$\equiv -\tfrac{1}{2}\frac{\partial}{\partial p_\varkappa}\Big(\frac{\partial P_\iota}{\partial p_\lambda^{(3)}}-\frac{\partial P_\lambda}{\partial p_\iota^{(3)}}\Big)+\tfrac{1}{3}\frac{\partial}{\partial p_\varkappa^{(2)}}\Big(\frac{\partial P_\iota}{\partial p'_\lambda}-\frac{\partial P_\lambda}{\partial p'_\iota}\Big)+\tfrac{2}{3}\Big(\frac{\partial^2 P_\varkappa}{\partial p'_\lambda \partial p_\iota^{(2)}}-\frac{\partial^2 P_\varkappa}{\partial p'_\iota \partial p_\lambda^{(2)}}\Big)$$
$$-2\frac{d}{dt}\Big[\frac{\partial}{\partial p_\varkappa^{(4)}}\Big(\frac{\partial P_\iota}{\partial p_\lambda}-\frac{\partial P_\lambda}{\partial p_\iota}\Big)\Big]-\frac{d^2}{dt^2}\Big[\frac{\partial}{\partial p_\varkappa^{(4)}}\Big(\frac{\partial P_\iota}{\partial p'_\lambda}-\frac{\partial P_\lambda}{\partial p'_\iota}\Big)\Big].$$

Differentiirt man (14.) nach $p_\lambda^{(2)}$ und zieht von der erhaltenen Identität diejenige ab, welche aus ihr durch Vertauschung von ι und λ hervorgeht, so ergiebt sich unter Berücksichtigung von (23.):

$$(35.)\quad \left\{\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial p'_\varkappa}\Big(\frac{\partial P_\iota}{\partial p_\lambda^{(2)}}-\frac{\partial P_\lambda}{\partial p_\iota^{(2)}}\Big)-\frac{\partial}{\partial p_\varkappa^{(2)}}\Big(\frac{\partial P_\iota}{\partial p'_\lambda}-\frac{\partial P_\lambda}{\partial p'_\iota}\Big)-2\Big(\frac{\partial^2 P_\varkappa}{\partial p'_\lambda \partial p_\iota^{(2)}}-\frac{\partial^2 P_\varkappa}{\partial p'_\iota \partial p_\lambda^{(2)}}\Big)\\&\qquad-\frac{d}{dt}\Big[\frac{\partial}{\partial p_\varkappa^{(2)}}\Big(\frac{\partial P_\iota}{\partial p_\lambda^{(2)}}-\frac{\partial P_\lambda}{\partial p_\iota^{(2)}}\Big)\Big]+6\frac{d}{dt}\Big[\frac{\partial}{\partial p_\varkappa^{(4)}}\Big(\frac{\partial P_\iota}{\partial p_\lambda}-\frac{\partial P_\lambda}{\partial p_\iota}\Big)\Big]\\&\qquad+6\frac{d^2}{dt^2}\Big[\frac{\partial}{\partial p_\varkappa^{(4)}}\Big(\frac{\partial P_\iota}{\partial p'_\lambda}-\frac{\partial P_\lambda}{\partial p'_\iota}\Big)\Big]\equiv 0,\end{aligned}\right.$$

oder in Verbindung mit (32.) und (25.):

$$(36.)\quad \left\{\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial p'_\varkappa}\Big(\frac{\partial P_\iota}{\partial p_\lambda^{(2)}}-\frac{\partial P_\lambda}{\partial p_\iota^{(2)}}\Big)-\frac{\partial}{\partial p_\varkappa^{(2)}}\Big(\frac{\partial P_\iota}{\partial p'_\lambda}-\frac{\partial P_\lambda}{\partial p'_\iota}\Big)-2\Big(\frac{\partial^2 P_\varkappa}{\partial p'_\lambda \partial p_\iota^{(2)}}-\frac{\partial^2 P_\varkappa}{\partial p'_\iota \partial p_\lambda^{(2)}}\Big)\\&\qquad-\tfrac{3}{2}\frac{d}{dt}\Big[\frac{\partial}{\partial p'_\varkappa}\Big(\frac{\partial P_\iota}{\partial p_\lambda^{(3)}}-\frac{\partial P_\lambda}{\partial p_\iota^{(3)}}\Big)\Big]+6\frac{d}{dt}\Big[\frac{\partial}{\partial p_\varkappa^{(4)}}\Big(\frac{\partial P_\iota}{\partial p_\lambda}-\frac{\partial P_\lambda}{\partial p_\iota}\Big)\Big]\\&\qquad+3\frac{d^2}{dt^2}\Big[\frac{\partial}{\partial p_\varkappa^{(4)}}\Big(\frac{\partial P_\iota}{\partial p'_\lambda}-\frac{\partial P_\lambda}{\partial p'_\iota}\Big)\Big]\equiv 0.\end{aligned}\right.$$

Zieht man diese Gleichung von der folgenden, aus (12.) abgeleiteten,

$$(37.)\quad \frac{\partial}{\partial p'_\varkappa}\Big(\frac{\partial P_\iota}{\partial p_\lambda^{(2)}}-\frac{\partial P_\lambda}{\partial p_\iota^{(2)}}\Big)-\tfrac{3}{2}\frac{\partial}{\partial p_\varkappa}\Big(\frac{\partial P_\iota}{\partial p_\lambda^{(3)}}-\frac{\partial P_\lambda}{\partial p_\iota^{(3)}}\Big)-\tfrac{3}{2}\frac{d}{dt}\Big[\frac{\partial}{\partial p'_\varkappa}\Big(\frac{\partial P_\iota}{\partial p_\lambda^{(3)}}-\frac{\partial P_\lambda}{\partial p_\iota^{(3)}}\Big)\Big]\equiv 0$$

ab, so findet man, dass die linke Seite der entstehenden Relation gleich dem dreifachen des oben für $\frac{\partial \Phi_{\iota\varkappa}}{\partial p'_\lambda}-\frac{d\Phi_{\lambda\varkappa}}{\partial p'_\iota}$ gefundenen Ausdruckes ist, und dass demnach auch die Integrabilitätsbedingungen für die Gleichungen (17.)

$$\frac{\partial \Phi_{\iota\varkappa}}{\partial p'_\lambda}-\frac{\partial \Phi_{\lambda\varkappa}}{\partial p'_\iota}\equiv 0$$

erfüllt sind. Wir erhalten also die n Functionen σ_ι in der Form

$$\sigma_\iota=\tau_\iota(p,p')+\zeta_\iota(p),$$

wo die ζ_ι willkürliche Functionen der p sind. Dabei ist zu bemerken, dass auch die τ_ι noch von denjenigen willkürlichen Functionen der p abhängen, welche in die $\Phi_{\iota\varkappa}$ eintreten, wenn hier — wie es oben geschehen musste — für die φ_ι die aus den Gleichungen (7ᵃ.) und (7ᵇ.) ermittelten Ausdrücke eingesetzt werden. Diese Functionen werden auch im Folgenden unbestimmt

bleiben; dagegen werden wir versuchen, über die ζ_ι in solcher Weise zu verfügen, dass die für die ψ_ι gewonnenen Ausdrücke

$$\psi_\iota = \mu_\iota(p, p', p^{(2)}, p^{(3)}), + \varrho_\iota(p, p', p^{(2)}) + \tau_\iota(p, p') + \zeta_\iota(p)$$

den Gleichungen (15.) genügen, d. h. dass

$$\frac{\partial \zeta_\iota}{\partial p_\varkappa} - \frac{\partial \zeta_\varkappa}{\partial p_\iota} = -\left\{\frac{\partial(\mu_\iota + \varrho_\iota + \tau_\iota)}{\partial p_\varkappa} - \frac{\partial(\mu_\varkappa + \varrho_\varkappa + \tau_\varkappa)}{\partial p_\iota}\right\} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p'_\varkappa} - \frac{\partial P_\varkappa}{\partial p'_\iota}\right)$$
$$- \tfrac{1}{4}\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p^{(3)}_\varkappa} - \frac{\partial P_\varkappa}{\partial p^{(3)}_\iota}\right) \equiv \Theta_{\iota\varkappa}.$$

$$\frac{\partial \Theta_{\iota\varkappa}}{\partial p^{(4)}_\lambda} \equiv \tfrac{1}{2}\frac{\partial}{\partial p^{(4)}_\lambda}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p'_\varkappa} - \frac{\partial P_\varkappa}{\partial p'_\iota}\right) - \tfrac{1}{4}\frac{\partial}{\partial p^{(2)}_\lambda}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p^{(3)}_\varkappa} - \frac{\partial P_\varkappa}{\partial p^{(3)}_\iota}\right) \equiv 0 \quad [\text{nach } (25.)],$$

$$\frac{\partial \Theta_{\iota\varkappa}}{\partial p^{(3)}_\lambda} \equiv -\frac{\partial}{\partial p^{(3)}_\lambda}\left(\frac{\partial \psi_\iota}{\partial p_\varkappa} - \frac{\partial \psi_\varkappa}{\partial p_\iota}\right) + \tfrac{1}{2}\frac{\partial}{\partial p^{(3)}_\lambda}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p'_\varkappa} - \frac{\partial P_\varkappa}{\partial p'_\iota}\right) - \tfrac{1}{4}\frac{\partial}{\partial p'_\lambda}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p^{(3)}_\varkappa} - \frac{\partial P_\varkappa}{\partial p^{(3)}_\iota}\right)$$
$$- \tfrac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial p^{(2)}_\lambda}\left(\frac{\partial P}{\partial p^{(3)}_\varkappa} - \frac{\partial P_\varkappa}{\partial p^{(3)}_\iota}\right)\right]$$
$$\equiv -\frac{\partial}{\partial p^{(4)}_\lambda}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p_\varkappa} - \frac{\partial P_\varkappa}{\partial p_\iota}\right) + \tfrac{1}{2}\frac{\partial}{\partial p^{(3)}_\lambda}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p'_\varkappa} - \frac{\partial P_\varkappa}{\partial p'_\iota}\right) - \tfrac{1}{4}\frac{\partial}{\partial p'_\lambda}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p^{(3)}_\varkappa} - \frac{\partial P_\varkappa}{\partial p^{(3)}_\iota}\right)$$
$$- \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial p^{(4)}_\lambda}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p'_\varkappa} - \frac{\partial P_\varkappa}{\partial p'_\iota}\right)\right] \text{ [nach } (5^a.) \text{ und } (25.)],$$

$$\frac{\partial \Theta_{\iota\varkappa}}{\partial p^{(3)}_\lambda} \equiv 0 \text{ [nach } (30^a.)].$$

$$\frac{\partial \Theta_{\iota\varkappa}}{\partial p^{(2)}_\lambda} \equiv -\frac{\partial}{\partial p^{(2)}_\lambda}\left(\frac{\partial \psi_\iota}{\partial p_\varkappa} - \frac{\partial \psi_\varkappa}{\partial p_\iota}\right) + \tfrac{1}{2}\frac{\partial}{\partial p^{(2)}_\lambda}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p'_\varkappa} - \frac{\partial P_\varkappa}{\partial p'_\iota}\right) - \tfrac{1}{4}\frac{\partial}{\partial p_\lambda}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p^{(3)}_\varkappa} - \frac{\partial P_\varkappa}{\partial p^{(3)}_\iota}\right)$$
$$- \tfrac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial p'_\lambda}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p^{(3)}_\varkappa} - \frac{\partial P_\varkappa}{\partial p^{(3)}_\iota}\right)\right] - \tfrac{1}{4}\frac{d^2}{dt^2}\left[\frac{\partial}{\partial p^{(2)}_\lambda}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p^{(3)}_\varkappa} - \frac{\partial P_\varkappa}{\partial p^{(3)}_\iota}\right)\right],$$
$$\equiv -\frac{\partial}{\partial p^{(3)}_\lambda}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p_\varkappa} - \frac{\partial P_\varkappa}{\partial p_\iota}\right) + \tfrac{1}{2}\frac{\partial}{\partial p^{(2)}_\lambda}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p'_\varkappa} - \frac{\partial P_\varkappa}{\partial p'_\iota}\right) - \tfrac{1}{4}\frac{\partial}{\partial p_\lambda}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p^{(3)}_\varkappa} - \frac{\partial P_\varkappa}{\partial p^{(3)}_\iota}\right)$$
$$+ \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial p^{(4)}_\lambda}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p_\varkappa} - \frac{\partial P_\varkappa}{\partial p_\iota}\right)\right] - \tfrac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial p'_\lambda}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p^{(3)}_\varkappa} - \frac{\partial P_\varkappa}{\partial p^{(3)}_\iota}\right)\right] - \tfrac{1}{4}\frac{d^2}{dt^2}\left[\frac{\partial}{\partial p^{(2)}_\lambda}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p^{(3)}_\varkappa} - \frac{\partial P_\varkappa}{\partial p^{(3)}_\iota}\right)\right].$$

Führen wir für die Summe der drei ersten Posten denjenigen Werth ein, welcher sich durch Differentiation der Gleichung (16.) nach $p^{(3)}_\lambda$ für dieselbe ergiebt, so erhalten wir mit Benutzung von (25.):

$$\frac{\partial \Theta_\iota}{\partial p^{(2)}_\lambda} \equiv \frac{d}{dt}\left[-\tfrac{1}{2}\frac{\partial}{\partial p^{(3)}_\lambda}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p'_\varkappa} - \frac{\partial P_\varkappa}{\partial p'_\iota}\right) + \tfrac{1}{4}\frac{\partial}{\partial p'_\lambda}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p^{(3)}_\varkappa} - \frac{\partial P_\varkappa}{\partial p^{(3)}_\iota}\right) + \frac{\partial}{\partial p^{(4)}_\lambda}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p_\varkappa} - \frac{\partial P_\varkappa}{\partial p_\iota}\right)\right]$$
$$+ \frac{d^2}{dt^2}\left[\frac{\partial}{\partial p^{(4)}_\lambda}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p'_\varkappa} - \frac{\partial P_\varkappa}{\partial p'_\iota}\right)\right].$$

Also

$$\frac{\partial \Theta_{i\varkappa}}{\partial p_\lambda^{(2)}} \equiv 0 \text{ [nach (33}^{\text{b}}\text{.)]};$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Theta_{i\varkappa}}{\partial p'_\lambda} \equiv & -\frac{\partial}{\partial p'_\lambda}\left(\frac{\partial \psi_\iota}{\partial p_\varkappa}-\frac{\partial \psi_\varkappa}{\partial p_\iota}\right)+\tfrac{1}{2}\frac{\partial}{\partial p'_\lambda}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p'_\varkappa}-\frac{\partial P_\varkappa}{\partial p'_\iota}\right)-\tfrac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial p_\lambda}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p_\varkappa^{(3)}}-\frac{\partial P_\varkappa}{\partial p_\iota^{(3)}}\right)\right] \\ & -\tfrac{1}{4}\frac{d^2}{dt^2}\left[\frac{\partial}{\partial p'_\lambda}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial P_\varkappa^{(3)}}-\frac{\partial P_\varkappa}{\partial p_\iota^{(3)}}\right)\right] \\ \equiv & \frac{\partial}{\partial p_\iota}\left\{\frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial p_\varkappa}+\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial P_\lambda}{\partial p_\varkappa^{(2)}}+\frac{\partial P_\varkappa}{\partial p_\lambda^{(2)}}\right)-\tfrac{1}{6}\left(\frac{\partial P_\lambda}{\partial P_\varkappa^{(2)}}-\frac{\partial P_\varkappa}{\partial P_\lambda^{(2)}}\right)-\frac{d^2}{dt^2}\left[\frac{\partial P_\lambda}{\partial P_\varkappa^{(4)}}\right]\right\} \\ & -\frac{\partial}{\partial p_\varkappa}\left\{\frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial p_\iota}+\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial P_\lambda}{\partial p_\iota^{(2)}}+\frac{\partial P_\iota}{\partial p_\lambda^{(2)}}\right)-\tfrac{1}{6}\left(\frac{\partial P_\lambda}{\partial p_\iota^{(2)}}-\frac{\partial P_\iota}{\partial p_\lambda^{(2)}}\right)-\frac{d^2}{dt^2}\left[\frac{\partial P_\lambda}{\partial p_\iota^{(4)}}\right]\right\} \\ & +\tfrac{1}{2}\frac{\partial}{\partial p'_\lambda}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p'_\varkappa}-\frac{\partial P_\varkappa}{\partial p'_\iota}\right)-\tfrac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial p_\lambda}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p_\varkappa^{(3)}}-\frac{\partial P_\varkappa}{\partial p_\iota^{(3)}}\right)\right]-\tfrac{1}{4}\frac{d^2}{dt^2}\left[\frac{\partial}{\partial p'_\lambda}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p_\varkappa^{(3)}}-\frac{\partial P_\varkappa}{\partial p_\iota^{(3)}}\right)\right], \\ \equiv & \tfrac{1}{3}\left(\frac{\partial^2 P_\lambda}{\partial p_\iota \partial p_\varkappa^{(2)}}-\frac{\partial^2 P_\lambda}{\partial p_\varkappa \partial p_\iota^{(2)}}\right)+\tfrac{2}{3}\frac{\partial}{\partial p_\lambda^{(2)}}\left(\frac{\partial P_\varkappa}{\partial p_\iota}-\frac{\partial P_\iota}{\partial p_\varkappa}\right)+\tfrac{1}{2}\frac{\partial}{\partial p'_\lambda}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p'_\varkappa}-\frac{\partial P_\varkappa}{\partial p'_\iota}\right) \\ & -\tfrac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial p_\lambda}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p_\varkappa^{(3)}}-\frac{\partial P_\varkappa}{\partial p_\iota^{(3)}}\right)\right]-\tfrac{1}{4}\frac{d^2}{dt^2}\left[\frac{\partial}{\partial p'_\lambda}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p_\varkappa^{(3)}}-\frac{\partial P_\varkappa}{\partial p_\iota^{(3)}}\right)\right]+\frac{d^2}{dt^2}\left[\frac{\partial}{\partial p_\lambda^{(4)}}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p_\varkappa}-\frac{\partial P_\varkappa}{\partial p_\iota}\right)\right].\end{aligned}$$

Um zu beweisen, dass $\frac{\partial \Theta_{i\varkappa}}{\partial p'_\lambda}$ vermöge der Identitäten (9.) bis (16.) verschwindet, differentiiren wir (14.) nach p'_λ, vertauschen hierauf ι und λ und ziehen die so erhaltene Gleichung von der ersten ab:

$$(38.)\quad \left\{\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial p'_\varkappa}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p'_\lambda}-\frac{\partial P_\lambda}{\partial p'_\iota}\right)-\frac{\partial}{\partial p_\lambda}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p_\varkappa^{(2)}}+\frac{\partial P_\varkappa}{\partial p_\iota^{(2)}}\right)+\frac{\partial}{\partial p_\iota}\left(\frac{\partial P_\lambda}{\partial p_\varkappa^{(2)}}+\frac{\partial P_\varkappa}{\partial p_\lambda^{(2)}}\right) \\ &\quad -\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial p_\varkappa^{(2)}}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p'_\lambda}-\frac{\partial P_\lambda}{\partial p'_\iota}\right)\right]-\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial^2 P_\varkappa}{\partial p'_\lambda \partial p_\iota^{(2)}}-\frac{\partial^2 P_\varkappa}{\partial p'_\iota \partial p_\lambda^{(2)}}\right] \\ &\quad +6\frac{d^2}{dt^2}\left[\frac{\partial}{\partial p_\varkappa^{(4)}}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p_\lambda}-\frac{\partial P_\lambda}{\partial p_\iota}\right)\right]+2\frac{d^3}{dt^3}\left[\frac{\partial}{\partial p_\varkappa^{(4)}}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p'_\lambda}-\frac{\partial P_\lambda}{\partial p'_\iota}\right)\right] \equiv 0.\end{aligned}\right.$$

Nun folgt aus (37.) leicht mit Hülfe von (34.), dass

$$(37^{\text{a}}.)\quad \left\{\begin{aligned}&\frac{\partial^2 P_\varkappa}{\partial p'_\lambda \partial p_\iota^{(2)}}-\frac{\partial^2 P_\varkappa}{\partial p'_\iota \partial p_\lambda^{(2)}} \equiv -\tfrac{3}{2}\frac{\partial}{\partial p_\lambda}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p_\varkappa^{(3)}}-\frac{\partial P_\varkappa}{\partial p_\iota^{(3)}}\right)+\tfrac{3}{2}\frac{\partial}{\partial p_\iota}\left(\frac{\partial P_\lambda}{\partial p_\varkappa^{(3)}}-\frac{\partial P_\varkappa}{\partial p_\lambda^{(3)}}\right) \\ &\quad +\frac{\partial}{\partial p_\varkappa^{(2)}}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p'_\lambda}-\frac{\partial P_\lambda}{\partial p'_\iota}\right)-\tfrac{3}{2}\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial p'_\varkappa}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p_\lambda^{(3)}}-\frac{\partial P_\lambda}{\partial p_\iota^{(3)}}\right)\right],\end{aligned}\right.$$

also nach (12.)

$$(37^{\text{b}}.)\quad \left\{\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial^2 P_\varkappa}{\partial p'_\lambda \partial p_\iota^{(2)}}-\frac{\partial^2 P_\varkappa}{\partial p'_\iota \partial p_\lambda^{(2)}}\right] \equiv -\frac{\partial}{\partial p_\lambda}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p_\varkappa^{(2)}}-\frac{\partial P_\varkappa}{\partial p_\iota^{(2)}}\right)+\frac{\partial}{\partial p_\iota}\left(\frac{\partial P_\lambda}{\partial p_\varkappa^{(2)}}-\frac{\partial P_\varkappa}{\partial p_\lambda^{(2)}}\right) \\ &\quad +\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial p_\varkappa^{(2)}}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p'_\lambda}-\frac{\partial P_\lambda}{\partial p'_\iota}\right)\right]-\tfrac{3}{2}\frac{d^2}{dt^2}\left[\frac{\partial}{\partial p'_\varkappa}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p_\lambda^{(3)}}-\frac{\partial P_\lambda}{\partial p_\iota^{(3)}}\right)\right],\end{aligned}\right.$$

so dass man der Gleichung (38.) folgende Gestalt geben kann:

$$(38^a.)\quad \begin{cases} 2\left(\frac{\partial^2 P_x}{\partial p_\iota \partial p_\lambda^{(2)}} - \frac{\partial^2 P_\varkappa}{\partial p_\lambda \partial p_\iota^{(2)}}\right) + \frac{\partial}{\partial p'_\varkappa}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p'_\lambda} - \frac{\partial P_\lambda}{\partial p'_\iota}\right) - 2\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial p_\varkappa^{(2)}}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p'_\lambda} - \frac{\partial P_\lambda}{\partial p'_\iota}\right)\right] \\ \quad + 6\frac{d^2}{dt^2}\left[\frac{\partial}{\partial p_\varkappa^{(4)}}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p_\lambda} - \frac{\partial P_\lambda}{\partial p_\iota}\right)\right] + \frac{3}{2}\frac{d^2}{dt^2}\left[\frac{\partial}{\partial p'_\varkappa}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p_\lambda^{(3)}} - \frac{\partial P_\lambda}{\partial p_\iota^{(3)}}\right)\right] \\ \quad + 2\frac{d^3}{dt^3}\left[\frac{\partial}{\partial p_\varkappa^{(4)}}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p'_\lambda} - \frac{\partial P_\lambda}{\partial p'_\iota}\right)\right] \equiv 0. \end{cases}$$

Vertauscht man in dieser Identität $\varkappa$ und λ, multiplicirt sie mit $\frac{1}{2}$ und zieht sie von der nachstehenden durch Differentiation von (16.) nach $p_\lambda^{(2)}$ erhaltenen Gleichung

$$(39.)\quad \begin{cases} 2\frac{\partial}{\partial p_\lambda^{(2)}}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p_\varkappa} - \frac{\partial P_\varkappa}{\partial p_\iota}\right) - \frac{\partial}{\partial p'_\lambda}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p'_\varkappa} - \frac{\partial P_\varkappa}{\partial p'_\iota}\right) - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{dp_\lambda^{(2)}}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p'_\varkappa} - \frac{\partial P_\varkappa}{\partial p'_\iota}\right)\right] \\ \quad + \frac{3}{2}\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial p_\lambda}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p_\varkappa^{(3)}} - \frac{\partial P_\varkappa}{\partial p_\iota^{(3)}}\right)\right] + \frac{3}{2}\frac{d^2}{dt^2}\left[\frac{\partial}{\partial p'_\lambda}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p_\varkappa^{(3)}} - \frac{\partial P_\varkappa}{\partial p_\iota^{(3)}}\right)\right] \\ \quad + \frac{1}{2}\frac{d^3}{dt^3}\left[\frac{\partial}{\partial p_\lambda^{(2)}}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p_\varkappa^{(3)}} - \frac{\partial P_\varkappa}{\partial p_\iota^{(3)}}\right)\right] \equiv 0 \end{cases}$$

ab, so ergiebt sich eine Formel, deren rechte Seite Null ist, während die linke mit dem Dreifachen des für $\frac{\partial \Theta_{\iota\varkappa}}{\partial p'_\lambda}$ gefundenen Ausdruckes übereinstimmt. Somit ist

$$\frac{\partial \Theta_{\iota\varkappa}}{\partial p'_\lambda} \equiv 0,$$

und um unsere Untersuchung zu vollenden, haben wir nur noch zu zeigen, dass die Integrabilitätsbedingungen der Gleichungen (15.) d. h. die Identitäten

$$\frac{\partial \Theta_{\iota\varkappa}}{\partial p_\lambda} + \frac{\partial \Theta_{\varkappa\lambda}}{\partial p_\iota} + \frac{\partial \Theta_{\lambda\iota}}{\partial p_\varkappa} \equiv 0$$

erfüllt sind.

Zu diesem Zwecke differentiiren wir die Gleichung (16.) nach p'_λ:

$$(40.)\quad \begin{cases} 2\frac{\partial}{\partial p'_\lambda}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p_\varkappa} - \frac{\partial P_\varkappa}{\partial p_\iota}\right) - \frac{\partial}{\partial p_\lambda}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p'_\varkappa} - \frac{\partial P_\varkappa}{\partial p'_\iota}\right) - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial p'_\lambda}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p'_\varkappa} - \frac{\partial P_\varkappa}{\partial p'_\iota}\right)\right] \\ \quad + \frac{3}{2}\frac{d^2}{dt^2}\left[\frac{\partial}{\partial p_\lambda}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p_\varkappa^{(3)}} - \frac{\partial P_\varkappa}{\partial p_\iota^{(3)}}\right)\right] + \frac{1}{2}\frac{d^3}{dt^3}\left[\frac{\partial}{\partial p'_\lambda}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p_\varkappa^{(3)}} - \frac{\partial P_\varkappa}{\partial p_\iota^{(3)}}\right)\right] \equiv 0, \end{cases}$$

und addiren zu dieser Gleichung diejenigen beiden, welche aus ihr durch

cyklische Vertauschung von $\iota, \varkappa, \lambda$ entstehen. Das dritte Glied fällt in der Summe von selbst weg, das letzte nach (34.), und es bleibt übrig

$$-3\frac{\partial}{\partial p_\iota}\left(\frac{\partial P_\varkappa}{\partial p'_\lambda}-\frac{\partial P_\lambda}{\partial p'_\varkappa}\right)-3\frac{\partial}{\partial p_\varkappa}\left(\frac{\partial P_\lambda}{\partial p'_\iota}-\frac{\partial P_\iota}{\partial p'_\lambda}\right)-3\frac{\partial}{\partial p_\lambda}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p'_\varkappa}-\frac{\partial P_\varkappa}{\partial p'_\iota}\right)$$
$$+\tfrac{3}{2}\frac{d^2}{dt^2}\left[\frac{\partial}{\partial p_\iota}\left(\frac{\partial P_\varkappa}{\partial p^{(3)}_\lambda}-\frac{\partial P_\lambda}{\partial p^{(3)}_\varkappa}\right)+\frac{\partial}{\partial p_\varkappa}\left(\frac{\partial P_\lambda}{\partial p^{(3)}_\iota}-\frac{\partial P_\iota}{\partial p^{(3)}_\lambda}\right)+\frac{\partial}{\partial p_\lambda}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p^{(3)}_\varkappa}-\frac{\partial P_\varkappa}{\partial p^{(3)}_\iota}\right)\right]\equiv 0.$$

Dies ist aber, wie man leicht sieht, gerade die Identität, welche wir suchen.

Damit ist gezeigt, dass unter den über die P_ι gemachten Voraussetzungen stets n Functionen ψ_ι der $p, p', p^{(2)}, p^{(3)}$ und n Functionen φ_ι der $p, p', p^{(2)}$ existiren, welche den partiellen Differentialgleichungen (7^a.), (7^b.), (5^a.), (5^b.), (17.) und (15.) genügen, übrigens auch die unabhängige Variable t enthalten, wenn diese in den P_ι explicite vorkommt.

Die gesuchte Function H wird alsdann durch blosse Quadraturen aus den Gleichungen (2.), (3.) und (4.) bestimmt, deren Integrabilitätsbedingungen (6.), (7.) und (8.) für die φ_ι und ψ_ι erfüllt sind.

Zur Existenz eines durch die Gleichungen (1.) *definirten von den ersten und zweiten Differentialquotienten der Coordinaten p abhängigen kinetischen Potentials H ist es also nothwendig und hinreichend, dass die P_ι solche Functionen der $p, p', p^{(2)}, p^{(3)}, p^{(4)}$ sind, welche die Identitäten* (9.), (10.), (12.), (14.) *und* (16.) *befriedigen.*

Es mag zum Schluss noch die Form der zur Existenz des allgemeinsten kinetischen Potentials nothwendigen und hinreichenden Bedingungen angegeben werden.

Die Function H soll also von den ν ersten Differentialquotienten der Coordinaten abhängen und durch die Gleichungen

$$-\left\{\frac{\partial H}{\partial p_\iota}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial p'_\iota}\right)+\cdots+(-1)^\nu\frac{d^\nu}{dt^\nu}\left(\frac{\partial H}{\partial p^{(\nu)}_\iota}\right)\right\}=P_\iota$$

definirt werden. Alsdann müssen die P_ι Functionen der $p_\iota, p'_\iota, \ldots, p^{(2\nu)}_\iota$ sein und die $(2\nu+1)$ Gleichungen

$$\frac{\partial P_\iota}{\partial p^{(\tau)}_\varkappa}-\binom{\tau+1}{1}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p^{(\tau+1)}_\varkappa}\right)+\binom{\tau+2}{2}\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p^{(\tau+2)}_\varkappa}\right)-\cdots$$
$$+(-1)^{2\nu-\tau}\binom{2\nu}{2\nu-\tau}\frac{d^{2\nu-\tau}}{dt^{2\nu-\tau}}\left(\frac{\partial P_\iota}{\partial p^{(2\nu)}_\varkappa}\right)=(-1)^\tau\frac{\partial P_\varkappa}{\partial p^{(\tau)}_\iota}$$
$$(\tau=0,1,2,\ldots,2\nu-1,2\nu)$$

identisch befriedigen. Diese Relationen, gebildet für $\nu=2$, stimmen mit den Formeln (9.), (10.), (12.), (14.), (16.) der vorstehenden Arbeit vollkommen überein.

Ueber die allgemeinen kinetischen Potentiale.

(Von Herrn *Leo Koenigsberger* in Heidelberg.)

Bewegt sich ein Punkt auf einer geraden Linie, deren Strecken von einem festen Anfangspunkte aus gezählt mit x bezeichnet werden mögen, so wird derselbe vermöge seiner Bewegung eine Kraft X ausüben, welche, in entgegengesetzter Richtung angebracht, der ersteren das Gleichgewicht halten würde, oder welche auf den Punkt nach aussen hin wirken müsste, damit die vorausgesetzte Bewegung in der angenommenen Weise vor sich gehen kann. Bei der Verrückung des Punktes um die Strecke dx soll die durch die Bewegung oder durch die Kraft geleistete Arbeit durch

$$A_x = X dx$$

definirt werden, wobei über die analytische Definition der von einem bewegten Punkte ausgeübten Kraft nichts weiter vorausgesetzt wird.

Bewegt sich ein freier Punkt im Raume, so soll die von demselben bei der Bewegung ausgeübte Kraft K gemessen werden durch ihre drei Componenten X, Y, Z nach drei auf einander senkrecht stehenden Coordinatenaxen, und zwar so, dass wenn der Punkt die Strecke dz beschrieben hat, und dx, dy, dz die Projectionen von dz auf die drei Axen bedeuten, die von der Kraft K geleistete Arbeit

$$K dz = X dx + Y dy + Z dz$$

ist, und somit sind auch die Kräfte und die Arbeit definirt, welche von den Punkten eines *freien* in Bewegung befindlichen Systems geleistet wird. Ist nun das System ein unfreies, und hängen die rechtwinkligen Coordinaten x_i, y_i, z_i der Punkte desselben von μ von einander unabhängigen Parametern $p_1, p_2, \ldots, p_\mu$ ab, so werden, wenn Kräfte einwirken sollen, welche das System in einen Gleichgewichtszustand der Kräfte versetzen, solche auch auf die Parameter p, welche wir jetzt auch allgemein Coordinaten nennen wollen, einwirken, und man wird somit von Kräften P reden können, welche in der Richtung der Coordinaten p einwirken müssen, damit die voraus-

gesetzte Bewegung des Systems in der angegebenen Weise vor sich gehen kann, so dass damit auch die Arbeit

$$A_p = P dp$$

definirt ist, welche das System bei der Bewegung nach aussen hin auf die Coordinate p leistet, wenn dieselbe in $p+dp$ übergeht. Ist nun die auf die Veränderung der Coordinate p_s gerichtete Arbeit

$$A_{p_s} = P_s dp_s,$$

so mögen mit X_i', Y_i', Z_i' die auf die einzelnen Punkte des Systems nach den rechtwinkligen Coordinatenaxen wirkenden Kräfte bezeichnet werden, welche für die dem Incremente dp_s entsprechenden Verschiebungen

$$\frac{\partial x_i}{\partial p_s} dp_s, \quad \frac{\partial y_i}{\partial p_s} dp_s, \quad \frac{\partial z_i}{\partial p_s} dp_s$$

eine solche Gesammtarbeit leisten, dass

$$(1.) \qquad A_{p_s} = P_s dp_s = \Sigma_i \left(X_i' \frac{\partial x_i}{\partial p_s} + Y_i' \frac{\partial y_i}{\partial p_s} + Z_i' \frac{\partial z_i}{\partial p_s} \right) dp_s$$

ist. Legen wir nun einer jeden Bewegung eines Systems das Princip zu Grunde, *dass, wenn einem freien Systeme, auf welches die Kräfte X_i, Y_i, Z_i wirken, beliebige Zwangsbedingungen auferlegt werden, die durch die Bewegung bei einer Vermehrung der Coordinate p_s um dp_s geleistete Arbeit*

$$\Sigma_i \left(X_i' \frac{\partial x_i}{\partial p_s} + Y_i' \frac{\partial y_i}{\partial p_s} + Z_i' \frac{\partial z_i}{\partial p_s} \right) dp_s$$

gleich ist der Gesammtarbeit, welche das freie System leisten würde bei Wirkung derselben Kräfte X_i, Y_i, Z_i und den Verschiebungen

$$\frac{\partial x_i}{\partial p_s} dp_s, \quad \frac{\partial y_i}{\partial p_s} dp_s, \quad \frac{\partial z_i}{\partial p_s} dp_s$$

von x_i, y_i, z_i, welche der Veränderung von p_s und dp_s entsprechen, dass also

$$(2.) \qquad \Sigma_i \left(X_i' \frac{\partial x_i}{\partial p_s} + Y_i' \frac{\partial y_i}{\partial p_s} + Z_i' \frac{\partial z_i}{\partial p_s} \right) = \Sigma_i \left(X_i \frac{\partial x_i}{\partial p_s} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial p_s} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial p_s} \right),$$

so ergiebt sich aus (1.) und (2.):

$$(3.) \qquad P_s = \Sigma_i \left(X_i \frac{\partial x_i}{\partial p_s} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial p_s} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial p_s} \right),$$

und es lässt sich demnach das eben genannte Princip, welches zunächst noch ohne jede Annahme für die analytische Definition einer Kraft das *d'Alembert*sche Princip darstellt, wenn wir als Projectionen der in der

Richtung der x_i, y_i, z_i wirkenden Kräfte X_i, Y_i, Z_i auf die Richtung der Coordinate p_s die Summe der aus diesen Grössen mit $\frac{\partial x_i}{\partial p_s}$, $\frac{\partial y_i}{\partial p_s}$, $\frac{\partial z_i}{\partial p_s}$ gebildeten Producte bezeichnen, auch dahin aussprechen,

> ***dass während der Dauer der Bewegung die auf die Coordinate p_s wirkende Kraft gleich ist der Summe der Projectionen aller auf die Punkte des freien Systems wirkenden Kräfte nach der Richtung von p_s genommen.***

Um nun die allgemeine analytische Definition für die von einem sich bewegenden System auf die Vermehrung einer Coordinate desselben gerichtete Kraft oder für die geleistete Arbeit zu finden, bemerke man, dass dieser Ausdruck die Gleichung (1.) befriedigen muss, und dass ebenso die Form der Gleichung (1.) erhalten bleiben muss, wenn statt der nach den rechtwinkligen Axen gerichteten Kraftcomponenten beliebige Kräfte gesetzt werden, welche auf einen willkürlichen Complex durch beliebige Zwangsbedingungen eingeführter Coordinaten gerichtet sind, die den augenblicklichen Zustand des Systems vollständig bestimmen. Dadurch ist aber die allgemeine Form der analytischen Definition für die Kraft *eindeutig* bestimmt. Ist nämlich eine Function

$$F(r_1, r_1', \ldots, r_1^{(\nu)}, r_2, r_2', \ldots, r_2^{(\nu)}, \ldots, r_\varkappa, r_\varkappa', r_\varkappa'', \ldots, r_\varkappa^{(\nu)})$$

gegeben, in welcher $r_1, r_2, \ldots, r_\varkappa$ beliebige von einer Variablen t abhängige Grössen, und $r_1^{(\alpha)}, r_2^{(\alpha)}, \ldots, r_\varkappa^{(\alpha)}$ die nach t genommenen α-ten Ableitungen derselben bedeuten, so soll eine zu F, nach einer der Variabeln r genommene, adjungirte Function f eine solche genannt werden, welche aus

$$r, \quad \frac{\partial F}{\partial r}, \quad \frac{\partial F}{\partial r'}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial r^{(\nu)}}$$

und deren nach t genommenen totalen Differentialquotienten von beliebiger Ordnung zusammengesetzt ist*) und die Eigenschaft besitzt, dass, wenn $r_1, r_2, \ldots, r_\varkappa$ in ***willkürlicher*** Weise von μ anderen von einander unabhängigen Grössen $p_1, p_2, \ldots, p_\mu$ abhängig gemacht werden, wobei die Variable t in diese Abhängigkeiten nicht eintritt, ***dieselbe*** Function gebildet aus

$$p_s, \quad \frac{\partial F}{\partial p_s}, \quad \frac{\partial F}{\partial p_s'}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial p_s^{(\nu)}}$$

---

*) Die Einführung der Function F selbst als Argument der adjungirten Function erweist sich vermöge des nachfolgenden Satzes als unnöthig.

und den nach t genommenen totalen Differentialquotienten dieser Grössen gleich ist der Summe der Projectionen der Function f für die Variabeln $r_1, r_2, \ldots, r_\varkappa$ nach der Richtung der Variabeln p_s genommen, also die Beziehung besteht

$$\sum_1^\varkappa{}_\varepsilon f\Big(r_\varepsilon, r'_\varepsilon, r''_\varepsilon, \cdots, \frac{\partial F}{\partial r_\varepsilon}, \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial r_\varepsilon}, \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial F}{\partial r_\varepsilon}, \cdots, \frac{\partial F}{\partial r'_\varepsilon}, \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial r'_\varepsilon}, \cdots, \frac{\partial F}{\partial r_\varepsilon^{(\nu)}}, \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial r_\varepsilon^{(\nu)}} \cdots\Big)\frac{\partial r_\varepsilon}{\partial p_s}$$
$$= f\Big(p_s, p'_s, p''_s, \cdots, \frac{\partial F}{\partial p_s}, \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial p_s}, \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial F}{\partial p_s}, \cdots, \frac{\partial F}{\partial p'_s}, \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial p'_s}, \cdots, \frac{\partial F}{\partial p_s^{(\nu)}}, \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial p_s^{(\nu)}}, \cdots\Big),$$

worin unter dem F der rechten Seite der in die Variabeln $p_1, p_2, \ldots, p_\mu$ transformirte ursprüngliche Ausdruck zu verstehen ist.

Nun habe ich gezeigt*), dass, wenn H eine *beliebige* Function einer *beliebigen* Anzahl von $3n$ Coordinaten und ihrer nach der Zeit genommenen Ableitungen bis zur ν-ten Ordnung hin ist, ausser den als Bewegungsmomenten 1-ter, 2-ter, ..., ν-ter Ordnung definirten Ausdrücken

$$(-1)^\nu \frac{\partial H}{\partial \xi^{(\nu)}},$$
$$(-1)^{\nu-1}\Big(\frac{\partial H}{\partial \xi^{(\nu-1)}} - \nu\frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial \xi^{(\nu)}}\Big),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$-\Big(\frac{\partial H}{\partial \xi'} - 2\frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial \xi''} + 3\frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial H}{\partial \xi'''} - \cdots + (-1)^{\nu-1}\nu\frac{d^{\nu-1}}{dt^{\nu-1}}\frac{\partial H}{\partial \xi^{(\nu)}}\Big)$$

im wesentlichen für eine *beliebige* Anzahl von Variabeln nur *eine* bei Einführung beliebiger Zwangsbedingungen zu H adjungirte Function existirt

$$\frac{\partial H}{\partial \xi} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial \xi'} + \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial H}{\partial \xi''} - \cdots + (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu}\frac{\partial H}{\partial \xi^{(\nu)}},$$

in welcher ξ eine der Coordinaten bedeutet, so dass

$$\Sigma_i\Big\{\Big(\frac{\partial H}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial x'_i} + \cdots + (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu}\frac{\partial H}{\partial x_i^{(\nu)}}\Big)\frac{\partial x_i}{\partial p_s}$$
$$+\Big(\frac{\partial H}{\partial y_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial y'_i} + \cdots + (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu}\frac{\partial H}{\partial y_i^{(\nu)}}\Big)\frac{\partial y_i}{\partial p_s}$$
$$+\Big(\frac{\partial H}{\partial z_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial z'_i} + \cdots + (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu}\frac{\partial H}{\partial z_i^{(\nu)}}\Big)\frac{\partial z_i}{\partial p_s}$$
$$= \frac{\partial H}{\partial p_s} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p'_s} + \cdots + (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu}\frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}}$$

*) Sitzungsberichte der Berliner Akademie vom 21. October 1897.

ist. Daraus folgt,

dass die auf die Vermehrung einer Coordinate ξ bei der Bewegung des Systems gerichtete Kraft durch die analytische Definition bestimmt ist

$$\Xi = \frac{\partial H}{\partial \xi} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial \xi'} + \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial H}{\partial \xi''} - \cdots + (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu}\frac{\partial H}{\partial \xi^{(\nu)}},$$

worin H zunächst noch eine völlig unbestimmte Function aller Coordinaten und deren Ableitungen ist.

Um nun den Charakter der Function H zu bestimmen, untersuchen wir die von einem freien, auf der x-Axe sich bewegenden Punkte durch eben diese Bewegung ausgeübte Kraft

$$X = \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial x'} + \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial H}{\partial x''} - \cdots + (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu}\frac{\partial H}{\partial x^{(\nu)}},$$

worin H eine Function von $x, x', x'', \ldots, x^{(\nu)}$ ist.

Wie man nun in der Mechanik wägbarer Massen die analytische Definition für die Kraft der Bedingung unterwirft, von der Zeit, dem Orte des sich bewegenden Punktes und dessen Geschwindigkeit nicht explicite abzuhängen und so zu dem Ausdrucke $X = ax''$ geführt wird, soll nunmehr für den ganz allgemeinen Fall die analytische Definition der Kraft der Bedingung unterliegen, nicht explicite von $t, x, x', x'', \ldots, x^{(\nu)}$ abzuhängen, und der *einzige* dieser Bedingung genügende Ausdruck für H gesucht werden.

Um diese Aufgabe zunächst für einen speciellen Fall $\nu = 2$ zu lösen, also zu zeigen, dass sich

$$H = f(x, x', x'')$$

so bestimmen lässt, dass der Ausdruck

$$X = \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial x'} + \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial H}{\partial x''} \tag{4.}$$

von x, x', x'' unabhängig ist, werde bemerkt, dass, weil x'''' den Coefficienten $\frac{\partial^2 H}{\partial x''^2}$ besitzt, dieser eine Constante sein, und somit H die Form haben muss

$$H = f_0(x, x') + f_1(x, x')x'' + ax''^2. \tag{5.}$$

Setzt man diesen Ausdruck in (4.) ein, so fällt x''' von selbst heraus, und es ergeben sich als nothwendige Bedingungen dafür, dass der Ausdruck für X von x, x', x'' frei sein soll, die beiden Gleichungen

$$2\frac{\partial f_1}{\partial x} - \frac{\partial^2 f_0}{\partial x'^2} + x'\frac{\partial^2 f_1}{\partial x \partial x'} = 0 \tag{6.}$$

und

$$(7.) \qquad \frac{\partial^2 f_0}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 f_0}{\partial x^2 \partial x'} x' + \frac{\partial^3 f_1}{\partial x^3} x'^2 = 0.$$

Da aber die Gleichung (7.) sich in die Form setzen lässt

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(f_0 - \frac{\partial f_0}{\partial x'} x' + \frac{\partial f_1}{\partial x} x'^2\right) = 0,$$

so dass

$$f_0 - \frac{\partial f_0}{\partial x'} x' + \frac{\partial f_1}{\partial x} x'^2 = F_0(x') + x F_1(x')$$

wird, so folgt durch Differentation nach x'

$$x'\left(2\frac{\partial f_1}{\partial x} - \frac{\partial^2 f_0}{\partial x'^2} + x' \frac{\partial^2 f_1}{\partial x \partial x'}\right) = F_0'(x') + F_1'(x') x$$

und somit vermöge (6.)

$$F_0(x') = a_0, \qquad F_1(x') = a_1,$$

worin a_0 und a_1 Constanten bedeuten, sodass

$$f_0 - \frac{\partial f_0}{\partial x'} x' + \frac{\partial f_1}{\partial x} x'^2 = a_0 + a_1 x$$

wird, und die Gleichung (6.) von selbst befriedigt ist. Es ergiebt sich somit ***dass es eine und nur eine Form der Function H von x, x', x'' giebt und zwar***

$$H = a_0 + a_1 x + x' \omega(x) + x' \int \frac{\partial f_1}{\partial x} dx' + f_1 x'' + a x''^2,$$

worin a_0, a_1, a Constanten, $\omega(x)$ und $f_1(x, x')$ beliebige Functionen der eingeschlossenen Grössen bedeuten, für welche X von x, x', x'' ***unabhängig ist, und zwar wird dann die Kraft durch den Ausdruck definirt:***

$$X = a_1 + 2 a x''''.$$

Setzt man $a_0 = a_1 = 0$, $\omega(x) = 0$, $f_1(x, x') = 0$, so erhält man den der lebendigen Kraft analogen Ausdruck

$$H = a x''^2,$$

wofür die analytische Definition für die Kraft in $X = 2 a x''''$ übergeht.

Um nun die Beantwortung der ganz allgemeinen Frage anzugreifen, ob es für jede ganze Zahl ν Functionen H von $x, x', x'', \ldots, x^{(\nu)}$ giebt, für welche der Ausdruck

$$(8.) \qquad X = \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial x'} + \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial H}{\partial x''} - \cdots + (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu}\frac{\partial H}{\partial x^{(\nu)}}$$

von $x, x', x'', \ldots, x^{(\nu)}$ unabhängig ist, nehme ich auf die bisherigen, von *Helmholtz* für den Fall $\nu = 1$ angeregten, Untersuchungen über die Existenz eines kinetischen Potentiales Bezug*), nach denen die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass es eine Function H von $x, x', x'', \ldots, x^{(\nu)}$ giebt, welche der Gleichung (8.) Genüge leistet, durch die Beziehungen

$$(9.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial X}{\partial x^{(\tau)}}(1-(-1)^{\tau}) - \binom{\tau+1}{1}\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial X}{\partial x^{(\tau+1)}} + \binom{\tau+2}{2}\dfrac{d^2}{dt^2}\dfrac{\partial X}{\partial x^{(\tau+2)}} - \cdots \\ \qquad + (-1)^{2\nu-\tau}\binom{2\nu}{2\nu-\tau}\dfrac{d^{2\nu-\tau}}{dt^{2\nu-\tau}}\dfrac{\partial X}{\partial x^{(2\nu)}} = 0 \end{cases}$$

gegeben sind, welche für

$$\tau = 1, 3, 5, \ldots, 2\nu-1$$

identisch zu erfüllen sind. Sei nun ν eine ungerade Zahl und werde verlangt, dass X von $x, x', x'', \ldots, x^{(\nu)}$ unabhängig ist, so gehen die Gleichungen (9.) für $\tau = 1, 3, 5, \ldots, \nu,\ \nu+2,\ \nu+4, \ldots, 2\nu-3,\ 2\nu-1$ in

$$(10.)\quad \binom{1+\nu}{\nu}\frac{d^{\nu}}{dt^{\nu}}\frac{\partial X}{\partial x^{(\nu+1)}} - \binom{2+\nu}{\nu+1}\frac{d^{\nu+1}}{dt^{\nu+1}}\frac{\partial X}{\partial x^{(\nu+2)}} + \cdots - \binom{2\nu}{2\nu-1}\frac{d^{2\nu-1}}{dt^{2\nu-1}}\frac{\partial X}{\partial x^{(2\nu)}} = 0,$$

$$(11.)\quad \binom{1+\nu}{\nu-2}\frac{d^{\nu-2}}{dt^{\nu-2}}\frac{\partial X}{\partial x^{(\nu+1)}} - \binom{2+\nu}{\nu-1}\frac{d^{\nu-1}}{dt^{\nu-1}}\frac{\partial X}{\partial x^{(\nu+2)}} + \cdots - \binom{2\nu}{2\nu-3}\frac{d^{2\nu-3}}{dt^{2\nu-3}}\frac{\partial X}{\partial x^{(2\nu)}} = 0,$$

$$(12.)\quad \binom{1+\nu}{\nu-4}\frac{d^{\nu-4}}{dt^{\nu-4}}\frac{\partial X}{\partial x^{(\nu+1)}} - \binom{2+\nu}{\nu-3}\frac{d^{\nu-3}}{dt^{\nu-3}}\frac{\partial X}{\partial x^{(\nu+2)}} + \cdots - \binom{2\nu}{2\nu-5}\frac{d^{2\nu-5}}{dt^{2\nu-5}}\frac{\partial X}{\partial x^{(2\nu)}} = 0,$$

. . . . . .

$$(13.)\quad \binom{\nu+1}{1}\frac{d}{dt}\frac{\partial X}{\partial x^{(\nu+1)}} - \binom{\nu+2}{2}\frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial X}{\partial x^{(\nu+2)}} + \cdots - \binom{2\nu}{\nu}\frac{d^{\nu}}{dt^{\nu}}\frac{\partial X}{\partial x^{(2\nu)}} = 0,$$

$$(14.)\quad 2\frac{\partial X}{\partial x^{(\nu+2)}} - \binom{\nu+3}{1}\frac{d}{dt}\frac{\partial X}{\partial x^{(\nu+3)}} + \cdots - \binom{2\nu}{\nu-2}\frac{d^{\nu-2}}{dt^{\nu-2}}\frac{\partial X}{\partial x^{(2\nu)}} = 0,$$

$$(15.)\quad 2\frac{\partial X}{\partial x^{(\nu+4)}} - \binom{\nu+5}{1}\frac{d}{dt}\frac{\partial X}{\partial x^{(\nu+5)}} + \cdots - \binom{2\nu}{\nu-4}\frac{d^{\nu-4}}{dt^{\nu-4}}\frac{\partial X}{\partial x^{(2\nu)}} = 0,$$

. . . . . .

$$(16.)\quad 2\frac{\partial X}{\partial x^{(2\nu-3)}} - \binom{2\nu-2}{1}\frac{d}{dt}\frac{\partial X}{\partial x^{(2\nu-2)}} + \binom{2\nu-1}{2}\frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial X}{\partial x^{(2\nu-1)}} - \binom{2\nu}{3}\frac{d^3}{dt^3}\frac{\partial X}{\partial x^{(2\nu)}} = 0,$$

---

*) *Helmholtz*, „Ueber die physikalische Bedeutung des Princips der kleinsten Wirkung“, Wisenschaftliche Abhandlungen III, S. 231—237. — *L. Koenigsberger*, „Ueber die Principien der Mechanik“ Dieses Journal Bd. 118. — *A. Mayer*, „Die Existenzbedingungen eines kinetischen Potentials“, Berichte der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig vom 7. December 1896. — *Hirsch*, „Ueber eine charakteristische Eigenschaft der Differentialgleichungen der Variationsrechnung“, Mathematische Annalen B. 49. *K. Boehm*, „Die Existenzbedingungen eines kinetischen Potentials höherer Ordnung“, Dieses Journal Bd. 121.

$$(17.) \qquad 2\frac{\partial X}{\partial x^{(2\nu-1)}} - \binom{2\nu}{1}\frac{d}{dt}\frac{\partial X}{\partial x^{(2\nu)}} = 0$$

über. Differentiirt man die Gleichungen (11.), (12.) ...(13.) 2-mal, 4-mal, ...$(\nu-1)$-mal nach t, so erhält man durch Zusammenstellung mit (10.) und Elimination des ersten Gliedes $\frac{\nu-1}{2}$ Gleichungen von der Form

$$a_{\varrho 1}\frac{d^{\nu+1}}{dt^{\nu+1}}\frac{\partial X}{\partial x^{(\nu+2)}} + a_{\varrho 2}\frac{d^{\nu+2}}{dt^{\nu+2}}\frac{\partial X}{dx^{(\nu+3)}} + \cdots + a_{\varrho\nu-1}\frac{d^{2\nu-1}}{dt^{2\nu-1}}\frac{\partial X}{\partial x^{(2\nu)}} = 0 \quad \left(\varrho = 1, 2, \ldots, \tfrac{\nu-1}{2}\right),$$

welche mit der $(\nu+1)$-mal nach t differentiirten Gleichung (14.) wieder $\frac{\nu-1}{2}$ Gleichungen von der Gestalt

$$b_{\varrho 2}\frac{d^{\nu+2}}{dt^{\nu+2}}\frac{\partial X}{\partial x^{(\nu+3)}} + b_{\varrho 3}\frac{d^{\nu+3}}{dt^{\nu+3}}\frac{\partial X}{\partial x^{(\nu+4)}} + \cdots + b_{\varrho\nu-1}\frac{d^{2\nu-1}}{dt^{2\nu-1}}\frac{\partial X}{\partial x^{(2\nu)}} = 0 \quad \left(\varrho = 1, 2, \ldots, \tfrac{\nu-1}{2}\right)$$

liefern. Stellt man diese letzten $\frac{\nu-1}{2}$ Gleichungen mit einander zusammen und eliminirt zwischen ihnen den ersten Posten, so ergeben sich $\frac{\nu-3}{2}$ Gleichungen, welche wieder mit der $(\nu+3)$-mal nach t differentiirten Gleichung (15.) verbunden $\frac{\nu-3}{2}$ Gleichungen von der Form liefern:

$$c_{\varrho 4}\frac{d^{\nu+4}}{dt^{\nu+4}}\frac{\partial X}{\partial x^{(\nu+5)}} + c_{\varrho 5}\frac{d^{\nu+5}}{dt^{\nu+5}}\frac{\partial X}{\partial x^{(\nu+6)}} + \cdots + c_{\varrho\nu-1}\frac{d^{2\nu-1}}{dt^{2\nu-1}}\frac{\partial X}{\partial x^{(2\nu)}} = 0 \quad \left(\varrho = 1, 2, \ldots, \tfrac{\nu-3}{2}\right),$$

und fährt man so fort, so erhält man zwei Gleichungen der Gestalt

$$g_{\varrho\nu-3}\frac{d^{2\nu-3}}{dt^{2\nu-3}}\frac{\partial X}{\partial x^{(2\nu-2)}} + g_{\varrho\nu-2}\frac{d^{2\nu-2}}{dt^{2\nu-2}}\frac{\partial X}{\partial x^{(2\nu-1)}} + g_{\varrho\nu-1}\frac{d^{2\nu-1}}{dt^{2\nu-1}}\frac{\partial X}{\partial x^{(2\nu)}} = 0 \qquad (\varrho = 1, 2),$$

die mit einander zusammengestellt

$$h_{\nu-2}\frac{d^{2\nu-2}}{dt^{2\nu-2}}\frac{\partial X}{\partial x^{(2\nu-1)}} + h_{\nu-1}\frac{d^{2\nu-1}}{dt^{2\nu-1}}\frac{\partial X}{\partial x^{(2\nu)}} = 0$$

und mit der $(2\nu-2)$-mal nach t differentiirten Gleichung (17.) verbunden

$$\frac{d^{2\nu-1}}{dt^{2\nu-1}}\frac{\partial X}{\partial x^{(2\nu)}} = 0$$

liefern, so dass sich aus den successive hergeleiteten Beziehungen

$$(18.) \quad \frac{d^{2\nu-1}}{dt^{2\nu-1}}\frac{\partial X}{\partial x^{(2\nu)}} = 0, \quad \frac{d^{2\nu-2}}{dt^{2\nu-2}}\frac{\partial X}{\partial x^{(2\nu-1)}} = 0, \quad \cdots \frac{d^{\nu+1}}{dt^{\nu+1}}\frac{\partial X}{\partial x^{(\nu+2)}} = 0, \quad \frac{d^{\nu}}{dt^{\nu}}\frac{\partial X}{\partial x^{(\nu+1)}} = 0$$

ergiebt. Wir finden somit zunächst ***als nothwendige Bedingungen dafür dass eine Function H von x, x', x'', $\ldots x^{(\nu)}$ bestimmbar ist von der Art, dass der durch*** (8.) ***definirte Ausdruck von eben diesen Grössen unabhängig ist, die, dass die Gleichungen*** (18.) ***identisch befriedigt werden,*** und ganz ähnlich für gerade ν.

Beachtet man nun, dass die erste Gleichung (18.) die höchste Ableitung von x nur in dem Gliede

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^{(2\nu)^2}} x^{(4\nu-1)}$$

liefert, so folgt, da dieselbe identisch befriedigt sein soll,

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^{(2\nu)^2}} = 0 \tag{19.}$$

oder, da X von $x, x', x'', \ldots, x^{(\nu)}$ nicht abhängen soll,

$$X = f(x^{(\nu+1)}, x^{(\nu+2)}, \ldots, x^{(2\nu-1)})x^{(2\nu)} + X_1(x^{(\nu+1)}, x^{(\nu+2)}, \ldots, x^{(2\nu-1)}) \tag{20.}$$

und somit vermöge (18.)

$$\frac{d^{2\nu-1} f}{dt^{2\nu-1}} = 0,$$

oder da die höchste Ableitung von x wieder nur in dem Gliede

$$\frac{\partial f}{\partial x^{(2\nu-1)}} x^{(4\nu-2)}$$

enthalten ist, f unabhängig von $x^{2\nu-1}$; dann ist aber die höchste Ableitung von x nur in dem Gliede

$$\frac{\partial f}{\partial x^{(2\nu-2)}} x^{(4\nu-3)}$$

enthalten, f also auch unabhängig von $x^{(2\nu-2)}$, u. s. w., so dass sich f schliesslich nothwendig als Constante ergiebt und daher X nach (20.) die Form annimmt

$$X = a_0 x^{(2\nu)} + X_1(x^{(\nu+1)}, x^{(\nu+2)}, \cdots x^{(2\nu-1)}). \tag{21.}$$

Beachtet man aber nun, dass jetzt die zweite Gleichung (18.) in

$$\frac{d^{2\nu-2}}{dt^{2\nu-2}} \frac{\partial X_1}{\partial x^{(2\nu-1)}} = 0$$

übergeht, so wird wiederum die höchste Ableitung von x nur in dem Gliede

$$\frac{\partial^2 X_1}{\partial x^{(2\nu-1)^2}} x^{(4\nu-3)}$$

vorkommen und somit der Coefficient verschwinden, und daher X_1 die Form annehmen müssen

$$X_1 = f_1(x^{(\nu+1)}, x^{(\nu+2)}, \cdots x^{(2\nu-2)})x^{(2\nu-1)} + X_2(x^{(\nu+1)}, x^{(\nu+2)}, \cdots x^{(2\nu-2)}) \tag{22.}$$

und somit

$$\frac{d^{2\nu-2} f_1}{dt^{2\nu-2}} = 0$$

sein, woraus wiederum die Unabhängigkeit von f_1 von $x^{(2\nu-2)}, x^{(2\nu-3)}, \cdots x^{(\nu+1)}$ folgt, und sich somit

$$X_1 = a_1 x^{(2\nu-1)} + X_3(x^{(\nu+1)}, x^{(\nu+2)}, \cdots x^{(2\nu-2)})$$

und daher nach (21.)

$$(23.) \qquad X = a_0 x^{(2\nu)} + a_1 x^{(2\nu-1)} + X_3(x^{(\nu+1)}, x^{(\nu+2)}, \cdots x^{(2\nu-2)})$$

ergiebt. Schliessen wir so weiter, so folgt aus der Gleichung (18.) für X nothwendig die Form

$$X = a_0 x^{(2\nu)} + a_1 x^{(2\nu-1)} + \cdots + a_{\nu-1} x^{(\nu+1)} + a_\nu,$$

worin $a_0, a_1, \cdots a_{\nu-1}, a_\nu$ beliebige Constanten sind; setzt man nunmehr diesen Werth für X in die Gleichungen (10.) bis (13.) ein, so sind diese identisch befriedigt, während die Gleichungen (14.) bis (17.) die Bedingungen

$$\frac{\partial X}{\partial x^{(\nu+2)}} = \frac{\partial X}{\partial x^{(\nu+4)}} = \cdots = \frac{\partial X}{\partial x^{(2\nu-1)}} = 0 \text{ oder } a_{\nu-2} = a_{\nu-4} = \cdots = a_1 = 0$$

liefern, und wir finden somit *als nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass eine Function H von* $x, x', \cdots x^{(\nu)}$ *bestimmbar ist von der Art, dass der Ausdruck*

$$X = \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial x'} + \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial H}{\partial x''} - \cdots + (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu}\frac{\partial H}{\partial x^{(\nu)}}$$

von $x, x', \cdots x^{(\nu)}$ *unabhängig ist, die Form dieses Ausdruckes*

$$X = a_0 x^{(2\nu)} + a_2 x^{(2\nu-2)} + a_4 x^{(2\nu-4)} + \cdots + a_{\nu-1} x^{(\nu+1)} + a_\nu,$$

worin $a_0, a_2, \cdots a_{\nu-2}, a_\nu$ *beliebige Constanten bedeuten.*

Aber es lässt sich auch unmittelbar eine dazugehörige Form für H finden, welche der geforderten Beziehung Genüge leistet, und zwar lautet diese

$$H = \tfrac{1}{2}\left\{(-1)^\nu a_0 x^{(\nu)^2} + (-1)^{\nu-1} a_2 x^{(\nu-1)^2} + (-1)^{\nu-2} a_4 x^{(\nu-2)^2} + \cdots + (-1)^{\frac{\nu+1}{2}} a_{\nu-1} x^{\left(\frac{\nu+1}{2}\right)^2}\right\} + a_\nu x;$$

im speciellen Falle ergiebt sich als zusammengehöriges System

$$H = (-1)^\nu \frac{a_0}{2} x^{(\nu)^2}, \qquad X = a_0 x^{(2\nu)};$$

für gerade ν hat H die Form

$$H = \tfrac{1}{2}\left\{(-1)^\nu a_0 x^{(\nu)^2} + (-1)^{\nu-1} a_2 x^{(\nu-1)^2} + (-1)^{\nu-2} a_4 x^{(\nu-2)^2} + \cdots + (-1)^{\frac{\nu}{2}+1} a_{\nu-2} x^{\left(\frac{\nu}{2}+1\right)^2}\right\} + a_\nu x.$$

Fassen wir nunmehr die gewonnenen Resultate zusammen, so ergiebt sich das folgende Theorem:

Die allein mögliche analytische Definition für die oben durch das Gesetz von der Uebertragung der Arbeit definirte Kraft, welche ein frei sich bewegender Punkt durch eben diese Bewegung ausübt, ist, wenn ν irgend eine positive ganze Zahl bedeutet und die lebendige Kraft des Punktes T, je nachdem ν ungerade oder gerade ist, durch

$$T = -\tfrac{1}{2}\Big\{(-1)^{\nu} a_0 x^{(\nu)^2} + (-1)^{\nu-1} a_2 x^{(\nu-1)^2} + (-1)^{\nu-2} a_4 x^{(\nu-2)^2} + \cdots + (-1)^{\frac{\nu+1}{2}} a_{\nu-1} x^{\left(\frac{\nu+1}{2}\right)^2}\Big\}$$

oder

$$T = -\tfrac{1}{2}\Big\{(-1)^{\nu} a_0 x^{(\nu)^2} + (-1)^{\nu-1} a_2 x^{(\nu-1)^2} + (-1)^{\nu-2} a_4 x^{(\nu-2)^2} + \cdots + (-1)^{\frac{\nu}{2}+1} a_{\nu-2} x^{\left(\frac{\nu}{2}+1\right)^2}\Big\}$$

definirt wird, worin $a_0, a_2, \cdots$ Constanten bedeuten, unter der Voraussetzung, dass der Ausdruck für die Kraft von $x, x', x'', \cdots x^{(\nu)}$ unabhängig sein soll, in der Form gegeben

$$X = -\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial x'} - \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial T}{\partial x''} + \cdots - (-1)^{\nu}\frac{d^{\nu}}{dt^{\nu}}\frac{\partial T}{\partial x^{(\nu)}},$$

also für ungerade oder gerade ν

$$X = a_0 x^{(2\nu)} + a_2 x^{(2\nu-2)} + a_4 x^{(2\nu-4)} + \cdots + a_{\nu-1} x^{(\nu+1)}$$

oder

$$X = a_0 x^{(2\nu)} + a_2 x^{(2\nu-2)} + a_4 x^{(2\nu-4)} + \cdots + a_{\nu-2} x^{(\nu+2)}.$$

Daraus folgt nach dem Früheren unmittelbar, dass, wenn ein gewissen Zwangsbedingungen unterworfenes System sich bewegt, dessen unabhängige Coordinaten mit $p_1, p_2, \cdots p_\mu$ bezeichnet werden sollen, die vermöge dieser Bewegung ausgeübte und auf die Vermehrung der Coordinate p_s gerichtete Kraft durch den Ausdruck

$$P_s = -\frac{\partial T}{\partial p_s} + \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial p_s'} - \cdots + (-1)^{\nu}\frac{d^{\nu}}{dt^{\nu}}\frac{\partial T}{\partial p_s^{(\nu)}}$$

eindeutig bestimmt ist, worin T den durch die Zwangsbedingungen in die Coordinaten $p_1, \cdots p_\mu$ umgesetzten Ausdruck für die lebendige Kraft des Systems

$$T = -\tfrac{1}{2}(-1)^{\nu} a_0 \sum_1^n{}_i (x_i^{(\nu)^2} + y_i^{(\nu)^2} + z_i^{(\nu)^2}) - \tfrac{1}{2}(-1)^{\nu-1} a_2 \sum_1^n{}_i (x_i^{(\nu-1)^2} + y_i^{(\nu-1)^2} + z_i^{(\nu-1)^2}) - \cdots$$
$$- (-1)^{\frac{\nu+1}{2}} a_{\nu-1} \sum_1^n{}_i \left(x_i^{\left(\frac{\nu+1}{2}\right)^2} + y_i^{\left(\frac{\nu+1}{2}\right)^2} + z_i^{\left(\frac{\nu+1}{2}\right)^2}\right)$$

für ungerade ν und entsprechend für gerade ν bedeutet.*)

*) Es mag an dieser Stelle bemerkt werden, dass in dem von mir im 118. Bande d. J. erweiterten *Gauss*schen Princip des kleinsten Zwanges die Coefficienten der Quadrate

Wir werden sagen, ***ein Kraftsystem besitzt eine Kräftefunction U,*** wenn eine solche Function U der Coordinaten x_i, y_i, z_i und deren nach der Zeit genommenen Ableitungen bis zur ν-ten Ordnung hin existirt, für welche die Ausdrücke

$$\frac{\partial U}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial x_i'} + \cdots + (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu}\frac{\partial U}{\partial x_i^{(\nu)}},$$

$$\frac{\partial U}{\partial y_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial y_i'} + \cdots + (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu}\frac{\partial U}{\partial y_i^{(\nu)}},$$

$$\frac{\partial U}{\partial z_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial z_i'} + \cdots + (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu}\frac{\partial U}{\partial z_i^{(\nu)}}$$

die nach den drei Coordinatenaxen genommenen Kraftcomponenten des Punktes x_i, y_i, z_i liefern, so dass vermöge der bekannten Beziehung*), wenn durch beliebige Zwangsbedingungen die von einander unabhängigen Coordinaten $p_1, p_2, \ldots, p_\mu$ eingeführt werden, die Differentialgleichungen

$$-\frac{\partial T}{\partial p_s} + \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial p_s'} - \cdots - (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu}\frac{\partial T}{\partial p_s^{(\nu)}} = \frac{\partial U}{\partial p_s} - \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial p_s'} + \cdots + (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu}\frac{\partial U}{\partial p_s^{(\nu)}} \quad (s=1,2,\ldots\mu)$$

die Bewegung beschreiben oder die Abhängigkeit der Coordinaten von der Zeit bestimmen.

Ist die zwischen zwei Punkten wirkende Kraft R eine Function der Entfernung r derselben und der nach der Zeit genommenen Ableitungen bis zur 2ν-ten Ordnung hin, so folgt offenbar aus der Beziehung

$$\frac{\partial W}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial W}{\partial x'} + \cdots + (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu}\frac{\partial W}{\partial x^{(\nu)}} = \left(\frac{\partial W}{\partial r} - \frac{d}{dt}\frac{\partial W}{\partial r'} + \cdots + (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu}\frac{\partial W}{\partial r^{(\nu)}}\right)\frac{\partial r_\nu}{\partial x}$$

und den analogen für y und z sowie aus den oben angeführten nothwendigen und hinreichenden Bedingungen (9.) für die Existenz eines kinetischen Potentials der nachstehende Satz:

---

des Ausdruckes M (Abschnitt VI)

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x_\varkappa^{(\nu)2}}, \qquad \frac{\partial^2 H}{\partial y_\varkappa^{(\nu)2}}, \qquad \frac{\partial^2 H}{\partial z_\varkappa^{(\nu)2}}$$

in gleiche Constanten übergehen, wenn die Glieder der höchsten Ableitungen in dem Ausdruck für H die Form haben

$$Ax_\varkappa^{(\nu)2}, \qquad Ay_\varkappa^{(\nu)2}, \qquad Az_\varkappa^{(\nu)2},$$

worin A eine Constante bedeutet, was nach dem Obigen der Fall ist, wenn H die lebendige Kraft des Systems darstellt.

*) „Ueber die Principien der Mechanik“, Dieses Journal. Bd. 118, S. 5.

Wirken zwischen den n Punkten eines Systems Kräfte $R_{\lambda\mu}$, welche von der Entfernung $r_{\lambda\mu}$ des λ-ten von dem μ-ten Punkte und den nach der Zeit genommenen Ableitungen derselben bis zur 2ν-ten Ordnung hin abhängen und ferner den Gleichungen

$$\frac{\partial R_{\lambda\mu}}{\partial r_{\lambda\mu}^{(\tau)}}(1-(-1)^{\tau})-\binom{\tau+1}{1}\frac{d}{dt}\frac{\partial R_{i\mu}}{\partial r_{\lambda\mu}^{(\tau+1)}}+\binom{\tau+2}{2}\frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial R_{\lambda\mu}}{\partial r_{\lambda\mu}^{(\tau+2)}}-\cdots$$
$$+(-1)^{2\nu-\tau}\binom{2\nu}{2\nu-\tau}\frac{d^{2\nu-\tau}}{dt^{2\nu-\tau}}\frac{\partial R_{\lambda\mu}}{\partial r_{\lambda\mu}^{(2\nu)}}=0$$

für $\tau=1, 3, 5, \ldots, 2\nu-1$ identisch genügen, so besitzt das Kräftesystem eine Kräftefunction, und zwar wird dieselbe, wenn $W_{\lambda\mu}$ eine Function von $r_{\lambda\mu}$ und den nach t genommene Ableitungen dieser Grösse bis zur ν-ten Ordnung hin bedeutet, welche der Gleichung

$$R_{\lambda\mu}=\frac{\partial W_{\lambda\mu}}{\partial r_{\lambda\mu}}-\frac{d}{dt}\frac{\partial W_{\lambda\mu}}{\partial r'_{\lambda\mu}}+\cdots+(-1)^{\nu}\frac{d^{\nu}}{dt^{\nu}}\frac{\partial W_{\lambda\mu}}{\partial r_{\lambda\mu}^{(\nu)}}$$

genügt, durch

$$W_{12}+W_{13}+\cdots+W_{1n}+W_{23}+\cdots+W_{2n}+\cdots+W_{n-1n}$$

dargestellt.

Um nun zur Verallgemeinerung des dem *Newton*schen Potential analogen Ausdruckes für Kräfte, welche auch von den Ableitungen der Entfernungen abhängen, zu gelangen, mögen die zwischen zwei Punkten wirkenden Kräfte untersucht werden, welche eine der *Laplace–Poisson*schen Potentialgleichung analoge Beziehung liefern.

In den Vorlesungen*) über „Schwere, Elektricität und Magnetismus“ von ***Riemann*** wird für die durch den Ausdruck

$$W=\frac{mm_1}{r}\left(1+\frac{r'^2}{k^2}\right)$$

definirte Kräftefunction des *Weber*schen Gesetzes eine solche Verallgemeinerung des *Laplace*schen Satzes in bekannten Zeichen in der Form

$$\Delta\Delta W=0$$

gefunden; aber abgesehen davon, dass die Ableitungen der Entfernung nothwendig in die die Kräftefunction definirende partielle Differentialgleichung eintreten müssen, und ausserdem, wie aus den später entwickelten Ausdrücken unmittelbar ersichtlich sein wird, genau dieselbe, also nicht eine Erweiterung der *Poisson*schen Differentialgleichung sich auch für den Fall ergeben würde, dass der Punkt in der nach dem *Weber*schen Gesetz an-

*) S. 330.

ziehenden Masse läge, lässt sich leicht zeigen, dass die von *Riemann* gegebene Erweiterung ein zufälliges, gerade für das *Weber*sche Gesetz zutreffendes Rechnungsresultat giebt, also in keiner Weise selbst nur auf Kräftefunctionen erster Ordnung ausdehnbar ist. Denn sei

$$W = \frac{m m_1}{r}\left(1+\frac{r'^{\lambda}}{k^2}\right),$$

so wird vermöge der Beziehungen

$$\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial r}{\partial z}\right)^2=1, \quad \frac{\partial^2 r}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial z^2}=\frac{2}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial r'}{\partial x}+\frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial r'}{\partial y}+\frac{\partial r}{\partial z}\frac{\partial r'}{\partial z}=0,$$

$$\frac{\partial^2 r'}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 r'}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 r'}{\partial z^2}=-2\frac{r'}{r^2},$$

und wenn

$$x'^2+y'^2+z'^2 = v^2$$

gesetzt wird,

$$\left(\frac{\partial r'}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial r'}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial r'}{\partial z}\right)^2 = \frac{v^2-r'^2}{r^2},$$

$$\Delta W = \frac{\lambda(\lambda-1)v^2 r'^{\lambda-2}}{r^3}-\frac{\lambda(\lambda+1)r'^{\lambda}}{r^3}$$

folgen und sich hieraus wiederum

$$\Delta\Delta W = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)\frac{r'^{\lambda-4}v^4}{r^5}-2\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda+1)\frac{r'^{\lambda-2}v^2}{r^5}$$
$$+\lambda(\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda+3)\frac{r'^{\lambda}}{r^5}$$

ergeben, so dass nur für $\lambda=0$ und $\lambda=2$ also *nur* für das *Newton*sche Potential und die *Weber*sche Kräftefunction

$$\Delta\Delta W = 0$$

ist.

Sei nunmehr W — um gleich von vornherein die Fälle auszuschliessen, in denen dasselbe für endliche Werthe der Ableitungen der Entfernung unendlich gross werden kann — eine ganze Function von $r', r'', \cdots r^{(\nu)}$, in welche r selbst beliebig eintreten mag, so wird, wenn diese Function in Bezug auf $r^{(\nu)}$ von paarem Grade $2k$ ist und

$$\frac{\partial^2}{\partial x^{(\nu)2}}+\frac{\partial^2}{\partial y^{(\nu)2}}+\frac{\partial^2}{\partial z^{(\nu)2}} \quad \text{mit} \quad \Delta_{\nu\nu}$$

bezeichnet wird, vermöge der Beziehung

$$\frac{\partial r^{(\nu)}}{\partial x^{(\nu)}} = \frac{\partial r}{\partial x}\text{*)},$$

*) Vergl. „Ueber die Principien der Mechanik“ Dieses Journal Bd. 118, Abschn. I, Gl. (2.), wonach, wenn R eine beliebige Function von t, x, y, z bedeutet,

$$\frac{\partial R^{(\varrho)}}{\partial x^{(\lambda)}} = \frac{\varrho(\varrho-1)\cdots(\varrho-\lambda+1)}{1\cdot 2\cdots\lambda}\frac{\partial R^{(\varrho-\lambda)}}{\partial x}.$$

wie unmittelbar zu sehen,

$$\Delta_{\nu\nu} W = \frac{\partial W}{\partial r^{(\nu)2}}$$

in Bezug auf $r^{(\nu)}$ vom $(2k-2)$-ten Grade sein und somit der k-fach iterirte Ausdruck

$$\Delta_{\nu\nu}^{k} W = V$$

die Grösse $r^{(\nu)}$ gar nicht mehr enthalten und zwar der Coefficient von $r^{(\nu)2k}$ in W sein mit $(2k)!$ multiplicirt.

Ist dagegen W in Bezug auf $r^{(\nu)}$ von unpaarem Grade $2k+1$, so wird

$$\Delta_{\nu\nu}^{k} W = W_1$$

noch in Bezug auf $r^{(\nu)}$ vom ersten Grade sein, und wenn man sodann

$$\frac{\partial^2}{\partial x^{(\nu)} \partial x^{(\nu-1)}} + \frac{\partial^2}{\partial y^{(\nu)} \partial y^{(\nu-1)}} + \frac{\partial^2}{\partial z^{(\nu)} \partial z^{(\nu-1)}} \text{ mit } \Delta_{\nu\nu-1}$$

bezeichnet und beachtet, dass, wenn $\nu > 1$, vermöge der Beziehung

$$\frac{\partial r^{(\nu)}}{\partial x^{(\nu-1)}} = \nu \frac{\partial r'}{\partial x}$$

der Ausdruck

$$\Delta_{\nu\nu-1} W_1 = \frac{\partial^2 W_1}{\partial r^{(\nu)} \partial r^{(\nu-1)}}$$

von $r^{(\nu)}$ unabhängig ist, so wird sich

$$\Delta_{\nu\nu-1} \Delta_{\nu\nu}^{k} W = V$$

ergeben, worin V wie oben nur noch von $r, r', \cdots r^{(\nu-1)}$ abhängt und den nach $r^{(\nu-1)}$ genommenen partiellen Differentialquotienten des Coefficienten von $r^{(\nu)2k+1}$ mit $(2k+1)!$ multiplicirt darstellt; für den Fall $\nu = 1$ wird aus

$$\Delta_{11}^{k} W = W_1,$$

wie leicht zu sehen,

$$\Delta_{10} W_1 = \frac{\partial^2 W_1}{\partial r \partial r'} + \frac{2}{r} \frac{\partial W_1}{\partial r'}$$

und somit wieder

$$\Delta_{10} \Delta_{11}^{k} W = V$$

folgen, worin V nur noch von r abhängt, und wenn in W der Coefficient von r'^{2k+1} $\varphi(r)$ war, den Werth

$$(2k+1)! \left(\varphi'(r) + \frac{2}{r}\varphi(r)\right)$$

hat.

Da man jetzt auf die Functionen V, welche nur noch $r, r', \cdots r^{(\nu-1)}$ enthalten, dieselben Schlüsse anwenden kann, so folgt zunächst, dass, wie zur Bildung der obigen Gleichungen für V nur diejenigen Glieder in W in Betracht kommen, welche die höchste Potenz von $r^{(\nu)}$ enthalten, für die Fortsetzung des Verfahrens unter diesen Gliedern wieder nur diejenigen von Einfluss sein werden, welche die höchste Potenz von $r^{(\nu-1)}$ enthalten u. s. w., und dass man somit durch Wiederholung des Verfahrens, wenn der allein in Betracht kommende Posten in W mit

$$Ar^{(\nu)^{\alpha_\nu}} r^{(\nu-1)^{\alpha_{\nu-1}}} \ldots r''^{\alpha_2} r'^{\alpha_1} \varphi(r)$$

bezeichnet wird, worin A eine Constante bedeutet, schliesslich von einer nachher anzugebenden Constanten abgesehen, entweder auf

$$\varphi(r) \quad \text{oder auf} \quad \frac{\partial \varphi(r)}{\partial r} + \frac{2}{r}\varphi(r)$$

geführt wird, deren gemeinsame Form wir durch

$$\frac{\partial^{\varepsilon_1} \varphi(r)}{\partial r^{\varepsilon_1}} + \varepsilon_1 \frac{2}{r}\varphi(r)$$

darstellen können, wenn $\varepsilon_1 = 0$ oder 1 ist. Da aber endlich für jede Function V von r

$$\Delta_{00} V = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial V}{\partial r}$$

ist, also

$$\Delta_{00}\left\{\frac{\partial^{\varepsilon_1}\varphi(r)}{\partial r^{\varepsilon_1}} + \varepsilon_1 \frac{2}{r}\varphi(r)\right\} = \frac{\partial^{2+\varepsilon_1}\varphi(r)}{\partial r^{2+\varepsilon_1}} + \varepsilon_1 \frac{2}{r}\frac{\partial^2 \varphi(r)}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial^{1+\varepsilon_1}\varphi(r)}{\partial r^{1+\varepsilon_1}}$$

wird, so erhalten wir die nachfolgende Ausdehnung der für eine Function V_1, welche nur von r abhängt, bekannten Transformation des Ausdruckes ΔV_1

$$\frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_1}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial V}{\partial r}.$$

Ist W eine in den Grössen $r', r'', \ldots, r^{(\nu)}$ ganze Function, in welche r selbst beliebig eintreten kann, und greift man denjenigen Posten

$$Ar^{(\nu)^{\alpha_\nu}} r^{(\nu-1)^{\alpha_{\nu-1}}} r^{(\nu-2)^{\alpha_{\nu-2}}} \ldots r''^{\alpha_2} r'^{\alpha_1} \varphi(r)$$

heraus, welcher die Eigenschaft hat, dass $r^{(\nu)^{\alpha_\nu}}$ die höchste in W vorkommende Potenz von $r^{(\nu)}$ ist, $r^{(\nu-1)^{\alpha_{\nu-1}}}$ die höchste Potenz von $r^{(\nu-1)}$, die mit $r^{(\nu)^{\alpha_\nu}}$ verbunden vorkommt, $r^{(\nu-2)^{\alpha_{\nu-2}}}$ die höchste Potenz von $r^{(\nu-2)}$ ist, welche mit

$r^{(\nu)\alpha_\nu} r^{(\nu-1)\alpha_{\nu-1}}$ ***verbunden vorkommt u. s. w., und welcher das höchste Glied von W genannt werden soll, so setze man***

$$\begin{aligned}
\alpha_\nu &= 2k_\nu + \varepsilon_\nu, \\
\alpha_{\nu-1} - \varepsilon_\nu &= 2k_{\nu-1} + \varepsilon_{\nu-1}, \\
\alpha_{\nu-2} - \varepsilon_{\nu-1} &= 2k_{\nu-2} + \varepsilon_{\nu-2}, \\
&\cdots\cdots\cdots \\
\alpha_2 - \varepsilon_3 &= 2k_2 + \varepsilon_2, \\
\alpha_1 - \varepsilon_2 &= 2k_1 + \varepsilon_1,
\end{aligned}$$

worin die Grössen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\nu$ ***die Zahlen 0 oder 1 bedeuten, und es wird sodann die der obigen Gleichung analoge Transformation die Form annehmen***

$$\Delta_{00}\Delta_{10}^{\varepsilon_1}\Delta_{11}^{k_1}\Delta_{21}^{\varepsilon_2}\Delta_{22}^{k_2}\ldots\Delta_{\nu-1\,\nu-2}^{\varepsilon_{\nu-1}}\Delta_{\nu-1\,\nu-1}^{k_{\nu-1}}\Delta_{\nu\nu-1}^{\varepsilon_\nu}\Delta_{\nu\nu}^{k_\nu}W$$

$$= A\alpha_\nu!\,\alpha_{\nu-1}!\ldots\alpha_2!\,\alpha_1!\left\{\frac{\partial^{2+\varepsilon_1}\varphi(r)}{\partial r^{2+\varepsilon_1}} + \varepsilon_1\frac{2}{r}\frac{\partial^2\varphi(r)}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial^{1+\varepsilon_1}\varphi(r)}{\partial r^{1+\varepsilon_1}}\right\}.$$

Um nun die Differentialgleichung der Kräftefunction einer endlichen oder unendlichen Anzahl von Centren für einen ausserhalb der Massen gelegenen Punkt zu erhalten, müsste die rechte Seite der obigen Gleichung verschwinden und daher $\varphi(r)$ einer der beiden Differentialgleichungen genügen

$$\frac{\partial^2\varphi(r)}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\varphi(r)}{\partial r} = 0$$

oder

$$\frac{\partial^3\varphi(r)}{\partial r^3} + \frac{4}{r}\frac{\partial^2\varphi(r)}{\partial r^2} = 0,$$

somit die Form haben

$$\varphi(r) = \frac{c}{r} + c_1 \quad \text{oder} \quad \varphi(r) = \frac{c}{r^2} + c_1 r + c_2,$$

und wir finden somit,

dass die erweiterte Laplacesche Gleichung für alle von r und dessen nach t genommenen Ableitungen bis zur ν-ten Ordnung hin abhängigen Functionen W, die ganze Functionen dieser Ableitungen sind und deren höchstes Glied den Coefficienten hat

$$\frac{c}{r} + c_1 \quad \text{oder} \quad \frac{c}{r^2} + c_1 r + c_2,$$

die Form annimmt

$$\Delta_{00}\Delta_{10}^{\varepsilon_1}\Delta_{11}^{k_1}\Delta_{12}^{\varepsilon_2}\Delta_{22}^{k_2}\ldots\Delta_{\nu-1\,\nu-2}^{\varepsilon_{\nu-1}}\Delta_{\nu-1\,\nu-1}^{k_{\nu-1}}\Delta_{\nu\nu-1}^{\varepsilon_\nu}\Delta_{\nu\nu}^{k_\nu}W = 0.$$

Nennt man nunmehr für eine Kraft

$$R(r, r', r'', \ldots, r^{(2\nu)}),$$

welche von der Entfernung und deren nach der Zeit genommenen Ableitungen bis zur 2ν-ten Ordnung hin abhängt und welche die Gleichungen

$$\frac{\partial R}{\partial r^{(\tau)}}(1-(-1)^{\tau})-\binom{\tau+1}{1}\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial r^{(\tau+1)}}+\binom{\tau+2}{2}\frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial R}{\partial r^{(\tau+2)}}-\cdots$$
$$+(-1)^{2\nu-\tau}\binom{2\nu}{2\nu-\tau}\frac{d^{2\nu-\tau}}{dt^{2\nu-\tau}}\frac{\partial R}{\partial r^{(2\nu)}}=0$$

identisch befriedigt, die Kräftefunction W, welche der Gleichung genügt

$$R(r, r', \ldots, r^{(2\nu)}) = \frac{\partial W}{\partial r}-\frac{d}{dt}\frac{\partial W}{\partial r'}+\cdots+(-1)^{\nu}\frac{d^{\nu}}{dt^{\nu}}\frac{\partial W}{\partial r^{(\nu)}},$$

ein Potential, wenn diese von r und deren ν Ableitungen abhängige Function als höchstes Glied — im oben angegebenen Sinne — einen Ausdruck von der Form

$$r^{(\nu)\alpha_\nu} r^{(\nu-1)\alpha_{\nu-1}} \ldots r''^{\alpha_2} r'^{\alpha_1}\left(\frac{c}{r}+c_1\right)$$

oder

$$r^{(\nu)\alpha_\nu} r^{(\nu-1)\alpha_{\nu-1}} \ldots r''^{\alpha_2} r'^{\alpha_1}\left(\frac{c}{r^2}+c_1 r+c_2\right)$$

hat, je nachdem die durch die Gleichungen

$$\alpha_\nu = 2k_\nu+\varepsilon_\nu, \quad \alpha_{\nu-1}-\varepsilon_\nu = 2k_{\nu-1}+\varepsilon_{\nu-1}, \quad \ldots, \quad \alpha_2-\varepsilon_3 = 2k_2+\varepsilon_2, \quad \alpha_1-\varepsilon_2 = 2k_1+\varepsilon_1$$

in welchen die Grössen ε die Zahlen 0 oder 1 bedeuten, bestimmte Grösse

$$\varepsilon_1 \equiv \alpha_1-\alpha_2+\alpha_3-\alpha_4+\cdots+(-1)^{\nu-1}\alpha_\nu \pmod 2$$

den Werth 0 oder 1 hat, so lautet die erweiterte Laplacesche Gleichung für das allgemeine Potential

$$\Delta_{(0)}\Delta_{10}^{\varepsilon_1}\Delta_{11}^{k_1}\Delta_{21}^{\varepsilon_2}\Delta_{22}^{k_2}\ldots\Delta_{\nu-1\,\nu-2}^{\varepsilon_{\nu-1}}\Delta_{\nu-1\,\nu-1}^{k_{\nu-1}}\Delta_{\nu\nu-1}^{\varepsilon_\nu}\Delta_{\nu\nu}^{k_\nu}W=0.$$

Die Kräftefunction des *Weber*schen Gesetzes

$$W=\frac{mm_1}{r}\left(1+\frac{r'^2}{k^2}\right)$$

hat als höchstes Glied

$$\frac{mm_1}{k^2}\frac{r'^2}{r},$$

und da $\nu=1$, $\alpha_1=2$, also $k_1=1$ und $\varepsilon_1=0$ ist, die verlangte Form, und

ist somit ein Potential im angegebenen Sinne, das der partiellen Differentialgleichung

$$\Delta_{00}\Delta_{11}\, W = 0$$

Genüge leistet.

Um nun zu zeigen, wie man für jedes gegebene Anziehungsgesetz auch die Erweiterung der *Poisson*schen Differentialgleichung für einen innerhalb der wirkenden Massen gelegenen Punkt ermitteln kann, beschränke ich mich auf Potentiale, welche nur von der Entfernung und deren erster Ableitung nach der Zeit abhängen und somit, wenn wir die Masse des angezogenen Punktes der Einheit gleich setzen und die Masse des anziehenden Punktes als multiplicatorische Constante annehmen, die Form haben

$$(24.) \qquad W = m\{\varphi_0(r) + \varphi_1(r)r' + \varphi_2(r)r'^2 + \cdots + \varphi_\lambda(r)r'^\lambda\},$$

worin, je nachdem $\lambda = 2z$ oder $= 2z+1$ ist,

$$\varphi_{2z}(r) = \frac{c}{r} + c_1, \qquad \varphi_{2z+1}(r) = \frac{c}{r^2} + c_1 r + c_2$$

ist, und für welche die in Bezug auf einen ausserhalb gelegenen Punkt gültigen *Laplace*schen Gleichungen bestehen

$$\Delta_{00}\Delta_{11}^z W = 0 \quad \text{oder} \quad \Delta_{00}\Delta_{10}\Delta_{11}^z W = 0.$$

Nach bekannten Principien genügt es, um die erweiterte *Poisson*sche Differentialgleichung zu ermitteln, das Potential einer homogenen Vollkugel auf einen innerhalb derselben gelegenen Punkt zu berechnen, und ich behandle desshalb zunächst die etwas allgemeinere Aufgabe: ***das Potential einer in concentrischen Schichten homogenen und in ihren Massenelementen nach dem Potential*** (24.) ***wirkenden Hohlkugel auf einen ausserhalb oder innerhalb derselben gelegenen Punkt zu berechnen.***

Legt man den Anfangspunkt eines rechtwinkligen Coordinatensystems in den Mittelpunkt der Hohlkugel, deren innere und äussere Radien mit R_0 und R_1 bezeichnet werden mögen, die Z-Axe durch den angezogenen Punkt und die YZ-Ebene durch die in dem betrachteten Momente der Grösse und Richtung nach gegebene Geschwindigkeit desselben, so wird, wenn die Componenten derselben mit x', y', z' bezeichnet werden,

$$x' = 0, \quad v'^2 = y'^2 + z'^2$$

sein. Bezeichnet man ferner die Coordinaten der Hohlkugel mit a, b, c und

sei r die Entfernung des angezogenen Punktes von einem Punkte des Ringes, so folgt aus

$$r^2 = (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2,$$

worin $x = 0$, $y = 0$ zu setzen ist, durch Differentiation nach t mit Beibehaltung der Coordinaten a, b, c

$$rr' = (x-a)x'+(y-b)y'+(z-c)z'$$

oder für den angezogenen Punkt, der durch $x = 0$, $y = 0$, $x' = 0$ charakterisirt ist,

$$rr' = -by'-cz'+zz'.$$

Führt man für die Coordinaten der Hohlkugel Polarcoordinaten ein, so ist in bekannter Bezeichnung

$$a = \varrho\sin\vartheta\sin\varphi, \qquad b = \varrho\sin\vartheta\cos\varphi, \qquad c = \varrho\cos\vartheta,$$

und es geht die obige Beziehung in

$$r' = z\,z'\frac{1}{r} - z'\frac{\varrho\cos\vartheta}{r} - y'\frac{\varrho\sin\vartheta\cos\varphi}{r} \tag{25.}$$

über; es wird somit, da das wesentlich positive r durch

$$r = \sqrt{z^2+\varrho^2-2\varrho z\cos\vartheta} \tag{26.}$$

definirt ist, das Potential der Hohlkugel, deren in concentrischen Schichten constante, also nur mit ϱ variirende Dichtigkeit mit σ bezeichnet werden soll, bei Berücksichtigung von (24.), (25.) und (26.) durch den Ausdruck gegeben sein

$$W = \int_{R_0}^{R_1}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \sigma\varrho^2\sin\vartheta \sum_1^{\lambda}{}_i \left\{\frac{\varphi_i(\sqrt{z^2+\varrho^2-2\varrho z\cos\vartheta})}{(z^2+\varrho^2-2\varrho z\cos\vartheta)^{\frac{i}{2}}}(zz'-z'\varrho\cos\vartheta-y'\varrho\sin\vartheta\cos\varphi)^i\right\} d\varphi\, d\vartheta\, d\varrho.$$

Legen wir zur Ausführung des Integrales der Einfachheit wegen das *Weber*sche Potential zu Grunde, für welches

$$\lambda = 2, \quad \varphi_0(r) = \frac{1}{r}, \quad \varphi_1(r) = 0, \quad \varphi_2(r) = \frac{1}{k^2 r}$$

ist, so ergiebt sich nach Ausführung der Integration für φ

$$W = 2\pi\int_{R_0}^{R_1}\int_0^{\pi} \frac{\sigma\varrho^2\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varrho}{(z^2+\varrho^2-2\varrho z\cos\vartheta)^{\frac{1}{2}}} + \frac{\pi}{k^2}\int_{R_0}^{R_1}\int_0^{\pi} \frac{2(zz'-z'\varrho\cos\vartheta)^2+y'^2\varrho^2\sin^2\vartheta}{(z^2+\varrho^2-2\varrho z\cos\vartheta)^{\frac{3}{2}}}\sigma\varrho^2\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varrho. \tag{27.}$$

Bezeichnen wir nun die nachfolgenden nach der Variabeln ϑ zwischen den Grenzen 0 und π genommenen Integrale Θ für einen ausserhalb der

Hohlkugel gelegenen Punkt mit Θ_a, für einen innerhalb des Hohlraumes gelegenen Punkt mit Θ_i, so ist, wie leicht zu sehen,

$$\text{für } \Theta = \int_0^\pi \frac{\sin\vartheta\, d\vartheta}{(z^2+\varrho^2-2\varrho z\cos\vartheta)^{\frac{1}{2}}}, \qquad \Theta_a = \frac{2}{z}, \qquad \Theta_i = \frac{2}{\varrho};$$

$$\text{für } \Theta = \int_0^\pi \frac{\sin\vartheta\, d\vartheta}{(z^2+\varrho^2-2\varrho z\cos\vartheta)^{\frac{3}{2}}}, \qquad \Theta_a = \frac{2}{z}\frac{1}{z^2-\varrho^2}, \qquad \Theta_i = \frac{2}{\varrho}\frac{1}{\varrho^2-z^2};$$

$$\text{für } \Theta = \int_0^\pi \frac{\sin\vartheta\cos\vartheta\, d\vartheta}{(z^2+\varrho^2-2\varrho z\cos\vartheta)^{\frac{3}{2}}}, \qquad \Theta_a = \frac{2\varrho}{z^2(z^2-\varrho^2)}, \qquad \Theta_i = \frac{2z}{\varrho^2(\varrho^2-z^2)};$$

$$\text{für } \Theta = \int_0^\pi \frac{\sin\vartheta\cos^2\vartheta\, d\vartheta}{(z^2+\varrho^2-2\varrho z\cos\vartheta)^{\frac{3}{2}}}, \qquad \Theta_a = \frac{2}{3z^3}\frac{z^2+2\varrho^2}{z^2-\varrho^2}, \qquad \Theta_i = \frac{2}{3\varrho^3}\frac{\varrho^2+2z^2}{\varrho^2-z^2};$$

und bezeichnet man auch die entsprechenden Potentialwerthe mit W_a und W_i, so ergiebt das Einsetzen dieser Integralwerthe in den Ausdruck (27.) durch eine einfache Rechnung, wenn die Integrale der gebrochenen rationalen Functionen von ϱ sämmtlich auf $\int \frac{d\varrho}{z^2-\varrho^2}$ reducirt werden und die Gesammtmasse der Hohlkugel mit M bezeichnet wird,

$$W_a = M\Big(\frac{1}{z}+\frac{z'^2}{k^2 z}\Big) - \frac{4\pi}{3k^2}\frac{3z'^2-v^2}{z^3}\int_{R_0}^{R_1}\sigma\varrho^4 d\varrho$$

und

$$W_i = 4\pi\int_{R_0}^{R_1}\sigma\varrho\, d\varrho + \frac{4\pi}{3k^2}v^2\int_{R_0}^{R_1}\sigma\varrho\, d\varrho.$$

Hat somit der ausserhalb der Hohlkugel, welche in concentrischen Schichten von constanter Dichtigkeit ist, gelegene Punkt die Entfernung l vom Mittelpunkte der Kugel, besitzt derselbe die Geschwindigkeit v und ist l' die Projection von v auf die Richtung von l, so ist der Werth der Potentiale durch die Ausdrücke gegeben:

$$(28.) \qquad W_a = M\Big(\frac{1}{l}+\frac{l'^2}{k^2 l}\Big) - \frac{4\pi}{3k^2}\frac{3l'^2-v^2}{l^3}\int_{R_0}^{R_1}\sigma\varrho^4 d\varrho$$

und

$$(29.) \qquad W_i = 4\pi\int_{R_0}^{R_1}\sigma\varrho\, d\varrho + \frac{4\pi}{3k^2}v^2\int_{R_0}^{R_1}\sigma\varrho\, d\varrho;$$

*die **Potentiale hängen somit** — wie schon aus der Symmetrie ersichtlich — **nur von der Entfernung des angezogenen Punktes vom Mittelpunkte, von der Grösse der Geschwindigkeit desselben und von der Richtung der letzteren gegen die Verbindungslinie mit dem Mittelpunkte ab.***

Der erste Posten des Potentials W_a ist nichts anderes als der Werth des *Weber*schen Potentials der im Mittelpunkt vereinigten Masse des Kugelringes, und es ist dies auch der Gesammtwerth des Potentials, wenn $v^2 = 3l'^2$ oder wenn der Winkel, den die Geschwindigkeit mit der nach dem Mittelpunkt geführten Verbindungslinie macht, $54^0\,44'$ ist.

Ferner ist unmittelbar ersichtlich, ***dass das Potential für einen im inneren Hohlraum gelegenen Punkt unabhängig ist von der Lage des Punktes und der Richtung der Geschwindigkeit und somit die Form hat***

$$W_i = a + bv^2,$$

worin a und b Constanten sind.

Liegt der Punkt in dem concentrischen Kugelringe selbst, dann möge das Potential mit W_m bezeichnet werden, und der Werth desselben wird, wenn man die Entfernung des Punktes vom Mittelpunkte der Kugel wieder mit l bezeichnet und das Potential aus dem W_a der zu l und R_0 und dem W_i der zu R_1 und l gehörigen Kugelschalen zusammensetzt*), durch

$$(30.)\quad \left\{ \begin{aligned} W_m = {} & 4\pi\left(\frac{1}{l} + \frac{l'^2}{k^2 l}\right)\int_{R_0}^{l} \sigma\varrho^2 d\varrho - \frac{4\pi}{3k^2}\frac{3l'^2 - v^2}{l^3}\int_{R_0}^{l} \sigma\varrho^4 d\varrho \\ & + 4\pi\int_{l}^{R} \sigma\varrho\, d\varrho + \frac{4\pi}{3k^2}v^2\int_{l}^{R_1} \sigma\varrho\, d\varrho \end{aligned} \right.$$

gegeben sein.

Dass die Potentiale W_a und W_i in (28.) und (29.) der erweiterten *Laplace*schen Differentialgleichung Genüge leisten, ist unmittelbar ersichtlich, da

$$\frac{\partial W_a}{\partial x'} = \frac{2M}{k^2}\frac{l'x}{l^3} - \frac{4\pi}{3k^2}\frac{6l'x - 2x'l}{l^4}\int_{R_0}^{R_1} \sigma\varrho^4 d\varrho, \quad \frac{\partial^2 W_a}{\partial x'^2} = \frac{2M}{k^2}\frac{x^2}{l^3} - \frac{4\pi}{3k^2}\frac{6x^2 - 2l^2}{l^5}\int_{R_0}^{R_1} \sigma\varrho^4 d\varrho$$

also

$$\Delta_{11} W_a = \frac{2M}{k^2 l},$$

und

$$\frac{\partial W_i}{\partial x'} = \frac{8\pi}{3k^2}x'\int_{R_0}^{R_1} \sigma\varrho\, d\varrho, \qquad \frac{\partial^2 W_i}{\partial x'^2} = \frac{8\pi}{3k^2}\int_{R_0}^{R_1} \sigma\varrho\, d\varrho$$

---

*) Die zu diesem Schlusse nöthige Annahme der Endlichkeit und Stetigkeit des Potentials

$$\int dm\left(\frac{1}{r} + \frac{r'^2}{k^2 r}\right)$$

ür den ganzen unendlichen Raum und für endliche Werthe von r', also auch für den Fall, dass der Punkt in die Masse selbst eintritt, ergiebt sich wie beim *Newton*schen Potential durch Einführung von Polarcoordinaten unmittelbar.

also

$$\Delta_{11} W_i = \frac{8\pi}{k^2} \int_{R_1}^{R} \sigma \varrho d\varrho$$

und somit

$$\Delta_{(0)} \Delta_{11} W_a = \Delta_{(0)} \Delta_{11} W_i = 0$$

ist.

Untersuchen wir nun das Potential einer homogenen Vollkugel auf einen Punkt im Innern derselben, welches nach (30.) die Form annimmt

$$W_m = 2\pi\sigma\left(R^2 - \frac{l^2}{3}\right) + \frac{8\pi\sigma}{15k^2} l^2 l'^2 + \frac{2\pi\sigma}{3k^2} R^2 v^2 - \frac{2\pi\sigma}{5k^2} l^2 v^2,$$

worin R der Radius der Kugel, σ die constante Dichtigkeit und l die Entfernung des angezogenen Punktes vom Mittelpunkte bedeutet, so wird sich aus

$$\frac{\partial W_m}{\partial x'} = \frac{16\sigma\pi}{15k^2} l l' x + \frac{4\pi\sigma}{3k^2} R^2 x' - \frac{4\pi\sigma}{5k^2} l^2 x',$$

$$\frac{\partial^2 W_m}{\partial x'^2} = \frac{16\sigma\pi}{15k^2} x^2 + \frac{4\pi\sigma}{3k^2} R^2 - \frac{4\pi\sigma}{5k^2} l^2$$

zunächst

$$V = \Delta_{11} W_m = -\frac{4\sigma\pi}{3k^2} l^2 + \frac{4\pi\sigma}{k^2} R^2$$

ergeben, und da

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{8\sigma\pi}{3k^2} x, \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -\frac{8\sigma\pi}{3k^2} x$$

ist,

$$\Delta_{(0)} \Delta_{11} W_m = -\frac{8\pi}{k^2} \sigma$$

folgen*).

Benutzt man das eben gefundene Resultat, indem man in bekannter Weise, wenn der angezogene Punkt in der Masse selbst liegt, denselben mit einer unendlich kleinen, als homogen anzunehmenden Kugel umgeben ausscheidet, *so ergiebt sich als erweiterte Laplace-Poissonsche Differentialgleichung für das durch den Ausdruck*

$$W = \frac{m}{r}\left(1 + \frac{r'^2}{k^2}\right)$$

---

*) Zur Begründung der oben in Betreff der *Riemann*schen Erweiterung der *Laplace*schen Gleichung gemachten Bemerkung ist hervorzuheben, dass aus

$$W_m = 2\pi\sigma\left(R^2 - \frac{l^2}{3}\right) + \frac{8\pi\sigma}{15k^2} l^2 l'^2 + \frac{2\pi\sigma}{3k^2} R^2 v^2 - \frac{2\pi\sigma}{5k^2} l^2 v^2,$$

wie leicht zu sehen

$$\Delta_{00} W = -4\pi\sigma\left(1 + \frac{v^2}{3k^2}\right),$$

also

$$\Delta_{(0)} \Delta_{(0)} W = 0$$

folgen würde, also nicht eine Erweiterung der *Poisson*schen Gleichung.

definirte Webersche Potential die Gleichung

$$\Delta_{00}\Delta_{11} W = -\frac{8\pi}{k^2}\sigma,$$

worin σ die Dichtigkeit der anziehenden Masse an der Stelle bedeutet, an welcher sich der angezogene Punkt befindet.

Aus den oben entwickelten Potentialausdrücken wird man nun die Bewegung eines Punktes herleiten können, der von den Massenelementen eines in concentrischen Schichten homogenen Kugelringes nach dem *Weber*schen Gesetze angezogen wird und sich ausserhalb des Ringes oder innerhalb des Hohlraumes befindet.

Die früher von mir gegebene Erweiterung des Princips der Flächen*) habe ich später**) auch auf den Fall ausgedehnt, in welchem eine Trennung der actuellen und potentiellen Energie nicht vorausgesetzt ist, und, wenn ich, wie es für das Folgende nur nöthig ist, annehme, dass das System keinen Bedingungen unterworfen ist und äussere Kräfte nicht einwirken, den folgenden Satz gefunden:

Wenn ein kinetisches Potential

$$H = f(t, R_{a1}, R_{a2}, \cdots R'_{a1}, R'_{a2}, \cdots R^{(\nu-a)}_{a1}, R^{(\nu-a)}_{a2}, \cdots),$$

worin $R_{a1}, R_{a2}, \cdots$ beliebige stetige Functionen der nach t genommenen α-ten Ableitungen der Coordinaten $x_1, y_1, z_1, \cdots x_n, y_n, z_n$ sind, eine Function von t,

$$R_{01}, R_{02}, \cdots R_{11}, R_{12}, \cdots R_{\nu 1}, R_{\nu 2}, \cdots$$

und deren nach t genommenen Ableitungen darstellt, welche den Bedingungen unterliegen

$$\sum_1^n{}_i \left(y_i^{(\alpha)} \frac{\partial R_{a\varrho}}{\partial x_i^{(\alpha)}} - x_i^{(\alpha)} \frac{\partial R_{a\varrho}}{\partial y_i^{(\alpha)}} \right) = 0 \qquad (\text{für } \alpha = 0, 1, 2, \ldots, \nu),$$

so erhält man als Integral der Bewegungsgleichungen die Differentialgleichung $(2\nu-1)$-ter Ordnung:

$$\sum_{\varrho=1,2,\cdots} \sum_1^n{}_i \sum_1^\nu{}_\alpha (-1)^\alpha \sum_0^{\alpha-1}{}_\lambda (-1)^\lambda \left\{ y_i^{(\lambda)} \frac{d^{\alpha-\lambda-1}}{dt^{\alpha-\lambda-1}} \left(K_{a\varrho} \frac{\partial R_{a\varrho}}{\partial x_i^{(\alpha)}} \right) - x_i^{(\lambda)} \frac{d^{\alpha-\lambda-1}}{dt^{\alpha-\lambda-1}} \left(K_{a\varrho} \frac{\partial R_{a\varrho}}{\partial y_i^{(\alpha)}} \right) \right\} = c,$$

worin

$$K_{a\varrho} = \frac{\partial H}{\partial R_{a\varrho}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial R'_{a\varrho}} + \cdots + (-1)^{\nu-a} \frac{d^{\nu-a}}{dt^{\nu-a}} \frac{\partial H}{\partial R^{(\nu-a)}_{a\varrho}}$$

und c eine Integrationsconstante bedeutet.

Ist daher ein Punkt einem kinetischen Potentiale erster Ordnung von der Form unterworfen

$$H = f(t, R_1, R_2, \cdots R'_1, R'_2, \cdots R),$$

---

*) „Ueber die Principien der Mechanik“ Dieses Journal Bd. 118 Abschn. VIII.

**) „Ueber das erweiterte Princip der Erhaltung der Flächen“, Sitzungsberichte der Berl. Akad. vom 17. Februar 1898.

worin

$$R = x'^2+y'^2+z'^2 = v^2$$

und die Functionen $R_1, R_2, \cdots$ von x, y, z den Bedingungen unterliegen

$$y\frac{\partial R_\varrho}{\partial x}-x\frac{\partial R_\varrho}{\partial y}=0, \qquad z\frac{\partial R_\varrho}{\partial y}-y\frac{\partial R_\varrho}{\partial z}=0, \qquad x\frac{\partial R_\varrho}{\partial z}-z\frac{\partial R_\varrho}{\partial x}=0,$$

so gelten für die drei Coordinatenebenen die erweiterten Flächensätze:

$$(31.)\quad \frac{1}{v}\frac{\partial H}{\partial v}(yx'-xy')=C_1, \quad \frac{1}{v}\frac{\partial H}{\partial v}(zy'-yz')=C_2, \quad \frac{1}{v}\frac{\partial H}{\partial v}(xz'-zx')=C_3.$$

Sei nun das auf einen beweglichen Punkt ausgeübte kinetische Potential

$$H = f(r, r', v^2),$$

worin

$$r^2 = x^2+y^2+z^2, \qquad v^2 = x'^2+y'^2+z'^2,$$

so werden die Bedingungsgleichungen

$$y\frac{\partial r}{\partial x}-x\frac{\partial r}{\partial y}=0, \quad z\frac{\partial r}{\partial y}-y\frac{\partial r}{\partial z}=0, \quad x\frac{\partial r}{\partial z}-z\frac{\partial r}{\partial x}=0$$

identisch erfüllt sein, und somit die drei Flächensätze bestehen, zu denen, da H die Zeit nicht explicite enthalten sollte, noch das Princip von der Erhaltung der lebendigen Kraft*) hinzutritt, welches die Form hat

$$H-x'\frac{\partial H}{\partial x'}-y'\frac{\partial H}{\partial y'}-z'\frac{\partial H}{\partial z'}=h,$$

oder da

$$x'\frac{\partial H}{\partial x'}=\frac{\partial H}{\partial v}\frac{x'^2}{v}+\frac{\partial H}{\partial r'}\frac{xx'}{r}, \cdots$$

ist,

$$(32.)\qquad H-v\frac{\partial H}{\partial v}-r'\frac{\partial H}{\partial r'}=h.$$

Mit Einführung von Polarcoordinaten

$$x = r\sin\vartheta\cos\varphi, \qquad y = r\sin\vartheta\sin\varphi, \qquad z = r\cos\vartheta$$

liefern die Gleichungen (31.), wenn

$$\frac{1}{v}\frac{\partial H}{\partial v}=H_1(r, r', v), \qquad \frac{1}{r'}\frac{\partial H}{\partial r'}=H_2(r, r', v)$$

gesetzt wird, die Beziehungen

$$(33.)\quad \begin{cases} H_1(r,r',\sqrt{r'^2+r^2\vartheta'^2+r^2\sin^2\vartheta\varphi'^2})\,r^2\sin^2\vartheta\varphi' = C, \\ H_1(r,r',\sqrt{r'^2+r^2\vartheta'^2+r^2\sin^2\vartheta\varphi'^2})\,r^2(\sin\varphi\vartheta'+\sin\vartheta\cos\vartheta\cos\varphi\varphi') = C_2, \\ H_1(r,r',\sqrt{r'^2+r^2\vartheta'^2+r^2\sin^2\vartheta\varphi'^2})\,r^2(\cos\varphi\vartheta'+\sin\vartheta\cos\vartheta\sin\varphi\varphi') = C_3, \end{cases}$$

während die Gleichung (32.) in

$$(34.)\quad \begin{cases} H(r, r', \sqrt{r'^2+r^2\vartheta'^2+r^2\sin^2\vartheta\varphi'^2})-(r'^2+r^2\vartheta'^2+r^2\sin^2\vartheta\varphi'^2)\times \\ H_1(r,r',\sqrt{r'^2+r^2\vartheta'^2+r^2\sin^2\vartheta\varphi'^2})-r'^2H_2(r,r',\sqrt{r'^2+r^2\vartheta'^2+r^2\sin^2\vartheta\varphi'^2}) = h \end{cases}$$

übergeht.

*) Vergl. „Ueber die Principien der Mechanik“. Dieses Journal Bd. 118, Abschn. V.

Nun folgt aber aus den beiden ersten Gleichungen (33.), wenn $\frac{C_2}{C_1} = K$ gesetzt wird,

$$\sin\varphi \frac{d\vartheta}{d\varphi} + \sin\vartheta\cos\vartheta\cos\varphi = K\sin^2\vartheta$$

oder wenn K_1 eine Integrationsconstante bedeutet,

$$\text{(35.)} \qquad \operatorname{cotg}\vartheta = K_1\sin\varphi + K\cos\varphi,$$

so dass sich aus der ersten Gleichung (33.) und (35.) ergiebt:

$$\text{(36.)} \quad \sin^2\vartheta\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{C_1^2}{r^4 H_1^2(r, r', \sqrt{r'^2 + r^2\vartheta'^2 + r^2\sin^2\vartheta\varphi'^2})}\left[1 + (K_1\sin\varphi + K\cos\varphi)^2\right],$$

$$\text{(37.)} \quad \left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = \frac{C_1^2}{r^4 H_1^2(r, r', \sqrt{r'^2 + r^2\vartheta'^2 + r^2\sin^2\vartheta\varphi'^2})}\left[K\sin\varphi - K_1\cos\varphi\right]^2$$

und hieraus

$$\text{(38.)} \qquad \vartheta'^2 + \sin^2\vartheta\varphi'^2 = \frac{C_1^2(1 + K^2 + K_1^2)}{r^4 H_1^2(r, r', \sqrt{r'^2 + r^2(\vartheta'^2 + \sin^2\vartheta\varphi'^2)})}.$$

Da nun die letztere Gleichung $\vartheta'^2 + \sin^2\vartheta\varphi'^2$ als Function von r und r' liefert, so ergiebt sich aus der Gleichung der lebendigen Kraft (34.) eine Beziehung zwischen r und r' und daher vermöge (35.) und (37.) auch ϑ als eine Quadratur in t, und

es ist somit die Integration aller Bewegungsgleichungen, welchen ein kinetisches Potential erster Ordnung zu Grunde liegt, das nur von der Entfernung des beweglichen Punktes von einem festen Punkte, deren nach der Zeit genommenen Ableitung und der Geschwindigkeit desselben abhängt, stets auf einfache aus dem kinetischen Potential zusammengesetzte Quadraturen zurückführbar.

Wenden wir nunmehr diese Resultate auf das oben gestellte Problem von der Anziehung eines Kugelringes nach dem *Weber*schen Gesetze an, so wird, wenn zur Abkürzung

$$4\pi\int_{R_0}^{R_1}\sigma\varrho^4 d\varrho = N$$

gesetzt wird, nach (28.) das kinetische Potential $H = -T - W_a$ die Form annehmen

$$H = -\tfrac{1}{2}v^2 - M\left(\frac{1}{r} + \frac{r'^2}{k^2 r}\right) + \frac{N}{3k^2}\frac{3r'^2 - v^2}{r^3},$$

und daher

$$H_1 = \frac{1}{v}\frac{\partial H}{\partial v} = -1 - \frac{2N}{3k^2}\frac{1}{r^3},$$

$$H_2 = \frac{1}{r'}\frac{\partial H}{\partial r'} = -\frac{2M}{k^2}\frac{1}{r} + \frac{2N}{k^2}\frac{1}{r^3}$$

sein, so dass die Gleichung (34.) für die Erhaltung der lebendigen Kraft

$$(39.) \qquad \tfrac{1}{2}v^2 - M\left(\frac{1}{r} - \frac{r'^2}{k^2 r}\right) + \frac{N}{3k^2}\frac{v^2 - 3r'^2}{r^3} = h$$

lautet, während die Gleichung (38.), wenn mit r^2 multiplicirt und r'^2 auf beiden Seiten addirt wird, in

$$(40.) \qquad v^2 = \frac{C_1^2(1+K^2+K_1^2)r^4}{\left(r^3+\frac{2N}{3k^2}\right)^2} + r'^2$$

übergeht. Setzt man nun den Werth von v^2 aus (40.) in (39.) ein, so ergiebt sich

$$t+c = \int \frac{\sqrt{\left(r^3+\frac{2N}{3k^2}\right)\left(r^3+\frac{2M}{k^2}r^2-\frac{4N}{3k^2}\right)}}{r\sqrt{2\left(r^3+\frac{2N}{3k^2}\right)(M+hr)-C_1^2(1+K^2+K_1^2)r^2}}\,dr$$

und aus (37.)

$$\int \frac{\sin\vartheta\, d\vartheta}{\sqrt{(1+K^2+K_1^2)\sin^2\vartheta-1}} = -\int \frac{C_1\sqrt{r^3+\frac{2M}{k^2}r^2-\frac{4N}{3k^2}}}{\sqrt{\left(r^3+\frac{2N}{3k^2}\right)\left(2\left(r^3+\frac{2N}{3k^2}\right)(M+hr)-C_1^2(1+K^2+K_1^2)r^2\right)}}\,dr,$$

wodurch alle Bestimmungsstücke auf Quadraturen zurückgeführt sind.

Was endlich die Bewegung eines im Hohlraum befindlichen Punktes betrifft, so ist das Potential des Kugelringes auf einen Punkt im Innern, wenn

$$4\pi\int_{R_0}^{R_1}\sigma\varrho\, d\varrho = A$$

gesetzt wird,

$$W_i = A\left(1+\frac{v^2}{3k^2}\right),$$

und es gehen somit die Bewegungsgleichungen

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial W_i}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial W_i}{\partial x'}$$

und die beiden analogen in

$$x'' = \frac{2A}{3k^2}x'', \qquad y'' = \frac{2A}{3k^2}y'', \qquad z'' = \frac{2A}{3k^2}z''$$

über, woraus $x''=0$, $y''=0$, $z''=0$ folgt; wir finden somit, dass sich ein Punkt innerhalb des Hohlraumes eines Kugelringes, dessen Massenelemente denselben nach dem *Weber*schen Gesetze anziehen, in gerader Linie mit constanter Geschwindigkeit bewegt.

Ueber projective Substitutionen, die einen Kreis ungeändert lassen.

(Von Herrn *Ludwig Schlesinger* in Klausenburg.)

In seiner Arbeit „Sur les groupes fuchsiens“ (Acta Mathematica Bd. I, S. 1) hat Herr *Poincaré* auf den Zusammenhang hingewiesen, der zwischen den projectiven Substitutionen

$$\frac{\alpha\eta+\beta}{\gamma\eta+\delta}, \qquad \alpha\delta-\beta\gamma = 1,$$

die einen realen Kreis in sich selbst transformiren, und der nicht-euklidischen Geometrie besteht*). Es sei gestattet, diesen Zusammenhang hier von einem neuen und etwas allgemeineren Gesichtspunkte aus zu betrachten, indem direct eine Beziehung zwischen projectiven Substitutionen, die einen Kreis ungeändert lassen, und der Geometrie auf einer Fläche von constantem Krümmungsmaasse hergestellt wird.

I.

Wir betrachten in der Ebene der complexen Variabeln η einen Kreis O mit realem, imaginärem oder verschwindendem Radius, dessen Gleichung wir in der Form

$$(1.) \qquad (\eta-\eta_0)(\bar{\eta}-\bar{\eta}_0)-c = 0$$

schreiben wollen, wo, wie auch stets im Folgenden, die zu einer complexen Grösse a conjugirte complexe Grösse durch $\bar{a}$ bezeichnet wird, und wo c eine reale Grösse bedeutet, die $\gtreqless 0$ sein kann.

Die Gesammtheit aller Substitutionen

$$\eta' = A\eta = \frac{\alpha\eta+\beta}{\gamma\eta+\delta}, \qquad \alpha\delta-\beta\gamma = 1,$$

die den Kreis O in sich selbst transformiren, bildet offenbar eine Gruppe, und zwar eine algebraische Untergruppe der projectiven Gruppe, die von *zwei* Parametern abhängt, da die Bedingung, dass der Kreis O bei einer

*) Vergl. *Klein,* Mathem. Annalen, Bd. 14, S. 111 ff.

Substitution A ungeändert bleiben soll, *eine* algebraische Beziehung zwischen den Coefficientenverhältnissen der Substitution A festsetzt. Um diese Beziehung aufzustellen, setzen wir in die Gleichung von O an Stelle von η die Grösse η' ein; wir erhalten dann nach Multiplication mit

$$(\gamma\eta+\delta)(\overline{\gamma}\overline{\eta}+\overline{\delta}) = |\gamma\eta+\delta|^2$$

die Gleichung

$$|\alpha\eta+\beta-\eta_0(\gamma\eta+\delta)|^2-c|\gamma\eta+\delta|^2 = 0,$$

die mit der Gleichung (1.) übereinstimmen muss.

Setzen wir

$$\zeta=\eta-\eta_0, \quad \alpha_1=\alpha-\eta_0\gamma, \quad \beta_1=\beta+\eta_0(\alpha-\delta)-\eta_0^2\gamma, \quad \gamma_1=\gamma, \quad \delta_1=\delta+\eta_0\gamma,$$

so ist

$$\alpha_1\delta_1-\beta_1\gamma_1 = 1,$$

und es muss

$$\varrho(\zeta\overline{\zeta}-c) = (\alpha_1\zeta+\beta_1)(\overline{\alpha}_1\overline{\zeta}+\overline{\beta}_1)-c(\gamma_1\zeta+\delta_1)(\overline{\gamma}_1\overline{\zeta}+\overline{\delta}_1)$$

sein, wo ϱ einen von ζ unabhängigen Factor bedeutet. Wir erhalten also die Gleichungen

$$\begin{aligned}
\varrho &= \alpha_1\overline{\alpha}_1-c\gamma_1\overline{\gamma}_1,\\
0 &= \alpha_1\overline{\beta}_1-c\gamma_1\overline{\delta}_1,\\
0 &= \overline{\alpha}_1\beta_1-c\overline{\gamma}_1\delta_1,\\
-c\varrho &= \beta_1\overline{\beta}_1-c\delta_1\overline{\delta}_1,
\end{aligned}$$

woraus sich, *wenn c von Null verschieden* ist, entweder

$$\alpha_1=-\overline{\delta}_1, \qquad \beta_1=-c\overline{\gamma}_1, \qquad \varrho=-1$$

oder

$$\alpha_1=\overline{\delta}_1, \qquad \beta_1=c\overline{\gamma}_1, \qquad \varrho=1$$

ergiebt, so dass also im ersten Falle

(I.) $$|\eta-\eta_0|^2-c = -|\gamma\eta+\delta|^2\{|\eta'-\eta_0|^2-c\},$$

im zweiten Falle

(II.) $$|\eta-\eta_0|^2-c = |\gamma\eta+\delta|^2\{|\eta'-\eta_0|^2-c\}$$

sein muss. Wir bezeichnen*) die Substitution $A\eta$, jenachdem für dieselbe die Gleichung (I.) oder (II.) erfüllt wird, als *negative* beziehungsweise *positive*.

Für negative Werthe von c involvirt die Gleichung (I.) einen Widerspruch; ***im Falle eines imaginären Kreises O sind also alle projectiven Substitutionen, die diesen Kreis ungeändert lassen, positive.***

*) Vgl. *Ritter*, Mathem. Annalen Bd. XLI., S. 25.

Für positive Werthe von c, d. h. im Falle eines realen Kreises O mit nicht verschwindendem Radius haben die positiven Substitutionen offenbar die Eigenschaft, dass sie Punkte, die innerhalb von O liegen, wieder in Punkte innerhalb, und Punkte, die ausserhalb von O liegen, in Punkte ausserhalb verwandeln, während durch eine negative Substitution Punkte im Innern von O in Punkte ausserhalb und umgekehrt übergeführt werden.

Für $c = 0$ wollen wir uns den Punkt η_0 ins Unendliche verlegt denken; dann haben die Substitutionen A, die diesen Punkt ungeändert lassen, die Form

$$\eta' = A\eta = \alpha\eta + \beta.$$

Wenn $|\alpha| = 1$ ist, so haben wir $|d\eta'| = |d\eta|$; die Substitution A ist in diesem Falle eine *Verschiebung,* indem jede Figur der η-Ebene durch A in eine ihr *congruente* Figur verwandelt wird. Wenn $|\alpha| \neq 1$ ist, so verwandelt die Substitution A jede Figur der η-Ebene in eine ihr *ähnliche.*

In den Fällen, wo $c \neq 0$ ist, zeigen die Substitutionen A ein den Verschiebungen analoges Verhalten. Wir beschränken uns im Falle $c > 0$ auf die Betrachtung positiver Substitutionen A, *handeln also für* $c \neq 0$ *nur von Substitutionen* A, *die die Gleichung* (II.) *befriedigen.* Für einen gegebenen Kreis O bildet die Gesammtheit dieser Substitutionen offenbar eine Gruppe.

Aus

$$\frac{d\eta'}{d\eta} = \frac{1}{(\gamma\eta+\delta)^2}$$

ergiebt sich

$$\text{(III.)} \qquad \left|\frac{d\eta'}{d\eta}\right| = \frac{1}{|\gamma\eta+\delta|^2},$$

wir erhalten also mit Rücksicht auf (II.)

$$\frac{|d\eta'|}{|\eta'-\eta_0|^2 - c} = \frac{|d\eta|}{|\eta-\eta_0|^2 - c}$$

d. h. der Differentialausdruck

$$\text{(IV.)} \qquad \frac{|d\eta|}{|\eta-\eta_0|^2 - c}$$

ist eine bei allen Substitutionen A, die die Gleichung (II.) befriedigen, unveränderliche Grösse, also eine Invariante, der von diesen Substitutionen gebildeten Gruppe.

Wenn $c = 0$ ist, so ist der Differentialausdruck (IV.) nur für diejenigen Substitutionen, die den Punkt η_0 ungeändert lassen invariant, die den Ver-

schiebungen im Falle $\eta_0 = \infty$ entsprechen. Diese sind aber offenbar nichts anderes wie die parabolischen und elliptischen Substitutionen mit dem Doppelpunkte η_0, und für diese ist in der That die Gleichung (II.) erfüllt.

Der Differentialausdruck (IV.) spielt also allgemein bei von Null verschiedenem c für alle positiven Substitutionen A, bei verschwindendem c für die parabolischen und elliptischen unter diesen Substitutionen eine ähnliche Rolle wie der Ausdruck $|d\eta|$ für die Verschiebungen der η-Ebene. Da nun $|d\eta|$ das Linienelement einer Curve der η-Ebene darstellt, so wollen wir jetzt allgemein ***den Differentialausdruck*** (IV.) ***als das Linienelement eine Curve auf einer noch zu bestimmenden Fläche auffassen*** und auf diesen Ausdruck die von ***Gauss*** in den „Disquisitiones circa superficies curvas" begründeten Methoden anwenden.

II.

Wir spalten die complexen Grössen η und η_0 in ihre realen und imaginären Theile

$$\eta = p + qi, \qquad \eta_0 = m + ni,$$

wodurch die Gleichung des Kreises O die Form annimmt:

$$(1^a.) \qquad (p-m)^2 + (q-n)^2 - c = 0.$$

Es soll dann

$$ds^2 = \frac{4|d\eta|^2}{\{|\eta-\eta_0|^2 - c\}^2} = \frac{4(dp^2+dq^2)}{[(p-m)^2+(q-n)^2-c]^2}$$

als das Quadrat des Linienelementes auf einer Fläche gelten, auf der wir uns p, q als krummlinige Coordinaten denken. Die ***Gauss***schen Fundamentalgrössen E, F, G, lauten dann für unsere Fläche

$$E = G = \frac{4}{[(p-m)^2+(q-n)^2-c]^2}, \qquad F = 0,$$

das ***Gauss***sche Krümmungsmaass, welches nach Art. 19 der „Disquisitiones" für $E = G$, $F = 0$ durch die Formel

$$K = \frac{1}{4E^4}\left\{2E\left[\left(\frac{\partial E}{\partial p}\right)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial q}\right)^2\right] - 2E^2\left(\frac{\partial^2 E}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial q^2}\right)\right\}$$

gegeben wird, besitzt also den Werth

$$K = -c,$$

d. h. ***unsere Fläche hat die constante Krümmung*** $-c$ und ist demnach, wenn c negativ ist, auf eine Kugel vom Radius $\left|\frac{1}{\sqrt{-c}}\right|$, wenn c verschwindet auf

eine Ebene abwickelbar*). Ferner ist die Fläche, wenn wir p, q als rechtwinklige Coordinaten der η-Ebene deuten, *conform* auf die η-Ebene abgebildet, da ja das Linienelement ds dem Linienelemente $|d\eta|$ der Ebene proportional ist.

Für eine rectificirbare Curve C auf der Fläche ist die Bogenlänge zwischen zweien ihrer Punkte (p_1, q_1), (p_2, q_2) durch das längs C genommene Integral

$$2\int_{(p_1, q_1)}^{(p_2, q_2)} \sqrt{\frac{dp^2+dq^2}{[(p-m)^2+(q-n)^2-c]^2}}$$

dargestellt. Für ein nicht negatives c hat diese Länge stets einen endlichen Werth, wenn kein Punkt der Curve die Gleichung (1a.) befriedigt. Für negatives c kann diese Gleichung für kein reales Werthsystem (p, q) befriedigt werden, d. h. die Curvenlänge besitzt stets einen endlichen Werth.

Bestimmen wir nunmehr die *geodaetischen Linien* auf unserer Fläche. Aus den Formeln des art. 18 der „Disquisitiones“ ergiebt sich die Differentialgleichung der geodaetischen Linien in der Form

$$\left(E+\frac{dq}{dp}F\right)\left\{\frac{\partial F}{\partial p}-\tfrac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial q}+\frac{\partial G}{\partial p}\frac{dq}{dp}+\tfrac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial q}\left(\frac{dq}{dp}\right)^2+G\frac{d^2q}{dp^2}\right\}$$
$$-\left(F+\frac{dq}{dp}G\right)\left\{\tfrac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial p}+\frac{\partial E}{\partial q}\frac{dq}{dp}+\left(\frac{\partial F}{\partial q}-\tfrac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial p}\right)\left(\frac{dq}{dp}\right)^2+F\frac{d^2q}{dp^2}\right\} = 0;$$

also lautet dieselbe für unsere Fläche

$$\{(p-m)^2+(q-n)^2-c\}\frac{d^2q}{dp^2}-2(p-m)\left(\frac{dq}{dp}\right)^3+2(q-n)\left(\frac{dq}{dp}\right)^2$$
$$-2(p-m)\frac{dq}{dp}+2(q-n) = 0.$$

Das allgemeine Integral dieser Differentialgleichung ergiebt sich leicht in der Form

$$\text{(2.)}\qquad \mathfrak{a}[(p-m)^2+(q-n)^2+c]+2\mathfrak{b}(p-m)+2\mathfrak{c}(q-n) = 0,$$

wo die $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ Integrationsconstanten bedeuten. Wenn wir diese real wählen, so ist die entsprechende geodaetische Linie für nicht positive Werthe von c stets real, da für $c \leqq 0$ stets

$$-c+\frac{\mathfrak{b}^2}{\mathfrak{a}^2}+\frac{\mathfrak{c}^2}{\mathfrak{a}^2} > 0$$

*) Vergl. *Darboux*, Théorie des surfaces, T. III (1894), pag. 416ff.

ist. Dagegen sind für ein positives c nur diejenigen geodaetischen Linien real, für welche

$$\mathfrak{b}^2+\mathfrak{c}^2-\mathfrak{a}^2 c>0$$

ist. Die Gleichung (2.) stellt in der η-Ebene einen Kreis dar, und da offenbar

$$\begin{aligned}(p-m)^2+(q-n)^2+c &= 0,\\ p-m &= 0,\\ q-n &= 0\end{aligned}$$

Kreise beziehungsweise gerade Linien sind, die den Kreis O unter rechtem Winkel schneiden, *so liefert*) die Gleichung* (2.) *alle Kreise, die von dem Kreise O senkrecht geschnitten werden.*

Nehmen wir den Punkt (m, n) als Anfangspunkt eines geodaetischen Polarcoordinatensystems auf der Fläche, so ist für die durch diesen Punkt hindurchgehenden geodaetischen Linien $\mathfrak{a}=0$, d. h. ihre Gleichung lautet

$$\mathfrak{b}(p-m)+\mathfrak{c}(q-n) = 0, \tag{3.}$$

und da die Abbildung der Fläche auf die η-Ebene eine winkeltreue ist, so ist der Neigungswinkel φ der Curve (3.) zu der Curve $q=n$ durch die Formel

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{-\mathfrak{b}}{\mathfrak{c}}\right)$$

gegeben. Für die von (m, n) aus auf einer der Curven (3.) gemessene constante geodaetische Länge r ist

$$r = \int_{(m,n)}^{(p,q)} \sqrt{\frac{dp^2+dq^2}{[(p-m)^2+(q-n)^2-c]^2}},$$

oder wenn wir

$$p-m=\varrho\cos\varphi, \qquad q-n=\varrho\sin\varphi$$

setzen und beachten, dass φ längs einer Curve (3.) constant ist:

$$r = \pm\int_0^{\varrho}\frac{d\varrho}{\varrho^2-c}.$$

Für ein negatives c setzen wir $k=\sqrt{-c}>0$, dann ist

$$r = 2\int_0^{\varrho}\frac{d\varrho}{\varrho^2+k^2} = \frac{2}{k}\operatorname{arctg}\frac{\varrho}{k}$$

---

*) Vergl. *Hesse*, Vorlesungen aus der analyt. Geometrie der geraden Linie etc. III. Aufl. (1881), S. 214ff.

d. h. es ist für jeden Punkt (p, q) der η-Ebene der entsprechende Werth von r real und endlich.

Für ein positives c nehmen wir $k = \sqrt{c} > 0$ und z. B.

$$r = 2\int_0^{\varrho} \frac{d\varrho}{k^2 - \varrho^2} = \frac{1}{k} \log \frac{k+\varrho}{k-\varrho};$$

dann ist r nur für diejenigen Punkte real, die der Ungleichung $\varrho < k$ oder

$$(p-m)^2 + (q-n)^2 < c$$

Genüge leisten; das heisst:

nur den Punkten der η-Ebene, die innerhalb des Kreises O liegen, entsprechen reale Flächenpunkte; für die Punkte der Peripherie von O ist r unendlich gross.

Der Uebergang zu den sogenannten *Beltrami*schen Coordinaten*) wird vermittelt durch die Formeln:

$$\lambda = \frac{2(p-m)}{(p-m)^2 + (q-n)^2 + c}, \qquad \mu = \frac{2(q-n)}{(p-m)^2 + (q-n)^2 + c};$$

die Gleichung der geodaetischen Linien verwandelt sich in

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b}\lambda + \mathfrak{c}\mu = 0,$$

in der Ebene, wo λ, μ rechtwinkelige Coordinaten bedeuten, entsprechen also den geodaetischen Curven gerade Linien. Für $(p-m)^2 + (q-n)^2 - c = 0$ ist

$$\lambda^2 + \mu^2 = \frac{1}{c}.$$

Eine projective Substitution $A\eta$, die die Gleichung (II.) befriedigt, entspricht auf der Fläche dem Uebergange von einem Punkte (p, q) zu dem Punkte (p', q'), wo

$$p' + q'i = \eta' = A\eta$$

ist. Da $A\eta$ das Linienelement ds der Fläche ungeändert lässt, so durchläuft der Punkt (p', q'), wenn (p, q) eine Curve auf der Fläche beschreibt, eine Curve von derselben Länge. Daraus folgt also, dass der projectiven Substitution $A\eta$, die die Gleichung (II.) befriedigt, eine Transformation unserer Fläche in sich selbst entspricht, bei der jede Figur in eine ihr congruente Figur verwandelt wird. Dass entsprechende Flächenstücke gleichen Inhalt haben, lässt sich leicht auch direct verificiren, indem das

*) Giornale di Matem. Bd. VII (1866); Annales de l'École Normale, Bd. VI (1869), S. 256 und 357.

Flächenelement, welches nach art. 17 der *Gauss*schen „Disquisitiones“ durch die Formel

$$dp\,dq\sqrt{EG-F^2},$$

also in unserem Falle durch

$$\frac{4\,dp\,dq}{\{(p-m)^2+(q-n)^2-c\}^2}$$

gegeben wird, mit

$$\frac{4dp'dq'}{\{(p'-m)^2+(q'-n)^2-c\}^2}=\left(\frac{\partial p'}{\partial p}\frac{\partial q'}{\partial q}-\frac{\partial p'}{\partial q}\frac{\partial q'}{\partial p}\right)\frac{|\gamma\eta+\delta|^2dp\,dq}{\{(p-m)^2+(q-n)^2-c\}^2}$$

übereinstimmt, wie man mit Rücksicht auf die Gleichungen

$$\frac{\partial p'}{\partial p}=\frac{\partial q'}{\partial q},\qquad \frac{\partial p'}{\partial q}=-\frac{\partial q'}{\partial p},$$

$$\frac{d\eta'}{d\eta}=\frac{\partial p'}{\partial p}+i\frac{\partial q'}{\partial p}$$

sofort erkennt.

Wir sehen also, dass die Fläche vom constanten Krümmungsmaasse $-c$ im allgemeinen Falle für die Substitutionen A, die der Gleichung (II.) genügen, dasselbe Verhalten zeigt, wie die gewöhnliche η-Ebene im Falle

$$c=0,\qquad \eta_0=\infty$$

für die Verschiebungen. Nun gilt aber nach den von Herrn *Beltrami* aufgestellten Sätzen auf der Fläche vom constanten Krümmungsmaasse $-c$ die Geometrie von *Lobatscheffskij* und *J. Bolyai*, die gewöhnliche *Euklid*ische Geometrie oder die sogenannte *Riemann*sche Geometrie, je nachdem c positiv, gleich Null, oder negativ ist; wir können also in Uebertragung der Verhältnisse, die für die Fläche gelten, auf die η-Ebene den folgenden Satz aussprechen, der den Satz von Herrn *Poincaré**) als besonderen Fall in sich begreift.

Betrachtet man in der η-Ebene einen Kreis O, und kommt überein, die Punkte von O als die „unendlich fernen Punkte“, die Kreise, die O unter rechtem Winkel schneiden, als „gerade Linien“, den Ausdruck

$$2\int_{\eta_1}^{\eta_2}\frac{|d\eta|}{|\eta-\eta_0|^2-c}$$

als die „Länge“ einer zwischen η_1, η_2 erstreckten Curve, den Ausdruck

$$4\iint\frac{dp\,dq}{\{|\eta-\eta_0|^2-c\}^2},$$

---

*) Acta Mathematica Bd. I, S. 8, vergl. S. 201 ff.

wo das Integral über eine geschlossene Figur erstreckt ist, als den „Inhalt“ dieser Figur aufzufassen und dem Worte Winkel seine gewöhnliche Bedeutung zu belassen, so gelten je nachdem

$$c > 0, \quad c = 0, \quad c < 0$$

ist, die Sätze der Geometrie von ***Lobatscheffskij-Bolyai, Euklid, Riemann,*** und Figuren, die durch Anwendung einer projectiven Substitution, die der Gleichung (II.) genügt, aus einander hervorgehen, sind im Sinne der betreffenden Geometrie einander congruent.

Ueber vertauschbare lineare Substitutionen.

(Von Herrn *Ludwig Schlesinger* in Klausenburg.)

I.

Seien

$$A = (a_{ik}), \qquad B = (b_{ik}) \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

zwei lineare homogene Substitutionen, die hinter einander auf die n Grössen $y_1, y_2, \ldots y_n$ angewandt, ein von der Reihenfolge unabhängiges Ergebniss liefern,

$$AB[y_k] = BA[y_k],$$

dann ist bekanntlich

$$(1.) \qquad \sum_{i=1}^{n} a_{ki} b_{ih} = \sum_{i=1}^{n} b_{ki} a_{ih} \qquad (k, h = 1, 2, \ldots, n),$$

und man sagt von den Substitutionen A, B, sie seien mit einander *vertauschbar**). Wenn A mit B vertauschbar ist, so ist auch jede positive oder negative Potenz von A mit jeder positiven oder negativen Potenz von B vertauschbar**); setzen wir also

$$(2.) \qquad A^{\lambda} = (a_{ik}^{(\lambda)}), \qquad B^{\mu} = (b_{ik}^{(\mu)}) \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n),$$

so folgen aus den Gleichungen (1.) für jedes Paar positiver oder negativer ganzer Zahlen λ, μ die Gleichungen

$$(3.) \qquad \sum_{i=1}^{n} a_{ki}^{(\lambda)} b_{ih}^{(\mu)} = \sum_{i=1}^{n} b_{ki}^{(\lambda)} a_{ih}^{(\mu)} \qquad (k, h = 1, 2, \ldots, n).$$

Betrachten wir einen Factor

$$(4.) \qquad L(\omega) = l_{\lambda}\omega^{\lambda} + l_{\lambda-1}\omega^{\lambda-1} + \cdots + l_0$$

der zu der Substitution A gehörigen Fundamentalgleichung

$$(5.) \qquad F(\omega) = |a_{hk} - \delta_{hk}\omega| = 0 \qquad (h, k = 1, 2, \ldots, n),$$

$$\delta_{hk} = 0, \qquad h \neq k; \qquad \delta_{kk} = 1,$$

---

*) *Frobenius,* dieses Journal, Bd. 84, S. 3.

**) *Frobenius,* a. a. O.

dann liefern*) die Lösungen des Gleichungssystems

$$(6.)\qquad \sum_{h=1}^{n}(l_\lambda a_{hk}^{(\lambda)}+l_{\lambda-1}a_{hk}^{(\lambda-1)}+\cdots+l_0\delta_{hk})\xi_h=0 \qquad (k=1,2,\ldots,n)$$

die Coefficienten derjenigen linearen Combination der $[y_k]$

$$u = \xi_1 y_1+\xi_2 y_2+\cdots+\xi_n y_n,$$

die der Relation

$$(7.)\qquad l_\lambda A^\lambda u+l_{\lambda-1}A^{\lambda-1}u+\cdots+l_0 u=0$$

Genüge leistet, wo $A^k u$ dasjenige bedeutet, was aus u wird, wenn auf die $[y_k]$ die Substitution A^k angewandt wird. Sei das Gleichungssystem (6.) vom Range $n-\tau$ und

$$\xi_1^{(\nu)},\quad \xi_2^{(\nu)},\quad \ldots,\quad \xi_n^{(\nu)} \qquad (\nu=1,2,\ldots,\tau)$$

ein System linear unabhängiger Lösungen desselben.

Wir bilden die Ausdrücke

$$(8.)\qquad \sum_{h=1}^{n} b_{hk}^{(\beta)}\xi_h^{(\nu)} \qquad (\beta=1,2,3,\ldots),$$

dann ist zufolge der Gleichungen (3.):

$$\begin{aligned}&\sum_k(l_\lambda a_{ki}^{(\lambda)}+\cdots+l_0\delta_{ki})\sum_{h=1}^{n}b_{hk}^{(\beta)}\xi_h^{(\nu)}\\ &=\sum_k\sum_h(l_\lambda a_{hk}^{(\lambda)}b_{ki}^{(\beta)}+\cdots+l_0\delta_{hk}b_{ki}^{(\beta)})\xi_h^{(\nu)}\\ &=\sum_k b_{ki}^{(\beta)}\sum_h(l_\lambda a_{hk}^{(\lambda)}+\cdots+l_0\delta_{hk})\xi_h^{(\nu)}=0,\end{aligned}$$

d. h. die Ausdrücke (8.) sind für jeden ganzzahligen Werth von β ebenfalls Lösungen des Gleichungssystems (6.). Wir können folglich ein System von τ^2 Constanten $c_{\nu\mu}$ so bestimmen, dass, insbesondere,

$$\sum_{h=1}^{n} b_{hk}\xi_h^{(\nu)}=\sum_{\mu=1}^{\tau}c_{\nu\mu}\xi_k^{(\mu)} \qquad \begin{matrix}(\nu=1,2,\ldots,\tau)\\ (k=1,2,\ldots,n)\end{matrix}$$

ist. Aus diesen Gleichungen ergiebt sich aber sofort

$$(9.)\qquad \sum_{h=1}^{n} b_{hk}^{(\beta)}\xi_h^{(\nu)}=\sum_{\mu=1}^{\tau}c_{\nu\mu}^{(\beta)}\xi_k^{(\mu)} \qquad \begin{pmatrix}\nu=1,2,\ldots,\tau,\\ k=1,2,\ldots,n,\\ \beta=1,2,3,\ldots\end{pmatrix},$$

wo $c_{\nu\mu}^{(\beta)}$ die Elemente der Substitution

$$(c_{\nu\mu})^\beta \qquad (\nu,\mu=1,2,\ldots,\tau)$$

bedeuten.

Betrachten wir nun die zu der Substitution $(c_{\nu\mu})$ gehörige Fundamentalgleichung

$$|c_{\mu\nu}-\delta_{\mu\nu}\omega|=0 \qquad (\nu,\mu=1,2,\ldots,\tau)$$

---

*) Vergl. dieses Journal Bd. 114, S. 150.

und denken uns dieselbe nach Potenzen von ω entwickelt

$$(10.) \qquad (-1)^\tau \omega^\tau + \gamma_{\tau-1}\omega^{\tau-1} + \cdots + \gamma_0 = 0,$$

so ist*)

$$(-1)^\tau c_{\nu\mu}^{(\tau)} + \gamma_{\tau-1} c_{\nu\mu}^{(\tau-1)} + \cdots + \gamma_0 \delta_{\nu\mu} = 0 \qquad (\nu,\mu = 1,2,\ldots,\tau),$$

und wir haben demnach zufolge der Gleichungen (9.)

$$(11.) \qquad \sum_{h=1}^{n} \xi_h^{(\nu)} \{(-1)^\tau b_{hk}^{(\tau)} + \gamma_{\tau-1} b_{hk}^{(\tau-1)} + \cdots + \gamma_0 \delta_{hk}\} = 0. \qquad (\nu = 1,2,\ldots,\tau;\quad k = 1,2,\ldots,n)$$

Nach einem Satze, den ich in meiner Arbeit**) bewiesen habe, folgt hieraus, dass die Gleichung (10.) mit der zu der Substitution B gehörigen Fundamentalgleichung

$$(12.) \qquad |b_{hk} - \delta_{hk}\omega| = 0 \qquad (h,k = 1,2,\ldots,n)$$

gewisse Wurzeln gemein haben müsse, und wenn

$$(13.) \qquad c_\varrho \omega^\varrho + c_{\varrho-1}\omega^{\varrho-1} + \cdots + c_0 \qquad (0 < \varrho \leqq \tau)$$

den grössten gemeinsamen Theiler der linken Seiten der Gleichungen (10.), (12.) bedeutet, so ist nach einem anderen Satze der gedachten Arbeit†) das Gleichungssystem

$$(14.) \qquad \sum_{h=1}^{n} \xi_h (c_\varrho b_{hk}^{(\varrho)} + c_{\varrho-1} b_{hk}^{(\varrho-1)} + \cdots + c_0 \delta_{hk}) = 0 \qquad (k = 1,2,\ldots,n)$$

mit dem Gleichungssysteme

$$\sum_{h=1}^{n} \xi_h ((-1)^\tau b_{hk}^{(\tau)} + \gamma_{\tau-1} b_{hk}^{(\tau-1)} + \cdots + \gamma_0 \delta_{hk}) = 0 \qquad (k = 1,2,\ldots,n)$$

aequivalent. Das letztere Gleichungssystem ist aber, da es nach (11.) die Lösungssysteme

$$(15.) \qquad \xi_1^{(\nu)},\quad \xi_2^{(\nu)},\ \ldots,\ \xi_n^{(\nu)} \qquad (\nu = 1,2,\ldots,\tau)$$

besitzt, höchstens vom Range $n-\tau$, folglich ist auch das Gleichungssystem (14.) höchstens vom Range $n-\tau$ und wird ebenfalls durch die Systeme (15.) befriedigt. Wir haben also den allgemeinen Satz:

Bedeuten

$$\sum_{k=1}^{n} \xi_k^{(\nu)} y_k \qquad (\nu = 1,2,\ldots,\tau)$$

---

*) Dieses Journal Bd. 114, S. 146.

**) Ebenda S. 148.

†) Ebenda S. 147, 149.

diejenigen linearunabhängigen linearen Combinationen der $[y_k]$, ***die der Relation*** (7.) ***Genüge leisten, so befriedigen diese Ausdrücke auch die Relation***

$$c_\varrho B^\varrho u + c_{\varrho-1} B^{\varrho-1} u + \cdots + c_0 u = 0 \qquad (0 < \varrho \leqq \tau), \tag{16.}$$

falls die Substitution B ***mit*** A ***vertauschbar ist.***

II.

Sei nun insbesondere ω'_a eine Wurzel der zu B gehörigen Fundamentalgleichung (12.) Nr. I, für welche der Theiler (13.) Nr. I der linken Seite dieser Gleichung verschwindet, dann ist also ω'_a auch eine Lösung der Gleichung (10.) Nr. I. Die Gleichungen

$$\sum_{\nu=1}^{\tau} (c_{\nu\mu} - \delta_{\nu\mu}\omega'_a)\eta_\nu = 0 \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, \tau)$$

sind demnach auflösbar; sei $\eta_1, \ldots, \eta_\tau$ ein Lösungssystem derselben. Da nach (9.) Nr. I

$$\sum_{\nu=1}^{\tau} \eta_\nu \sum_{h=1}^{n} b_{hk} \xi_h^{(\nu)} = \sum_{\nu=1}^{\tau} \eta_\nu \sum_{\mu=1}^{\tau} c_{\nu\mu} \xi_k^{(\mu)}$$

und offenbar auch

$$\sum_{\nu=1}^{\tau} \eta_\nu \sum_{h=1}^{n} \delta_{hk} \xi_h^{(\nu)} = \sum_{\nu=1}^{\tau} \eta_\nu \sum_{\mu=1}^{\tau} \delta_{\nu\mu} \xi_k^{(\mu)}$$

ist, so ergiebt sich

$$\sum_{h=1}^{n} (b_{hk} - \delta_{hk}\omega'_a) \sum_{\nu=1}^{\tau} \eta_\nu \xi_h^{(\nu)} = \sum_{\mu=1}^{\tau} \xi_k^{(\mu)} \sum_{\nu=1}^{\tau} (c_{\nu\mu} - \delta_{\nu\mu}\omega'_a)\eta_\nu = 0,$$

d. h. die Ausdrücke

$$\sum_{\nu=1}^{\tau} \eta_\nu \xi_h^{(\nu)} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n)$$

bilden ein simultanes Lösungssystem der Gleichungen (6.) Nr. I und der Gleichungen

$$\sum_{h=1}^{n} (b_{hk} - \omega'_a \delta_{hk}) \xi_h = 0.$$

Das Aggregat

$$\sum_{k=1}^{n} y_k \sum_{\nu=1}^{\tau} \eta_\nu \xi_k^{(\nu)} \tag{1.}$$

multiplicirt sich also mit ω'_a, wenn die $[y_k]$ die Substitution B erleiden.

Nehmen wir nunmehr $\lambda = 1$, d. h. betrachten wir den zu einer Wurzel ω_a der Fundamentalgleichung von A gehörigen Linearfactor $\omega - \omega_a$, so haben die Ausdrücke

$$\sum_{k=1}^{n} \xi_k^{(\nu)} y_k \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, \tau)$$

die Eigenschaft sich mit ω_a zu multipliciren, wenn die $[y_k]$ die Substitution A erleiden, *der Ausdruck* (1.) *multiplicirt sich also sowohl bei Anwendung von A als auch bei Anwendung von B nur mit einer Constanten**).

Seien $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu$ die von einander verschiedenen Wurzeln der zu A gehörigen, $\omega'_1, \omega'_2, \ldots, \omega'_\mu$ die von einander verschiedenen Wurzeln der zu B gehörigen Fundamentalgleichung, sei ferner $n-\tau_a$ der Rang des Systems

$$(a_{hk}-\delta_{hk}\omega_a)_{(h,k=1,2,\ldots,n)} \qquad (a=1,2,\ldots,\nu),$$

$n-\tau'_a$ der Rang des Systems

$$(b_{hk}-\delta_{hk}\omega'_a)_{(h,k=1,2,\ldots,n)} \qquad (a=1,2,\ldots,\mu).$$

Wenn dann jede der Zahlen τ_a, τ'_a gleich derjenigen Zahl ist, die die Vielfachheit der betreffenden Wurzel ω_a, ω'_a angiebt, so kann man n lineare homogene Functionen der $[y_k]$ aufstellen, die sich sowohl bei Anwendung von A als auch bei Anwendung von B auf die $[y_k]$ nur mit Constanten multipliciren**) d. h. mit anderen Worten, es lässt sich eine lineare Substitution angeben, die die Substitutionen A, B *simultan in Diagonalsysteme* transformirt. Dieser Fall tritt also insbesondere dann ein, wenn die Fundamentalgleichungen von A, B je n von einander verschiedene Wurzeln haben.

Man kann aber auch in dem allgemeinsten Falle eine Substitution finden, die die Substitutionen A, B simultan in eine gewisse canonische Form transformirt. Wählen wir nämlich den Theiler $L(\omega)$ der linken Seite der zu A gehörigen Fundamentalgleichung der Reihe nach gleich

$$(\omega-\omega_a)^{\lambda_a} \qquad (a=1,2,\ldots,\nu),$$

wo λ_a den Grad der Vielfachheit angiebt, zu welchem die Wurzel ω_a in der Fundamentalgleichung enthalten ist, so erhalten wir, wie in meiner Arbeit†) gezeigt ist, n lineare Combinationen der $[y_k]$, die bei Anwendung von A auf die $[y_k]$ eine Substitution erfahren, welche als canonische Form von A aufzufassen ist. Diese n linearen Combinationen befriedigen aber dann auch Relationen von der Form (16.) Nr. I, und wir können folglich lineare Combinationen derselben so einrichten, dass diese letzteren bei Anwendung von B auf die $[y_k]$ eine Substitution erfahren, die als canonische

*) Vergl. *Picard*, dieses Journal, Bd. 90, S. 287.
**) Vergl. *Floquet*, Comptes Rendus, T. 98, S. 39.
†) Dieses Journal, Bd. 114, S. 153ff.

Form von B aufgefasst werden kann. Es können also n lineare Combinationen der $[y_k]$ so gefunden werden, dass dieselben in Gruppen zerfallen; jede solche Gruppe gehört zu einem Wurzelpaare der Fundamentalgleichungen von A und B, und die Elemente einer Gruppe verwandeln sich sowohl bei Anwendung von A als auch bei Anwendung von B auf die $[y_k]$ nur in lineare homogene Combinationen ihrer selbst, so zwar, dass, wenn

(2.) $$v_1, v_2, \ldots, v_\varrho$$

eine solche Gruppe bilden, die zu dem Wurzelpaare ω_a, ω'_a der Fundamentalgleichungen von A, B gehört

(3.) $$\begin{cases} Av_k = \alpha_{k1}v_1 + \alpha_{k2}v_2 + \cdots + \alpha_{kk}v_k, \\ Bv_k = \beta_{k1}v_1 + \beta_{k2}v_2 + \cdots + \beta_{kk}v_k \end{cases} \qquad (k = 1, 2, \ldots, \varrho)$$

wird, wo

(4.) $$\begin{cases} \alpha_{11} = \alpha_{22} = \cdots = \alpha_{\varrho\varrho} = \omega_a, \\ \beta_{11} = \beta_{22} = \cdots = \beta_{\varrho\varrho} = \omega' \end{cases}$$

ist, und wo ferner zufolge der Vertauschbarkeit der Substitutionen A, B zwischen den α_{ik}, β_{ik} die Relationen

$$\sum_{i=1}^{\varrho} \alpha_{ki}\beta_{ih} = \sum_{i=1}^{\varrho} \beta_{ki}\alpha_{ih}$$

oder, da für $i > k$, $\alpha_{ki} = 0$, $\beta_{ki} = 0$ ist,

(5.) $$\sum_{i=h+1}^{\varrho-1} \alpha_{ki}\beta_{ih} = \sum_{i=h+1}^{\varrho-1} \beta_{ki}\alpha_{ih} \qquad \begin{pmatrix} k = 3, 4, \ldots, \varrho \\ h = 1, 2, \ldots, k-2 \end{pmatrix}$$

bestehen*).

III.

Sei E ein dreifach zusammenhängender Bereich einer über der Ebene der complexen Variabeln x ausgebreiteten *Riemann*schen Fläche R, der durch die Querschnitte a, b in einen einfach zusammenhängenden $\bar{E}$ zerschnitten wird. Wir betrachten eine lineare homogene Differentialgleichung

(1.) $$\frac{d^n y}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + p_n y = 0,$$

deren Coefficienten rationale Functionen des Ortes in der *Riemann*schen Fläche R sind und für welche ein Fundamentalsystem von Integralen $[y_k]$

*) Vergl. *A. Hirsch*, Schriften der physik.-ökonomischen Gesellschaft in Königsberg, XXXIII (1892), § II, Gln. (11.), (12.)

innerhalb $\bar{E}$ eindeutig ist, und die mit einander vertauschbaren Substitutionen A, B erfährt, wenn x die Querschnitte a, b im positiven Sinne überschreitet.

Bilden wir dann die in der vorigen Nummer charakterisirten n linearen Combinationen der $[y_k]$, die in Gruppen von der Art wie (2.) voriger Nummer zerfallen, so können wir diese als das zu dem Bereiche E gehörige *canonische Fundamentalsystem* der Differentialgleichung (1.) auffassen. Für das zu einem singulären Punkte oder, wie man sich auch ausdrücken kann, zu einem zweifach zusammenhängenden Bereiche gehörige canonische Fundamentalsystem kann man, wie Herr *Fuchs**) gezeigt hat, analytische Ausdrücke aufstellen, die ausser Functionen, deren logarithmische Ableitungen in diesem Bereiche eindeutig sind, nur noch einen Logarithmus enthalten. Ebenso kann man für das zu dem dreifach zusammenhängenden Bereiche E gehörige Fundamentalsystem analytische Ausdrücke aufstellen, wenn man zwei Functionen Z_1, Z_2 zu Hülfe nimmt, die in der Umgebung jeder Stelle von E regulär sind und von denen die eine, etwa Z_1, beim Ueberschreiten des Querschnittes a ungeändert bleibt und sich beim Ueberschreiten des Querschnittes b um die Einheit vermehrt, während die andere Z_2 beim Ueberschreiten von a den Zuwachs Eins erfährt und beim Ueberschreiten von b ungeändert bleibt. Bezeichnen wir für eine Function V dasjenige, was aus V wird, wenn die unabhängige Variable x die Querschnitte a bezw. b überschreitet, durch AV bezw. BV und setzen kurz

$$AV - V = (A-1)V,$$
$$BV - V = (B-1)V,$$

so ist also für die Functionen Z_1, Z_2:

$$(A-1)Z_1 = 0, \qquad (B-1)Z_1 = 1,$$
$$(A-1)Z_2 = 1, \qquad (B-1)Z_2 = 0.$$

Casorati hat**) die von Herrn *Fuchs* gegebene analytische Darstellung der Elemente des zu einem zweifach zusammenhängenden Bereiche gehörigen Fundamentalsystems in äusserst eleganter Weise hergeleitet, indem er die sogenannte Differenzenrechnung in Anwendung brachte. Wir wollen für den dreifach zusammenhängenden Bereich E ein analoges Verfahren einschlagen, indem wir eine, wie es scheint, neue Verallgemeinerung der

---

*) Dieses Journal, Bd. 66, S. 133 ff.

**) Annali di Matematica Ser. 2, T. 10, S. 10—43.

Differenzenrechnung anwenden, die man wohl als ***Rechnung mit partiellen Differenzen*** bezeichnen könnte.

Wir setzen

$$Z_1^{(k)} = Z_1(Z_1-1)\dots(Z_1-k+1),$$
$$Z_2^{(k)} = Z_2(Z_2-1)\dots(Z_2-k+1);$$

dann ist offenbar

$$(A-1)Z_1^{(k)} = 0, \qquad (B-1)Z_1^{(k)} = kZ_1^{(k-1)},$$
$$(A-1)Z_2^{(k)} = kZ_2^{(k-1)}, \qquad (B-1)Z_2^{(k)} = 0.$$

Betrachten wir nun einen Ausdruck von der Form

$$F(Z_1, Z_2) = \varphi_{11}Z_1+\varphi_{12}Z_2+\varphi_{21}Z_1^{(2)}+\varphi_{22}Z_1Z_2+\varphi_{23}Z_2^{(2)}+\dots+\varphi_{k1}Z_1^{(k)}$$
$$+\varphi_{k2}Z_1^{(k-1)}Z_2+\dots+\varphi_{k,k+1}Z_2^{(k)},$$

wo die φ_{ik} Functionen von x bedeuten, die innerhalb E eindeutig sind oder, was dasselbe heisst, bei den Operationen A, B ungeändert bleiben, und nennen $F(Z_1, Z_2)$ kurz ***einen Ausdruck*** k***-ten Grades in den*** Z_1, Z_2, so wird

$$(A-1)F(Z_1, Z_2) = F_2(Z_1, Z_2)$$

aus $F(Z_1, Z_2)$ nach derselben Regel gebildet, wie der partielle Differentialquotient von $F(Z_1, Z_2)$ nach Z_2 zu bilden wäre, wenn an Stelle von $Z_1^{(\lambda)}, Z_2^{(\lambda)}$ die Potenzen $Z_1^{\lambda}, Z_2^{\lambda}$ ständen, und ebenso entspricht die Bildungsweise von

$$(B-1)F(Z_1, Z_2) = F_1(Z_1, Z_2)$$

der Bildung des partiellen Differentialquotienten nach Z_1.

Die $F_1(Z_1, Z_2)$, $F_2(Z_1, Z_2)$ sind demnach Ausdrücke $(k-1)$-ten Grades in den Z_1, Z_2, aber nicht beliebige Ausdrücke dieses Grades, denn es stimmen gewisse Coefficienten in den F_1, F_2 mit einander überein; dieser specielle Charakter lässt sich am einfachsten durch die Gleichung

$$(A-1)F_1(Z_1, Z_2) = (B-1)F_2(Z_1, Z_2)$$

darstellen. Hat man umgekehrt zwei Ausdrücke $(k-1)$-ten Grades in den Z_1, Z_2

$$G_1(Z_1, Z_2), \qquad G_2(Z_1, Z_2),$$

und ist für dieselben die Gleichung

$$(A-1)G_1(Z_1, Z_2) = (B-1)G_2(Z_1, Z_2),$$

(die wir vom Standpunkte der Differenzenrechnung als ***Integrabilitätsbedingung*** bezeichnen können) erfüllt, so lassen die beiden ***simultanen partiellen Differenzengleichungen***

$$(A-1)G(Z_1, Z_2) = G_2(Z_1, Z_2),$$
$$(B-1)G(Z_1, Z_2) = G_1(Z_1, Z_2)$$

eine Auflösung zu, und $G(Z_1, Z_2)$ ergiebt sich als Ausdruck k-ten Grades in den Z_1, Z_2, der, wenn man $Z_1^{(\lambda)}, Z_2^{(\lambda)}$ durch $Z_1^{\lambda}, Z_2^{\lambda}$ ersetzt, zu partiellen Ableitungen nach Z_1, Z_2 die Ausdrücke besitzt, die aus G_1, G_2 durch dieselbe Vertauschung hervorgehen, und der noch eine additive willkürliche Function enthält, die ebenso wie die Coefficienten von G_1, G_2 bei den Operationen A, B ungeändert bleibt.

IV.

Das erste Element v_1 der Gruppe (2.) Nr. II befriedigt die Gleichungen

$$(1.) \qquad Av_1 = \omega_\alpha v_1, \qquad Bv_1 = \omega'_\alpha v_1,$$

die logarithmische Ableitung von v_1 ist also innerhalb E eindeutig; wir erhalten demnach für den Quotienten von v_2 durch v_1

$$(A-1)\frac{v_2}{v_1} = \frac{\alpha_{21}}{\omega_\alpha}, \qquad (B-1)\frac{v_2}{v_1} = \frac{\beta_{21}}{\omega'_\alpha},$$

und als Lösung dieser simultanen Differenzengleichungen

$$(2.) \qquad \frac{v_2}{v_1} = \varphi_2 + \frac{\alpha_{21}}{\omega_\alpha} Z_2 + \frac{\beta_{21}}{\omega'_\alpha} Z_1,$$

wo φ_2 eine bei den Operationen A, B unveränderliche, also innerhalb E eindeutige Function bedeutet. Für das dritte Element v_3 der Gruppe ist

$$(A-1)\frac{v_3}{v_1} = \frac{\alpha_{31}}{\omega_\alpha} + \frac{\alpha_{32}}{\omega_\alpha}\frac{v_2}{v_1},$$

$$(B-1)\frac{v_3}{v_1} = \frac{\beta_{31}}{\omega'_\alpha} + \frac{\beta_{32}}{\omega'_\alpha}\frac{v_2}{v_1},$$

und vermöge der Gleichungen (5.) Nr. II besteht die Relation

$$(3.) \qquad \alpha_{32}\beta_{21} = \beta_{32}\alpha_{21}.$$

Setzen wir für $\frac{v_2}{v_1}$ den gefundenen Werth ein, so ergeben sich die beiden simultanen Differenzengleichungen

$$(A-1)\frac{v_3}{v_1} = \frac{\alpha_{31}}{\omega_\alpha} + \frac{\alpha_{32}}{\omega_\alpha}\varphi_2 + \frac{\alpha_{32}\beta_{21}}{\omega_\alpha\omega'_\alpha} Z_1 + \frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{\omega_\alpha^2} Z_2,$$

$$(B-1)\frac{v_3}{v_1} = \frac{\beta_{31}}{\omega'_\alpha} + \frac{\beta_{32}}{\omega'_\alpha}\varphi_2 + \frac{\beta_{32}\beta_{21}}{\omega'^2_\alpha} Z_1 + \frac{\beta_{32}\alpha_{21}}{\omega_\alpha\omega'_\alpha} Z_2,$$

für welche vermöge der Relation (3.) die Integrabilitätsbedingungen erfüllt sind. Wir finden demnach

$$\frac{v_3}{v_1} = \varphi_3 + \frac{\beta_{31}+\beta_{32}\varphi_2}{\omega'_\alpha} Z_1 + \frac{\alpha_{31}+\alpha_{32}\varphi_2}{\omega_\alpha} Z_2 + \frac{1}{2}\frac{\beta_{32}\beta_{21}}{\omega'^2_\alpha} Z_1^{(2)} + \frac{\beta_{23}\alpha_{21}}{\omega_\alpha\omega'_\alpha} Z_1 Z_2 + \frac{1}{2}\frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{\omega_\alpha^2} Z_2^{(2)},$$

wo auch φ_3 eine innerhalb E eindeutige Function bedeutet.

In dieser Weise weiter schliessend, ergiebt sich endlich für $\frac{v_\varrho}{v_1}$ die Darstellung

$$\frac{v_\varrho}{v_1} = F_{\varrho-1}(Z_1, Z_2),$$

wo $F_{\varrho-1}$ eine ganze Function von höchstens $(\varrho-1)$-tem Grade in den Z_1, Z_2 mit innerhalb E eindeutigen Coefficienten bedeutet. Damit ist der analytische Charakter der Integrale der Differentialgleichung (1.) Nr. III innerhalb E vollständig festgelegt.

Wenn die Coefficienten von (1.) Nr. III rationale Functionen von x und

$$s = \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}$$

sind und E die *Riemann*sche Fläche bedeutet, welche die Verzweigung von s darstellt, wenn ferner die Integrale von (1.) Nr. III in der Umgebung jeder Stelle der *Riemann*schen Fläche E den Charakter von rationalen Functionen besitzen, so sind*) die Substitutionen A, B stets mit einander vertauschbar, und die abgeleiteten Sätze und Formeln liefern die auf die sogenannten *Picard*schen Differentialgleichungen bezüglichen bekannten Resultate. Namentlich ergiebt sich, wenn man die Z_1, Z_2 gleich geeignet normirten Integralen zweiter Gattung wählt, die von Herrn *Floquet***) angegebene Darstellung der Integrale, und auch die von Herrn *Stenberg*†) entwickelten Relationen zwischen den Coefficienten der Potenzen von Z_1, Z_2 treten bei der von uns gewählten Art der Herleitung unmittelbar in Evidenz††).

Sei für die zu Beginn der Nr. III eingeführte *Riemann*sche Fläche R die Zahl p grösser als Eins, und mögen die Integrale der Differentialgleichung (1.) Nr. III in der Umgebung jeder Stelle von R den Charakter rationaler Functionen besitzen, mögen ferner die Substitutionen, die ein Fundamentsystem $[y_i]$ erfährt, wenn x die $2p$ Querschnitte a_k, b_k $(k=1, 2 \ldots, p)$ überschreitet, die R in eine einfach zusammenhängende Fläche $\overline{R}$ verwandeln, mit einander vertauschbar sein, so kann man ebenso wie im Falle $p=1$ die in diese Notiz entwickelten Methoden zum Studium der Integrale verwenden. Wir behalten uns vor, auf dieses Problem bei späterer Gelegenheit ausführlich einzugehen und bemerken nur noch, dass man die Bedin-

*) Vergl. *Picard,* Traité d'Analyse Bd. III (1896), S. 405.

**) Comptes Rendus, T. 98 (1884), S. 82.

†) Acta Mathematica Bd. XV, S. 259ff.

††) Vergl. die Darstellung im „Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen", Bd. II, 2 (1898), S. 405ff.

gung der Vertauschbarkeit aller Substitutionen, die das Fundamentalsystem $[y_i]$ beim Ueberschreiten der Querschnitte erfährt, noch durch eine andere ersetzen kann, die für manche Untersuchungen vortheilhafter erscheint.

Bedeutet nämlich $[z_i]$ das dem $[y_i]$ entsprechende Fundamentalsystem der zu (1.) Nr. III ***adjungirten*** Differentialgleichung, so sind bekanntlich $[z_i]$ und $[y_i]$ contragrediente Systeme. Sei nun

$$A = (a_{ik}) \qquad (i,k = 1, 2, \ldots, n)$$

die Substitution, die das Fundamentalsystem $[y_i]$ erfährt, wenn x einen bestimmten, etwa a_1, jener $2p$ Querschnitte überschreitet,

$$B = (b_{ik}) \qquad (i,k = 1, 2, \ldots, n)$$

die Substitution, die $[y_i]$ erfährt, wenn x einen anderen dieser Querschnitte überschreitet, so muss

$$AB = BA$$

sein, und daraus folgt*), dass die bilineare Form

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} z_i y_k$$

bei Anwendung der Substitution B ungeändert bleibt.

Die Vertauschbarkeit jener $2p$ Substitutionen ist also gleichbedeutend damit, dass die bilineare Form φ eine innerhalb R eindeutige, und folglich da die Integrale von (1.) Nr. III keine Unbestimmtheitsstellen darbieten, eine rationale Function auf der *Riemann*schen Fläche R ist. Die Form φ befriedigt diejenige lineare Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten, der das Product yz genügt, wo y die allgemeine Lösung von (1.) Nr. III z die allgemeine Lösung der adjungirten Differentialgleichung bedeutet; da bekanntlich

$$\sum_{k=1}^{n} y_k z_k = 0$$

ist, so ist diese letztere Differentialgleichung von der Ordnung n^2-1.

*) Vergl. ***Frobenius,*** dieses Journal, Bd. 84, S. 28ff.

Berichtigungen zu der Arbeit dieses Journal Bd. 114, S. 143—158.

S. 156, Zeile 12 v. u. lies: $i \geqq l$ statt $i \geqq \lambda$.

S. 157, Zeile 7 v. u. ist nach „*Diese bilden*“ einzuschalten „*von n subtrahirt*“.

S. 157, Zeile 2 v. u. und S. 158, Zeile 2, 3 v. o. lies Minuendus statt Subtrahendus.

Ueber eine Kugelschar.

(Von Herrn *H. E. Timerding* in Strassburg.)

1.

Kreisbüschel heissen projectiv, wenn die Tangenten in ihren Grundpunkten projective Strahlenbüschel oder die Mittelpunkte der Kreise projective Punktreihen bilden. Sind in einer Ebene drei projective Kreisbüschel vorgelegt und sucht man zu je drei homologen Kreisen derselben den Kreis, der sie alle drei rechtwinklig schneidet, so bilden die Kreise, die man so erhält, eine kubische Kreisschar. Durch jeden Punkt gehen nämlich drei Kreise der Schar, oder, allgemeiner gesprochen, in jedem Kreisbündel sind drei Kreise enthalten, die zu der Schar gehören. Von der kubischen Kreisschar arten drei Kreise in gerade Linien aus, dieselben bilden ein Dreieck, das wir kurz das Hauptdreieck nennen wollen. In der kubischen Kreisschar sind ferner sechs Punktkreise enthalten. Die Mittelpunkte der Kreise, die die kubische Schar bilden, also die Potenzpunkte von je drei homologen Kreisen der drei projectiven Büschel, liegen auf einer rationalen Curve dritter Ordnung.

Die Schnittpunkte von je zwei unendlich benachbarten Kreisen der kubischen Schar liegen auf den Tangenten einer zweiten rationalen Curve dritter Ordnung. Dieselbe lässt sich ebenfalls als Mittelpunktscurve einer kubischen Kreisschar auffassen. Diese zweite Kreisschar gewinnt man aus der ersten, indem man zu je drei unendlich benachbarten Kreisen derselben den Orthogonalkreis sucht. Die Beziehungen zwischen den beiden Curven dritter Ordnung und den zugehörigen kubischen Kreisscharen sind durchaus wechselseitig, man gelangt von der zweiten zur ersten genau ebenso zurück, wie man von der ersten zur zweiten hingelangt. Auch in der zweiten kubischen Kreisschar sind drei gerade Linien enthalten, die das Hauptdreieck dieser Schar bilden. Die Seiten des Hauptdreiecks von einer der beiden Scharen sind die Wendetangenten der Mittelpunktscurve der

anderen Schar, zwischen den beiden Mittelpunktscurven besteht also die Beziehung, dass die Wendetangenten der einen auf den Asymptoten der anderen senkrecht stehen. Ueberhaupt aber sind die beiden Curven einander derart eindeutig zugeordnet, dass die Tangenten in entsprechenden Punkten auf einander senkrecht stehen.

Eine kubische Kreisschar lässt sich aber nicht etwa nur vermöge drei bestimmter projectiver Kreisbüschel erzeugen, sondern mittels beliebiger drei Kreisbüschel aus einer doppelt unendlichen Mannigfaltigkeit von Büscheln. Eine solche Mannigfaltigkeit sei ein Büschelnetz genannt. Ein beliebiger Kreis ist in drei Büscheln des Büschelnetzes enthalten und zu einem Büschel desselben orthogonal. Zur näheren Erläuterung dieses Begriffes können die folgenden Bemerkungen dienen.

Wenn zwei projective Kreisbüschel gegeben sind, so umhüllen die gemeinsamen Sehnen entsprechender Kreise einen Kegelschnitt. Die Kreise, die zu je zwei homologen Kreisen der beiden Büschel orthogonal sind, bilden eine Schar von Büscheln, und die Mittelpunkte der Kreise eines jeden dieser Büschel liegen auf einer Tangente des erwähnten Kegelschnittes. Verbindet man aber die Mittelpunkte homologer Kreise der beiden projectiven Büschel, so umhüllen diese Linien einen zweiten Kegelschnitt. Auf den Tangenten dieses Kegelschnittes liegen die Kreismittelpunkte der neuen Büschel, die durch je zwei homologe Kreise der beiden vorgelegten Büschel bestimmt sind. So findet man zwei Scharen von Kreisbüscheln, von denen jede aus den Orthogonalbüscheln der zur anderen Schar gehörenden Büschel besteht, und von denen man sagen kann, dass sie vereinigt liegen. Die zugehörigen beiden Kegelschnitte der Centrallinien sind durch die Büschelscharen derart projectiv auf einander bezogen, dass die Tangenten in entsprechenden Punkten auf einander senkrecht stehen.

Ein beliebiges Kreisbüschel hat mit der Büschelschar zwei Kreise gemein, hat es mehr mit ihr gemein, so gehört es ganz der Büschelschar an und ist entweder selbst ein Büschel der Schar, oder es hat mit jedem Büschel derselben einen Kreis gemeinsam. Solcher Kreisbüschel giebt es aber unendlich viele. Greift man nämlich irgend einen Kreis aus der Büschelschar heraus und verbindet ihn mit zwei Büscheln derselben durch zwei Kreisbündel, so haben diese ein derartiges Büschel gemeinsam. Wir finden also zwei weitere Büschelscharen, durch dieselben sind die Büschel

je einer der beiden ersten Scharen projectiv auf einander bezogen, wie ***sie*** umgekehrt durch die letzteren, indem jedesmal homologe Kreise ein Büschel der zugehörigen anderen Schar bilden. Von solchen zwei Büschelreihen kann man mit einem Ausdrucke des Herrn ***Reye*** sagen: sie ruhen auf einander oder stützen sich gegenseitig. Die Orthogonalbüschel zu den Büscheln zweier sich stützenden Scharen stützen sich ebenfalls. Die vier Kreisbüschelscharen, die wir aus einer erhielten, stützen sich sonach paarweise und liegen paarweise vereinigt.

Ein Kreisbüschelnetz nun ist durch drei projective Kreisbüschel bestimmt, die keiner Büschelschar angehören. Man findet alle zu ihm gehörenden Büschel, indem man zunächst die durch je zwei der drei Büschel bestimmten Scharen projectiver Kreisbüschel aufsucht und zu irgend zwei projectiven Büscheln dieser Scharen wieder die dadurch bestimmte Schar. Ein Büschelnetz enthält also zweifach unendlich viele Büschelscharen.

Zu dem Büschelnetz findet man ein zweites (reciprokes) Büschelsystem, indem man zu allen ihm angehörenden Büscheln die Orthogonalbüschel sucht. Diese Orthogonalbüschel enthalten von der durch das erste Büschelnetz bestimmten kubischen Kreisschar je zwei Kreise, und umgekehrt ist immer das durch irgend zwei Kreise der kubischen Schar bestimmte Büschel zu einem gewissen Büschel jenes Büschelnetzes orthogonal. Die Büschel, die durch zwei unendlich benachbarte Kreise der kubischen Kreisschar bestimmt werden, sind zu je einem Büschel orthogonal, das durch zwei unendlich benachbarte Kreise der zweiten kubischen Kreisschar bestimmt wird. Dieselbe war dadurch definirt, dass sie aus den Orthogonalkreisen von je drei consecutiven Kreisen der ersten Schar bestehen sollte.

In einem Netze von Kreisbüscheln sind drei Büschel concentrischer Kreise enthalten. Das Dreieck, das die Mittelpunkte derselben bilden, ist das Hauptdreieck der zugehörigen kubischen Kreisschar, und seine Seiten sind die Wendetangenten von der Mittelpunktscurve der mit der ***ersten*** verbundenen ***zweiten*** kubischen Kreisschar. In dem Kreisbüschelnetz ist auch ein Strahlenbüschel enthalten. Der Scheitel desselben ist Mittelpunkt von zwei Kreisen der zugehörigen kubischen Schar und somit Doppelpunkt von deren Mittelpunktscurve.

2.

In all diese Verhältnisse kommt eine viel grössere Klarheit, wenn man statt der Kreise in einer Ebene die Kreise auf einer Kugel betrachtet. Dann lässt sich zu jedem Kreise eine Kugel construiren, die in ihm die zugrunde gelegte Kugel — kurz gesagt, die Hauptkugel — rechtwinklig schneidet. Der Mittelpunkt dieser Kugel ist der Pol der Ebene des Kreises bezüglich der Hauptkugel.

Sind nun zwei Kreisbüschel der Hauptkugel projectiv auf einander bezogen, so bilden ihre Ebenen zwei projective Ebenenbüschel. Sucht man also die Kreise auf der Hauptkugel, die zu homologen Kreisen dreier projectiver Kreisbüschel orthogonal sind, so erhält man eine kubische Kreisschar, denn man sieht sofort, dass die Pole der Ebenen dieser Kreise auf einer kubischen Raumcurve liegen und die Ebenen selbst ein kubisches Ebenenbüschel bilden, das seinerseits aus den Schmiegungsebenen einer zweiten kubischen Raumcurve besteht. Beide Raumcurven sind einander bezüglich der Hauptkugel als reciproke Polaren zugeordnet.

Die sphärischen Mittelpunkte der Kreise der kubischen Schar liegen auf der sphärischen Curve sechster Ordnung, in welche die erste kubische Raumcurve aus dem Mittelpunkte auf die Hauptkugel projicirt wird. Die wirklichen Mittelpunkte dieser Kreise liegen auf der inversen Curve der kubischen Raumcurve bezüglich der Hauptkugel.

Die kubische Kreisschar wird durch beliebige drei, nur keiner Büschelschar angehörende projective Kreisbüschel aus einem Büschelnetze erzeugt. Die Axen aller dieser Kreisbüschel, nämlich die geraden Verbindungslinien ihrer Grundpunkte, sind Sehnen der ersten kubischen Raumcurve, ihre reciproken Polaren bezüglich der Hauptkugel also Axen der zweiten kubischen Raumkurve. Hieraus folgt sofort, dass zu jedem der Kreisbüschel zwei Kreise der kubischen Schar orthogonal sind.

Durch den Mittelpunkt der Hauptkugel geht *eine* Sehne der ersten kubischen Raumcurve, *ein* Büschel des Büschelnetzes besteht also aus grössten Kreisen, und die zwei Gegenpunkte, in denen diese sich schneiden, sind Doppelpunkte der sphärischen Mittelpunktscurve. Ebenso sind in dem kubischen Kreisbüschel drei grösste Kreise enthalten, weil durch den Mittelpunkt der Hauptkugel drei Schmiegungsebenen der zweiten kubischen Raumcurve gehen. Die reciproken Polaren der Schnittlinien je zweier dieser drei Ebenen sind die unendlich fernen Sehnen der ersten kubischen

Raumcurve. Durch diese Sehnen gehen die Ebenen der concentrischen Kreisbüschel im Büschelnetz hindurch, die sphärischen Mittelpunkte dieser Kreise liegen sonach paarweise auf den grössten Kreisen in der kubischen Kreisschar.

Die Schmiegungsebenen der ersten kubischen Raumcurve schneiden die Hauptkugel in den Kreisen einer zweiten kubischen Schar, deren Pole — d. h. die Pole ihrer Ebenen — auf der zweiten kubischen Raumcurve liegen und die alle zu je drei unendlich benachbarten Kreisen der ersten Schar orthogonal sind, während die erste Schar umgekehrt in der gleichen Beziehung zur zweiten Schar steht. Jedem Kreise der einen Schar ist ein Kreis der anderen Schar zugeordnet, so dass beide Kreise orthogonal sind. Aber damit nicht genug, wenn man die Orthogonalkreise zu beliebigen drei Kreisen der einen Schar und den entsprechenden Kreisen der anderen Schar aufsucht, so schneiden auch diese Orthogonalkreise einander rechtwinklig.

Die projectiven Ebenenbüschel, welche die Punkte der ersten kubischen Raumcurve aus den durch irgend einen festen Punkt auf ihr gehenden Sehnen projiciren, schneiden die Hauptkugel in einer Reihe projectiver Kreisbüschel. Deren Pole liegen auf den reciproken Polaren zu jenen Sehnen der kubischen Raumcurve. Also umhüllen die Pollinien derjenigen Büschel des Büschelnetzes, welche zu einem Kreise der zugehörigen kubischen Kreisschar orthogonal sind, einen Schmiegungskegelschnitt der zweiten kubischen Raumcurve. Die grössten Kreise, welche die Mittelpunktslinien dieser Kreisbüschel bilden, umhüllen sonach einen sphärischen Kegelschnitt. Beschreibt man um dessen Punkte die Kreise, welche zu dem Kreise der kubischen Kreisschar orthogonal sind, so liegt jeder derselben mit zwei unendlich benachbarten Kreisen der zweiten kubischen Kreisschar in einem Büschel, ist also ausser dem fest angenommenen zu zwei unendlich benachbarten Kreisen der ersten Schar orthogonal. Der Kegelschnitt selbst ist dem Hauptdreieck der ersten kubischen Schar einbeschrieben und berührt die sphärische Mittelpunktslinie der zweiten kubischen Schar in dem Punkte, der dem Mittelpunkte des als Orthogonalkreis angenommenen Kreises der ersten Schar entspricht.

3.

Nach diesen Vorbereitungen bietet es keine Schwierigkeiten mehr, die biquadratische Kugelschar zu betrachten, deren Kugeln zu homologen Kugeln von vier projectiven Kugelbüscheln orthogonal sind. Diese biquadratische

Schar lässt sich zunächst nicht bloss durch die vier als gegeben angenommenen, sondern durch beliebige vier, nur keinem Büschelnetz angehörende projective Kugelbüschel aus einem Büschelcomplex erzeugen.

Um die Natur dieses Complexes zu erkennen, gehen wir von zwei projectiven Kugelbüscheln aus. Die Mittelpunkte derselben bilden zwei projective Punktreihen. Die Verbindungslinien homologer Punkte dieser Punktreihen sind die eine Regelschar einer quadratischen Fläche, zu deren anderer Regelschar die Mittelpunktslinien der beiden Kugelbüschel gehören. Aber jede Linie der zweiten Regelschar ist Mittelpunktslinie eines Kugelbüschels, das zu den beiden vorgelegten projectiv ist. So erhalten wir eine Schar projectiver Kugelbüschel. Homologe Kugeln derselben bilden immer ein neues Büschel, und ihre Mittelpunkte liegen auf einem Strahle der ersten Regelschar. Alle Kugeln der Büschelschar sind zur einer bestimmten orthogonal.

Drei projective Kugelbüschel bestimmen ein Büschelnetz, das zweifach unendlich viele Büschel und zweifach unendlich viele Büschelscharen enthält. Die Mittelpunktslinien der das Büschelnetz bildenden Kugelbüschel sind die Axen einer kubischen Raumcurve. Zu einer beliebigen Ebene, oder allgemeiner zu einer beliebigen Kugel, ist ein einziges Kugelbüschel des Büschelnetzes orthogonal, und jeder Punkt ist Mittelpunkt von — oder in jedem Kugelbüschel liegen — drei Kugeln, die zu Kugelbüscheln des Büschelnetzes gehören.

Vier projective Kugelbüschel bestimmen einen Büschelcomplex. Dieser ist, wie das Büschelnetz, durch die Bedingung sofort gegeben, dass jede Büschelschar ihm ganz angehören soll, die zwei projective Büschel mit ihm gemein hat. Eine beliebige Kugel gehört vier Büscheln des Büschelcomplexes an und ist zu einer Büschelschar in demselben orthogonal. Die Mittelpunktslinien der den Complex ausmachenden Kugelbüschel bilden einen tetraedralen Strahlencomplex. Von dessen Haupttetraeder werden die Ecken durch die Mittelpunkte der vier concentrischen Kugelbüschel gebildet, die in dem Büschelcomplex enthalten sind. In der That bestimmen die drei concentrischen, projectiven ***Kreis***büschel, in denen je drei dieser concentrischen ***Kugel***büschel von der Verbindungsebene ihrer Mittelpunkte geschnitten werden, in dieser Ebene ein Netz von Kreisbüscheln. Jede Gerade der Ebene ist Mittelpunktslinie eines dieser Kreisbüschel, und jede dieser Geraden ist auch Mittelpunktslinie eines zum Büschelcomplex gehörenden Kugelbüschels, dessen Schnitt mit der Ebene das Kreisbüschel ist,

so dass in der That jede Gerade dieser vier Ebenen zu dem tetraedralen Strahlencomplex gehört.

Im allgemeinen sind zu einer Kugel unserer biquadratischen Schar doppelt unendlich viele, zu zwei Kugeln einfach unendlich viele Kugelbüschel des zugehörigen Büschelcomplexes orthogonal, und zu irgend drei Kugeln der Schar ein einziges Büschel, wie umgekehrt zu jedem Kugelbüschel des Büschelcomplexes drei bestimmte Kugeln der Schar orthogonal sind. Hieraus folgt insbesondere, dass die Ebenen des Haupttetraeders zu der Schar gehören.

Die Mittelpunkte der Kugeln, welche die biquadratische Schar bilden, liegen auf einer rationalen Raumcurve vierter Ordnung, die durch die acht Punktkugeln der Schar geht und deren Asymptoten auf den Ebenen des Haupttetraeders senkrecht stehen. Nun sind in dem Kugelbüschelcomplex unendlich viele Ebenenbüschel enthalten. Dieselben müssen eine Büschelschar bilden, ihre Axen bilden also die eine Regelschar einer quadratischen Fläche. Weil aber zu jedem jener Büschel drei Kugeln der biquadratischen Schar orthogonal sein müssen, liegen auf jedem Strahle dieser Regelschar drei Punkte der biquadratischen Mittelpunktscurve, das heisst, die Regelschar wird von den Doppelsehnen der Raumcurve gebildet, und die letztere liegt auf der Regelfläche, der die Regelschar angehört.

Bestimmt man zu je vier unendlich benachbarten Kugeln der biquadratischen Schar die Orthogonalkugeln, so bilden diese eine zweite biquadratische Schar, und die Mittelpunktscurve dieser Schar ist eine zweite rationale Raumcurve vierter Ordnung. Sucht man das zu drei unendlich benachbarten Kugeln der ersten Schar orthogonale Kugelbüschel des zugehörigen Büschelcomplexes, so enthält dasselbe zwei unendlich benachbarte Kugeln der zweiten biquadratischen Schar. Es ergiebt sich also, dass die Kugelbüschel, welche je zwei unendlich nahe Kugeln einer der biquadratischen Scharen verbinden, dem Büschelcomplex angehören, der die andere Schar erzeugt.

Die beiden biquadratischen Mittelpunktscurven sind auf einander derart eindeutig bezogen, dass die Tangente in einem Punkte der einen jedesmal auf der Schmiegungsebene in dem entsprechenden Punkte der anderen senkrecht steht. Insbesondere entsprechen den unendlich fernen Punkten der einen Curve die Wendeberührungspunkte der anderen Curve. Das

Haupttetraeder der ersten biquadratischen Kugelschar wird durch die Wendeberührungsebenen der zweiten Mittelpunktscurve gebildet, und umgekehrt.

Eine beliebige Kugel der biquadratischen Schar wird von den übrigen Kugeln derselben in einer kubischen Kreisschar geschnitten. Andererseits sind zu dieser Kugel, wie bereits bemerkt, zweifach unendlich viele Kugelbüschel des zugehörigen Büschelcomplexes orthogonal. Sucht man nun zu homologen Kugeln dieser projectiven Büschel und der fest angenommenen Kugel der biquadratischen Schar jedesmal die Orthogonalkugel, so gehen diese Kugeln durch die Kreise der eben erwähnten kubischen Kreisschar. Sie bilden ebenfalls eine kubische Schar, ihre Mittelpunkte liegen auf einer kubischen Raumcurve, und die Ebenen ihrer Schnittkreise mit der fest angenommenen Kugel umhüllen eine zweite kubische Raumcurve, deren Axen die Mittelpunktslinien der doppelt unendlich vielen Kugelbüschel sind. Die um die Punkte dieser Raumcurve orthogonal zu der fest angenommenen Kugel beschriebenen Kugeln sind ausser zu dieser zu drei unendlich benachbarten Kugeln der biquadratischen Schar orthogonal. Die kubische Raumcurve ist dem Haupttetraeder der biquadratischen Schar einbeschrieben, sie hat also die Wendeberührungsebenen der zweiten Mittelpunktscurve zu Schmiegungsebenen, und sie legt sich dieser Curve selbst in dem Punkte an, der dem Mittelpunkte der in der ersten biquadratischen Schar fest angenommenen Kugel entspricht. Sie gehört zu den Curven, die *W. Stahl* und Herr *Jolles* als Osculanten bezeichnet haben.

Zu dem tetraedralen Complex, welchen die Mittelpunktslinien der Kugelbüschel eines Büschelcomplexes bilden, gehören auch die Tangenten der zugeordneten zweiten biquadratischen Mittelpunktscurve. Die Wendeberührungsebenen der letzteren bilden das Haupttetraeder des Strahlencomplexes. Die Doppelsehnen derselben Curve gehören aber zu dem anderen tetraedralen Complexe, den die Mittelpunktslinien des die zweite biquadratische Kugelschar erzeugenden Büschelcomplexes bilden.

Ueber *Riccati*sche Differentialgleichungen höherer Ordnung.

(Von Herrn *Georg Wallenberg* in Berlin.)

Die *Riccati*sche Differentialgleichung in ihrer allgemeinen Gestalt lautet:

$$(1.) \qquad v' + q_0 + q_1 v + q_2 v^2 = 0 \qquad \left(v' = \frac{dv}{dz}\right);$$

dieselbe besitzt die charakteristische Eigenschaft, dass sie sich durch die Substitution

$$v = \frac{1}{q_2}\frac{y'}{y}$$

in eine lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(2.) \qquad y'' + p_1 y' + p_0 y = 0$$

transformiren lässt. Darin ist

$$p_1 = q_1 - \frac{q_2'}{q_2}, \qquad p_0 = q_0 q_2.$$

Geht man umgekehrt von der Differentialgleichung (2.) aus, dividirt dieselbe durch y und setzt

$$\frac{y'}{y} = qv,$$

worin q eine Function von z bedeutet, so wird

$$\frac{y''}{y} = qv' + q'v + q^2 v^2,$$

und die Differentialgleichung (2.) geht über in

$$v' + \frac{p_0}{q} + \left(p_1 + \frac{q'}{q}\right)v + qv^2 = 0.$$

Diese Ausgangsart lässt recht deutlich den Grund hervortreten, weshalb jede *beliebige* Differentialgleichung (1.) sich in (2.) transformiren lässt: die Anzahl der Grössen p_0, p_1, q ist nämlich gleich der Anzahl der Grössen

q_0, q_1, q_2, sodass die ersteren sich stets durch die letzteren aus den drei Gleichungen

$$\frac{p_0}{q} = q_0, \qquad p_1 + \frac{q'}{q} = q_1, \qquad q = q_2,$$

deren Anzahl offenbar gleich der Anzahl der Grössen q_i ist, bestimmen lassen.

Ferner hat diese Behandlungsweise den Vorzug, dass sie sich auch auf Differentialgleichungen höherer Ordnung ausdehnen lässt. Man kommt so allgemein zu *nicht*linearen Differentialgleichungen n-ter Ordnung, die sich durch eine der obigen analoge Substitution in lineare homogene Differentialgleichungen $(n+1)$-ter Ordnung transformiren lassen; eine solche Differentialgleichung kann wohl mit Fug und Recht als ***Riccatische Differentialgleichung n-ter Ordnung*** bezeichnet werden. Doch wird sich zeigen, dass die *Riccati*sche Differentialgleichung erster Ordnung die *einzige* ist, bei welcher die Coefficienten von einander unabhängig sind, weil bei den *Riccati*schen Differentialgleichungen höherer Ordnung die Anzahl der Coefficienten q_i, also auch die Anzahl der Bestimmungsgleichungen grösser als die Anzahl der zu bestimmenden Coefficienten p_i der linearen homogenen Differentialgleichung mit Einschluss der Grösse q ist, sodass die Coefficienten der *Riccati*schen Differentialgleichung gewisse Bedingungsgleichungen erfüllen müssen, die sich aber überraschend einfach gestalten.

Es mag genügen, im Folgenden die Rechnung für die *Riccati*sche Differentialgleichung zweiter und dritter Ordnung durchzuführen: Wir gehen also zunächst von der linearen homogenen Differentialgleichung dritter Ordnung

$$y''' + p_2 y'' + p_1 y' + p_0 y = 0 \tag{3.}$$

aus, dividiren dieselbe durch y und setzen wieder

$$\frac{y'}{y} = qv,$$

dann wird

$$\frac{y''}{y} = qv' + q'v + q^2 v^2,$$

$$\frac{y'''}{y} = qv'' + (2q' + 3q^2 v)v' + q''v + 3qq'v^2 + q^3 v^3,$$

und die Differentialgleichung (3.) geht über in

$$v'' + \left(p_2 + 2\frac{q'}{q} + 3qv\right)v' + \frac{p_0}{q} + \left(p_1 + p_2\frac{q'}{q} + \frac{q''}{q}\right)v + (p_2 q + 3q')v^2 + q^2 v^3 = 0.$$

Die *Riccati*sche Differentialgleichung zweiter Ordnung hat also jedenfalls die Gestalt

$$v''+(q_2+3q_3v)v'+q_0+q_1v+q_4v^2+q_5v^3=0.$$

Sie besitzt die von Herrn *Picard**) aufgestellte Form, denn die Verzweigungspunkte ihrer Integrale sind offenbar „fest". Durch Vergleichung der Coefficienten findet man:

$$q_2=p_2+2\frac{q'}{q}, \qquad q_1=p_1+p_2\frac{q'}{q}+\frac{q''}{q},$$
$$3q_3=3q, \qquad q_4=p_2q+3q',$$
$$q_0=\frac{p_0}{q}, \qquad q_5=q^2;$$

daraus ergeben sich für die q_i die beiden Bedingungsgleichungen:

$$q_4=q_2q_3+q_3', \qquad q_5=q_3^2.$$

Wir haben also folgendes Resultat erhalten:

Die Differentialgleichung

$$(4.)\qquad v''+(q_2+3q_3v)v'+q_0+q_1v+(q_2q_3+q_3')v^2+q_3^2v^3=0$$

lässt sich durch die Substitution

$$v=\frac{1}{q_3}\frac{y'}{y}$$

in eine lineare homogene Differentialgleichung dritter Ordnung

$$(3.)\qquad y'''+p_2y''+p_1y'+p_0y=0$$

transformiren**); ihr allgemeines Integral hat also die Form

$$v=\frac{1}{q_3}\frac{c_1y_1'+c_2y_2'+y_3'}{c_1y_1+c_2y_2+y_3},$$

worin y_1, y_2, y_3 Fundamentalintegrale von (3.) bedeuten.

Für die Coefficienten der Differentialgleichung (3.) erhält man noch folgende Ausdrücke:

$$p_0=q_0q_3,$$
$$p_1=q_1-q_2\frac{q_3'}{q_3}+2\left(\frac{q_3'}{q_3}\right)^2-\frac{q_3''}{q_3},$$
$$p_2=q_2-2\frac{q_3'}{q_3}.$$

---

*) „Mémoire sur la théorie des fonctions algébriques de deux variables." Journal de Mathématiques pures et appliquées (Liouville). 1889. 4. Serie, t. V, p. 135 u. f. p. 281.

**) Ein sehr specieller Fall (mit constanten Coefficienten) findet sich in einer Arbeit des Herrn *Mittag-Leffler*, Acta Mathematica, 18 : 3, p. 239. Ueber eine allgemeinere Differentialgleichung, welche (4.) als besonderen Fall umfasst, siehe die drittfolgende Arbeit des Verfassers sowie die dort citirte Arbeit von Herrn *Vessiot*.

Die Coefficienten der Differentialgleichungen (3.) und (4.) zeigen bemerkenswerthe Invarianteneigenschaften. Es ist nämlich:

$$\text{(I.)} \qquad p_2+2\frac{p_0'}{p_0} = q_2+2\frac{q_0'}{q_0};$$

$$\text{(II.)} \qquad p_1+p_2\frac{p_0'}{p_0}+\frac{p_0''}{p_0} = q_1+q_2\frac{q_0'}{q_0}+\frac{q_0''}{q_0};$$

$$\text{(III.)} \qquad p_1-\frac{p_2'}{2}-\left(\frac{p_2}{2}\right)^2 = q_1-\frac{q_2'}{2}-\left(\frac{q_2}{2}\right)^2.$$

Dabei ist aber zu beachten, dass (III.) eine Folge von (I.) und (II.) ist. Die Invariante (I.) tritt bereits bei der gewöhnlichen *Riccati*schen Differentialgleichung erster Ordnung (1.) auf; es ist nämlich dort:

$$p_1+\frac{p_0'}{p_0} = q_1+\frac{q_0'}{q_0}.$$

Eine ganz analoge Rechnung ergiebt:

Die Riccatische Differentialgleichung dritter Ordnung

$$v'''+(q_3+4q_4v)v''+3q_4v'^2+(q_2+(3q_3q_4+5q_4')v+6q_4^2v^2)v'+q_0+q_1v$$
$$+(q_2q_4+q_3q_4'+q_4'')v^2+(q_3q_4^2+3q_4q_4')v^3+q_4^3v^4 = 0$$

lässt sich durch die Substitution

$$v = \frac{1}{q_4}\frac{y'}{y}$$

in eine lineare homogene Differentialgleichung vierter Ordnung transformiren.

Zur Theorie der Differentialinvarianten.

(Von Herrn *Georg Wallenberg* in Berlin.)

Die in der vorhergehenden Arbeit für die *Riccati*schen Differentialgleichungen erster und zweiter Ordnung aufgestellten absoluten Invarianten gelten, wie ich hier zeigen will, allgemein.

Es möge in der Differentialgleichung

$$(1.) \qquad y^{(n+1)}+p_1 y^{(n)}+\cdots+p_n y'+p_{n+1} y = 0 \qquad \left(y^{(k)}=\frac{d^k y}{dz^k}\right)$$

gesetzt werden

$$\frac{y'}{y} = q\cdot v,$$

worin q eine Function der unabhängigen Veränderlichen z bedeutet, dann ist:

$$\frac{y''}{y} = qv'+q'v+q^2v^2,$$

$$\frac{y'''}{y} = qv''+2q'v'+q''v+3q^2vv'+3qq'v^2+q^3v^3,$$

allgemein:

$$\frac{y^{(k)}}{y} = (v+q)^{[k-1]}+\text{Glieder höherer Dimension in } v \text{ und seinen Ableitungen;} \qquad (k=2,3,\ldots,n+1)$$

darin bedeutet $(v+q)^{[k-1]}$ die bekannte symbolische Potenz, nach deren Ausführung jeder Potenzexponent, auch 0, durch die entsprechende Ableitungszahl zu ersetzen ist. Dadurch geht die linke Seite der Differentialgleichung (1.) über in

$$(2.) \quad \begin{cases} v^{(n)}+q_1 v^{(n-1)}+\cdots+q_{n-1}v'+q_n v+q_{n+1} \\ \qquad +\text{Glieder höherer Dimension in } v \text{ und seinen Ableitungen.} \end{cases}$$

Darin ist:

$$(3.)\quad \begin{cases} q_1 = p_1 + n\dfrac{q'}{q}, \\ q_2 = p_2 + \binom{n-1}{1} p_1 \dfrac{q'}{q} + \binom{n}{2}\dfrac{q''}{q}, \\ q_3 = p_3 + \binom{n-2}{1} p_2 \dfrac{q'}{q} + \binom{n-1}{2} p_1 \dfrac{q''}{q} + \binom{n}{3}\dfrac{q'''}{q}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ q_{n-1} = p_{n-1} + 2p_{n-2}\dfrac{q'}{q} + 3p_{n-3}\dfrac{q''}{q} + \cdots + (n-1)p_1\dfrac{q^{(n-2)}}{q} + n\dfrac{q^{(n-1)}}{q}, \\ q_n = p_n + p_{n-1}\dfrac{q'}{q} + p_{n-2}\dfrac{q''}{q} + \cdots + p_2\dfrac{q^{(n-2)}}{q} + p_1\dfrac{q^{(n-1)}}{q} + \dfrac{q^{(n)}}{q}, \\ q_{n+1} = \dfrac{p_{n+1}}{q}; \end{cases}$$

allgemein:

$$q_k = \sum_{i=0}^{i=k} \binom{n-k+i}{i} p_{k-i}\frac{q^{(i)}}{q} \qquad \left(\begin{matrix} k = 1, 2, \ldots, n, \\ p_0 = 1, \\ q_{n+1} = \dfrac{p_{n+1}}{q} \end{matrix}\right).$$

Vermittelst dieser Gleichungen kann man auch umgekehrt die p_k successive durch die q_k und q ausdrücken, indem man mit p_1 beginnt. — Im übrigen kann man das Gleichungssystem (3.) ganz unabhängig von seiner Entstehung durch Transformation einer Differentialgleichung betrachten.

Ich bilde jetzt

$$\sum_{l=0}^{l=k} \binom{n-k+l}{l} q_{k-l}\frac{q_{n+1}^{(l)}}{q_{n+1}} = \sum_{l=0}^{l=k} \binom{n-k+l}{l}\frac{q_{n+1}^{(l)}}{q_{n+1}} \sum_{i=0}^{i=k-l} \binom{n-k+l+i}{i} p_{k-l-i}\frac{q^{(i)}}{q};$$

$(k = 1, 2, \ldots n;\ q_0 = p_0 = 1)$

in der rechts stehenden Doppelsumme lautet der Coefficient von p_{k-r} ($l+i$ gleich r und s statt l als Summationsbuchstabe gesetzt):

$$\sum_{s=0}^{s=r} \binom{n-k+s}{s}\binom{n-k+r}{r-s}\frac{q_{n+1}^{(s)}}{q_{n+1}}\frac{q^{(r-s)}}{q},$$

oder, da

$$\binom{n-k+s}{s}\binom{n-k+r}{r-s} = \binom{r}{s}\binom{n-k+r}{r}$$

ist,

$$\binom{n-k+r}{r}\sum_{s=0}^{s=r}\binom{r}{s}\frac{q_{n+1}^{(s)}}{q_{n+1}}\frac{q^{(r-s)}}{q} = \binom{n-k+r}{r}\frac{p_{n+1}^{(r)}}{p_{n+1}}.$$

Es ist also:

$$(4.)\qquad \sum_{l=0}^{l=k} \binom{n-k+l}{l} q_{k-l}\frac{q_{n+1}^{(l)}}{q_{n+1}} = \sum_{r=0}^{r=k} \binom{n-k+r}{r} p_{k-r}\frac{p_{n+1}^{(r)}}{p_{n+1}}.$$

$(k = 1, 2, \ldots n)$

Die Ausdrücke auf der linken und rechten Seite der Gleichungen (4.), ***welche letztere als Resultanten der Elimination von q aus den Gleichungen*** (3.) ***betrachtet werden können, sind in den q_i bezw. p_i $(i = 1, 2, \ldots, n+1)$ ganz analog gebaut und stellen daher n absolute Invarianten des Transformationssystems*** (3.) ***dar.***

Eine zweite Reihe von Invarianten, in denen p_{n+1} und q_{n+1} nicht vorkommen, findet man durch folgende Betrachtung:

Das Gleichungssystem (3.) bleibt ungeändert, wenn man λp_{n+1} an Stelle von p_{n+1} und gleichzeitig λq_{n+1} an Stelle von q_{n+1} setzt, wobei λ eine beliebige Function von z bedeutet; dasselbe besitzt daher auch die Invarianten

$$(4^*.) \quad \sum_{l=0}^{l=k} \binom{n-k+l}{l} q_{k-l} \frac{(\lambda q_{n+1})^{(l)}}{\lambda q_{n+1}} = \sum_{l=0}^{l=k} \binom{n-k+l}{l} p_{k-l} \frac{(\lambda p_{n+1})^{(l)}}{\lambda p_{n+1}} \quad (k=1, 2, \ldots, n).$$

Aus der ersten der Gleichungen (3.)

$$q_1 = p_1 + n \frac{q'}{q}$$

folgt nun:

$$q = c \frac{e^{-\frac{1}{n}\int p_1 dz}}{e^{-\frac{1}{n}\int q_1 dz}};$$

die willkürliche Constante c kann gleich 1 angenommen werden, denn das Gleichungssystem (3.) bleibt ungeändert, wenn cq an Stelle von q gesetzt wird. Daher kann

$$p_{n+1} = \mu e^{-\frac{1}{n}\int p_1 dz} \text{ und } q_{n+1} = \mu e^{-\frac{1}{n}\int q_1 dz}$$

gesetzt werden, worin μ eine Function von z bedeutet. Wählt man nun in $(4^*.)$ $\lambda = \frac{1}{\mu}$, so wird

$$\frac{(\lambda q_{n+1})'}{\lambda q_{n+1}} = -\frac{1}{n} q_1 \text{ und } \frac{(\lambda p_{n+1})'}{\lambda p_{n+1}} = -\frac{1}{n} p_1;$$

ist also

$$\frac{(\lambda q_{n+1})^{(l)}}{\lambda q_{n+1}} = R_l(q_1, q_1', \ldots q_1^{(l-1)})^*), \text{ z. B. } \frac{(\lambda q_{n+1})''}{\lambda q_{n+1}} = -\frac{1}{n} q_1' + \frac{1}{n^2} q_1^2 \text{ u. s. f.,}$$

so ist auch

$$\frac{(\lambda p_{n+1})^{(l)}}{\lambda p_{n+1}} = R_l(p_1, p_1', \ldots p_1^{(l-1)});$$

---

*) Ueber die Form von R_l siehe z. B. ***Schlömilch***, Compendium der höheren Analysis, II (1874), p. 4—5. Vergl. auch ***Hoppe,*** Theorie der höheren Differentialquotienten (Leipzig, 1845).

daher folgt aus (4*.):

Die Resultanten der Elimination von q aus dem Gleichungssystem

$$(5.) \qquad q_k = \sum_{i=0}^{i=k} \binom{n-k+i}{i} p_{k-i} \frac{q^{(i)}}{q} \qquad \binom{k=1,2,\ldots,n,}{p_0=1}$$

können in die Form gebracht werden

$$(6.) \quad \sum_{l=0}^{l=k} \binom{n-k+l}{l} q_{k-l} R_l(q_1, q_1', \ldots q_1^{(l-1)}) = \sum_{l=0}^{l=k} \binom{n-k+l}{l} p_{k-l} R_l(p_1, p_1', \ldots p_1^{(l-1)}); \qquad \binom{k=2,3,\ldots,n,}{R_0=1, p_0=q_0=1}$$

die auf der linken bezw. rechten Seite dieser Gleichungen stehenden Ausdrücke bilden $n-1$ absolute Invarianten des Transformationssystems (5.).

Die drei ersten Invarianten lauten, ausgerechnet, in den q_i:

$$J_2 = q_2 - \frac{n-1}{2n} q_1^2 - \frac{n-1}{2} q_1',$$

$$J_3 = q_3 - \frac{n-2}{n} q_2 q_1 + \frac{(n-1)(n-2)}{3n^2} q_1^3 - \frac{(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3} q_1'',$$

$$J_4 = q_4 - \frac{n-3}{n} q_3 q_1 + \frac{(n-2)(n-3)}{2n^2} q_2 q_1^2 - \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{8n^3} q_1^4 - \frac{(n-2)(n-3)}{2n} q_2 q_1'$$
$$+ \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{8n} q_1'^2 + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{4n^2} q_1^2 q_1' - \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4} q_1'''.$$

Nennt man, wie üblich, die Summe von Index und Ableitungszahl eines Gliedes sein ***Gewicht*** und setzt das Gewicht eines Productes gleich der Summe der Gewichte seiner Factoren, so lehrt der Anblick der obigen Invarianten, dass dieselben ***isobar*** sind, und zwar ist $J_k (k = 2, 3, \ldots, n)$ vom Gewicht k.

Nach Beendigung dieser Arbeit bemerkte ich, dass das Gleichungssystem (5.) mit demjenigen identisch ist, welches bei der Transformation einer linearen homogenen Differentialgleichung

$$(A.) \qquad y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \cdots + p_n y = 0$$

durch die Substitution

$$y = q \cdot v$$

in eine ebensolche Differentialgleichung

$$(B.) \qquad v^{(n)} + q_1 v^{(n-1)} + \cdots + q_n v = 0$$

auftritt, sodass die Invarianten (6.) nichts anderes sind als die Coefficienten der „canonischen“ Differentialgleichung, welche aus (A.) durch die Transformation $y = e^{-\frac{1}{n}\int p_1 dz} \cdot w$ hervorgeht und in welcher der Coefficient von

$w^{(n-1)}$ verschwindet. Die Invarianz dieser Coefficienten bei allen Transformationen der Gruppe $y = q \cdot v$ habe ich aber bereits in meiner Arbeit „Anwendung der Theorie der Differentialinvarianten etc.“ (Dieses Journal Bd. 113, S. 2, Anmerkung) hervorgehoben (vergl. auch *Vukićević*, Diss., S. 9 und *Schlesinger*, Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen, Bd. II, S. 145—147). Trotzdem rechtfertigt die directe, rein rechnerische Herleitung dieser Invarianten und ihre allgemeine Aufstellung in praeciser Form wohl die Publication dieser Note. — Uebrigens ergeben sich auch die Invarianten (4.) leicht auf gruppentheoretischem Wege.

Ueber lineare Differentialgleichungen, welche mit ihrer Adjungirten zu derselben Art gehören.

(Von Herrn *Richard Fuchs* in Berlin.)

Die Differentialgleichungen, denen die Periodicitätsmoduln der *Abel*schen Integrale als Functionen eines Parameters genügen, haben die Eigenschaft, dass ihre sämmtlichen sogenannten associirten Differentialgleichungen reductibel sind*). Bei dem Bestreben, den Grund für diese Reductibilität aufzufinden, wurde ich dazu geführt, mich mit linearen Differentialgleichungen zu beschäftigen, welche mit ihrer Adjungirten zu derselben Art gehören, zu denen die Differentialgleichungen der Periodicitätsmoduln gehören. Die folgende Notiz enthält einige Ergebnisse, die sich bei diesen Untersuchungen ergaben**).

I.

Wir beschäftigen uns mit einer linearen homogenen Differentialgleichung gerader Ordnung

$$(A.) \qquad \frac{d^{2n}y}{dx^{2n}} + p_1 \frac{d^{2n-1}y}{dx^{2n-1}} + \cdots + p_{2n} y = 0$$

mit rationalen Coefficienten, die mit ihrer Adjungirten

$$(B.) \qquad \frac{d^{2n}z}{dx^{2n}} - \frac{d^{2n-1}(p_1 z)}{dx^{2n-1}} + \cdots + p_{2n} z = 0$$

zu derselben Art gehört.

Für jedes Integral y von (A.) giebt es dann also ein Integral z von von (B.) so, dass die Relation besteht

$$(C.) \qquad z = A_{00} y + A_{01} y' + \cdots + A_{02n-1} y^{(2n-1)},$$

wo $A_{00}, A_{01}, \ldots, A_{02n-1}$ rationale Functionen von x und $y^{(a)} = \frac{d^a y}{dx^a}$ bedeuten.

*) Vergl. hierzu meine in Bd. 119 S. 1 ff. dieses Journals abgedruckte Inauguraldissertation und die Abhandlung meines Vaters, Sitzungsberichte der Berliner Akademie, 1898 S. 477 ff.

**) Vergl. übrigens hierzu: Sitzungsberichte, 1899 S. 190.

Differentiirt man die Gleichung (C.) wiederholt nach x und ersetzt immer Ableitungen von y, deren Ordnung $2n$ oder grösser als $2n$ ist, mittelst (A.) durch die Ableitungen niedrigerer Ordnung, so erhält man

$$\text{(D.)} \qquad \frac{d^a z}{dx^a} = A_{a0} y + A_{a1} y' + \cdots + A_{a\,2n-1} y^{(2n-1)}, \qquad (a = 0, 1 \ldots)$$

wo wiederum $A_{a0}, \ldots, A_{a\,2n-1}$ rationale Functionen von x bedeuten.

Es sei nun $y_1, y_2, \ldots, y_{2n}$ ein Fundamentalsystem von (A.) und $z_1, z_2, \ldots, z_{2n}$ das entsprechende von (B.), sodass also

$$\text{(1.)} \qquad z_k = (-1)^k \frac{D(y_1, y_2, \ldots, y_{k-1}, y_{k+1}, \ldots, y_{2n})}{D(y_1, y_2, \ldots, y_{2n})},$$

wenn in bekannter Weise die sogenannte Determinante von λ Functionen $u_1, u_2, \ldots, u_\lambda$

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & \ldots & u_\lambda \\ u_1' & u_2' & \ldots & u_\lambda' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_1^{(\lambda-1)} & u_2^{(\lambda-1)} & \ldots & u_\lambda^{(\lambda-1)} \end{vmatrix}$$

mit $D(u_1, u_2, \ldots, u_\lambda)$ bezeichnet wird.

Zufolge der in (C.) gemachten Annahme wird es dann ein weiteres Fundamentalsystem von (A.) $\eta_1, \ldots, \eta_{2n}$ geben, so dass

$$\text{(2.)} \qquad z_i^{(a)} = A_{a0}\eta_i + A_{a1}\eta_i' + \cdots + A_{a\,2n-1}\eta_i^{(2n-1)}, \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, 2n \\ a = 1, 2, \ldots \end{pmatrix}$$

und es möge das System der η aus dem der y durch die Substitution (c_{ik}) hervorgehen, so dass also

$$\text{(3.)} \qquad \eta_i = \sum_{k=1}^{2n} c_{ik} y_k. \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2n).$$

II.

In seiner Abhandlung (dieses Journal Bd. 77, S. 245ff.) hat Herr *Frobenius* die folgende Formel bewiesen (a. a. O. S. 251)

$$\text{(1.)} \qquad \Delta \cdot D(z_{k+1}, z_{k+2}, \ldots, z_{2n}) = D(y_1, y_2, \ldots, y_k),$$

wenn kurz

$$\text{(2.)} \qquad \Delta = D(y_1, y_2, \ldots, y_{2n})$$

gesetzt wird. Für $k = n$ lautet diese Formel

$$\text{(3.)} \qquad D(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \Delta D(z_{n+1}, \ldots, z_{2n}).$$

Setzen wir in dieselbe die sich aus Gleichung (2.) voriger Nummer ergebenden Werthe von $z_{n+1}^{(a)}, \ldots, z_{2n}^{(a)}$ ein, so ergiebt sich:

$$(4.)\qquad D(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \Delta \sum_{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n} \begin{vmatrix} A_{0\lambda_1} & A_{0\lambda_2} & \ldots & A_{0\lambda_n} \\ A_{1\lambda_1} & A_{1\lambda_2} & \ldots & A_{1\lambda_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{n-1\lambda_1} & A_{n-1\lambda_2} & \ldots & A_{n-1\lambda_n} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \eta_{n+1}^{(\lambda_1)} & \ldots & \eta_{2n}^{(\lambda_1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \eta_{n+1}^{(\lambda_n)} & \ldots & \eta_{2n}^{(\lambda_n)} \end{vmatrix},$$

wo die Summe rechter Hand über alle Combinationen $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n \leqq 2n-1$ zu erstrecken ist.

Nun lässt sich aber*) die Determinante

$$\begin{vmatrix} \eta_{n+1}^{(\lambda_1)} & \ldots & \eta_{2n}^{(\lambda_1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \eta_{n+1}^{(\lambda_n)} & \ldots & \eta_{2n}^{(\lambda_n)} \end{vmatrix}$$

für jede Wahl von $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ durch

$$D(\eta_{n+1}, \ldots, \eta_{2n})$$

und seine Ableitungen bis zur $\nu = \binom{2n}{n}$-ten Ordnung linear und homogen mit rationalen Coefficienten ausdrücken.

Führt man diese Ausdrücke in Gl. (4.) ein, so kommt

$$(5.)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{\Delta} D(y_1, \ldots, y_n) \\ = P_0 D(\eta_{n+1}, \ldots, \eta_{2n}) + P_1 \dfrac{dD(\eta_{n+1}, \ldots, \eta_{2n})}{dx} + \cdots + P_{\nu-1} \dfrac{d^{\nu-1} D(\eta_{n+1}, \ldots, \eta_{2n})}{dx^{\nu-1}}. \end{cases}$$

III.

Die Determinanten $D(y_1, \ldots, y_n)$ genügen, wenn für $y_1, \ldots, y_n$ beliebige n Integrale der Gleichung (A.) gesetzt werden, einer linearen homogenen Differentialgleichung ν-ter Ordnung. (Vergl. die Abhandlung meines Vaters, Sitzungsberichte 1888, S. 1118 No. 3 Gleichung (H.)), die Herr *Schlesinger* (Handbuch u. s. w. Bd. II_1 S. 127) die n-te Associirte von (A.) genannt hat. Derselben Differentialgleichung genügt also auch $D(\eta_{k+1}, \ldots, \eta_{2n})$, und es muss daher nach (5.) voriger Nummer aus dem Satze des Herrn *Frobenius* (dieses Journal Bd. 76, S. 268**)) geschlossen werden, dass die m-te Associirte von (A.) reductibel ist†).

Es muss nur noch die Möglichkeit ins Auge gefasst werden, dass vielleicht die Gleichung (5.) voriger Nummer eine Trivialität ist. Dieser

*) Vergl. die Arbeit meines Vaters, Sitzungsberichte der Berliner Akademie 1888, S. 1119 No. 4 Gl. (3.) oder *L. Schlesinger*, Handbuch u. s. w. Bd. II_1 S. 127.

**) Vergl. auch *Hamburger*, dieses Journal Bd. 111, S. 121.

†) Der auf der linken Seite auftretende Factor $\frac{1}{\Delta}$ beeinflusst, wie leicht zu sehen, diesen Schluss nicht.

Fall kann eintreten, wenn 1) $D(\eta_{n+1}, \ldots, \eta_{2n})$ sich auf $D(y_1, \ldots, y_n)$ reducirt, und 2) $P_1 = P_2 = \cdots = P_{\nu-1} = 0$, $P_0 = \frac{1}{\Delta}$ ist. Wir wollen beweisen, dass schon die Annahme 1) unmöglich ist.

Es ist zu Folge (3.) No. 1

$$(1.) \qquad D(\eta_{n+1}, \ldots, \eta_{2n}) = \sum_{\lambda_1 \ldots \lambda_n} \begin{vmatrix} c_{n+1\lambda_1} & c_{n+1\lambda_2} & \cdots & c_{n+1\lambda_n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ c_{2n\lambda_1} & c_{2n\lambda_2} & \cdots & c_{2n\lambda_n} \end{vmatrix} D(y_{\lambda_1} \ldots y_{\lambda_n}),$$

wo rechts alle Combinationen $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n \leqq 2n$ zu nehmen sind.

Die Annahme 1) würde verlangen, dass

$$(2.) \qquad \begin{vmatrix} c_{n+1\lambda_1} & c_{n+1\lambda_2} & \cdots & c_{n+1\lambda_n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ c_{2n\lambda_1} & c_{2n\lambda_2} & \cdots & c_{2n\lambda_n} \end{vmatrix} = 0$$

für alle $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, ausser wenn $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \ldots, \lambda_n = n$. Aus der Matrix

$$\begin{Bmatrix} c_{n+11} & c_{n+12} & \cdots & c_{n+12n} \\ c_{n+21} & c_{n+22} & \cdots & c_{n+22n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ c_{2n1} & c_{2n2} & \cdots & c_{2n2n} \end{Bmatrix}$$

müssten daher alle Determinanten n-ter Ordnung verschwinden mit Ausnahme von

$$(3.) \qquad \begin{vmatrix} c_{n+11} & c_{n+12} & \cdots & c_{n+1n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ c_{2n1} & c_{2n2} & \cdots & c_{2nn} \end{vmatrix} = 1.$$

Bezeichnen wir die Unterdeterminante von $c_{\alpha\beta}$ in (3.) mit $C_{\alpha\beta}$, so ergiebt sich daraus

$$(4.) \qquad \left\{ \begin{array}{l} c_{n+1\alpha} C_{n+1,1} + c_{n+2\alpha} C_{n+2,1} + \cdots + c_{2n\alpha} C_{2n1} = 0 \\ c_{n+1\alpha} C_{n+12} + c_{n+2\alpha} C_{n+2,2} + \cdots + c_{2n\alpha} C_{2n2} = 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ c_{n+1\alpha} C_{n+1n} + c_{n+2\alpha} C_{n+2n} + \cdots + c_{2n\alpha} C_{2nn} = 0 \end{array} \right\} \qquad (\alpha = n+1, \ldots, 2n).$$

Da nun aber die Determinante $|C_{\alpha\beta}| = |c_{\alpha\beta}| = 1$ ist, so folgt aus diesem Gleichungssystem

$$(5.) \qquad c_{n+1\alpha} = c_{n+2\alpha} = \cdots = c_{2n\alpha} = 0 \quad (\alpha = n+1, \ldots, 2n).$$

Die Gleichung (5.) voriger Nummer gilt nun aber offenbar immer, wenn an Stelle von $y_1, y_2, \ldots, y_n$ irgend welche n verschiedene der Integrale $y_1, y_2, \ldots, y_{2n}$ gesetzt werden. Es müssen nur die Indices der η auf der rechten Seite allemale von denen der y auf der linken Seite verschieden

angenommen werden. Sollen alle diese Gleichungen Trivialitäten sein, so leitet man daraus jedes Mal ein den Gleichungen (5.) analoges System her

$$c_{\lambda_1 \alpha} = c_{\lambda_2 \alpha} = \cdots = c_{\lambda_n \alpha}, \qquad (\alpha = \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n).$$

Da hierin für $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ jede beliebige der Zahlen $1, 2, \ldots, 2n$ gewählt werden kann, so würde daraus allgemein $c_{\alpha\beta} = 0$ für beliebiges α, β folgen, was unmöglich ist. Der Fall, dass die Gleichung (5.) Nr. 2 für jede Wahl von $y_1, y_2, \ldots, y_n$ trivial sei, ist damit ausgeschlossen, und wir erhalten den folgenden Satz:

Wenn eine lineare homogene Differentialgleichung $2n$-ter Ordnung mit ihrer adjungirten zu derselben Art gehört, so ist ihre n-te Associirte reductibel.

Die Differentialgleichungen, deren allgemeines Integral eine lineare gebrochene Function der willkürlichen Constanten ist.

(Von Herrn *Georg Wallenberg* in Berlin.)

Die *Riccati*sche Differentialgleichung zeichnet sich dadurch aus, dass ihr allgemeines Integral eine lineare gebrochene Function der willkürlichen Constanten ist. Geht man von dem Integral

$$(1.) \qquad y = \frac{\gamma_1 \eta_1 + \gamma_2 \eta_2}{\gamma_1 \zeta_1 + \gamma_2 \zeta_2}$$

aus, worin $\frac{\gamma_1}{\gamma_2}$ die willkürliche Constante ist und $\eta_1, \eta_2, \zeta_1, \zeta_2$ Functionen der unabhängigen Veränderlichen z mit der keine Einschränkung enthaltenden Bedingung $\begin{vmatrix} \eta_1 \zeta_1 \\ \eta_2 \zeta_2 \end{vmatrix} = 1$ bedeuten, so erhält man durch Heraufmultipliciren mit dem Nenner und durch Differentiation:

$$\gamma_1(\zeta_1 y - \eta_1) + \gamma_2(\zeta_2 y - \eta_2) = 0,$$
$$\gamma_1(\zeta_1 y' + \zeta_1' y - \eta_1') + \gamma_2(\zeta_2 y' + \zeta_2' y - \eta_2') = 0,$$

und hieraus die Differentialgleichung:

$$\begin{vmatrix} \zeta_1 y - \eta_1, & \zeta_2 y - \eta_2 \\ \zeta_1 y' + \zeta_1' y - \eta_1', & \zeta_2 y' + \zeta_2' y - \eta_2' \end{vmatrix} = 0$$

oder:

$$(2.) \qquad y' = p_0 + 2p_1 y + p_2 y^2;$$

darin ist:

$$p_0 = \begin{vmatrix} \eta_1 \eta_1' \\ \eta_2 \eta_2' \end{vmatrix}, \qquad p_1 = \begin{vmatrix} \eta_1' \zeta_1 \\ \eta_2' \zeta_2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \eta_1 \zeta_1' \\ \eta_2 \zeta_2' \end{vmatrix}, \qquad p_2 = \begin{vmatrix} \zeta_1 \zeta_1' \\ \zeta_2 \zeta_2' \end{vmatrix};$$

diese drei Coefficienten sind von einander unabhängig, sodass (2.) in der That die allgemeinste *Riccati*sche Differentialgleichung darstellt. — Anderer-

seits hat das allgemeine Integral einer *Riccati*schen Differentialgleichung bekanntlich die Form:

$$y = \frac{1}{q}\frac{\gamma_1 y_1' + \gamma_2 y_2'}{\gamma_1 y_1 + \gamma_2 y_2}, \tag{3.}$$

worin q, y_1, y_2 Functionen von z bedeuten. Das Integral (1.) muss sich daher stets auf die Form (3.) bringen lassen; die Möglichkeit dieser Transformation geht auch daraus a priori hervor, dass sowohl $\eta_1, \eta_2, \zeta_1, \zeta_2$ mit der Bedingung $\begin{vmatrix} \eta_1 \zeta_1 \\ \eta_2 \zeta_2 \end{vmatrix} = 1$ als auch q, y_1, y_2 drei von einander unabhängige Grössen repräsentiren. Durch Vergleichung von (1.) und (3.) erhält man:

$$y_1' = \lambda q \eta_1, \qquad y_1 = \lambda \zeta_1;$$
$$y_2' = \lambda q \eta_2, \qquad y_2 = \lambda \zeta_2.$$

Andererseits ergiebt sich durch Differentiation:

$$y_1' = \lambda \zeta_1' + \lambda' \zeta_1,$$
$$y_2' = \lambda \zeta_2' + \lambda' \zeta_2,$$

also:

$$\frac{y_1'}{y_2'} = \frac{\zeta_1' + \frac{\lambda'}{\lambda}\zeta_1}{\zeta_2' + \frac{\lambda'}{\lambda}\zeta_2} = \frac{\eta_1}{\eta_2},$$

und daraus:

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = -\begin{vmatrix} \eta_1 \zeta_1' \\ \eta_2 \zeta_2' \end{vmatrix} = p_1;$$

folglich, wenn die Integrationsconstante gleich 1 gewählt wird:

$$\lambda = e^{\int p_1 dz}.$$

Die drei Grössen y_1, y_2, q drücken sich daher folgendermassen durch die $\eta_i, \zeta_i (i = 1, 2)$ aus:

$$y_1 = e^{\int p_1 dz} \zeta_1, \qquad y_2 = e^{\int p_1 dz} \zeta_2,$$

$$q = \frac{y_1'}{\lambda \eta_1} = \frac{y_2'}{\lambda \eta_2} = \frac{\zeta_1' + p_1 \zeta_1}{\eta_1} = \frac{\zeta_2' + p_1 \zeta_2}{\eta_2} = -p_2;$$

darin ist zur Abkürzung

$$-\begin{vmatrix} \eta_1 \zeta_1' \\ \eta_2 \zeta_2' \end{vmatrix} = p_1, \qquad \begin{vmatrix} \zeta_1 \zeta_1' \\ \zeta_2 \zeta_2' \end{vmatrix} = p_2$$

gesetzt worden.

Wir haben diese einfachen Verhältnisse absichtlich etwas ausführlicher behandelt, weil sie uns als Richtschnur für die Untersuchung der entsprechenden Differentialgleichungen höherer Ordnung dienen sollen. Es handelt sich also zunächst um die Aufstellung der Differentialgleichung zweiter Ordnung, deren allgemeines Integral die Form hat:

$$\text{(I.)} \qquad y = \frac{\gamma_1\eta_1 + \gamma_2\eta_2 + \gamma_3\eta_3}{\gamma_1\zeta_1 + \gamma_2\zeta_2 + \gamma_3\zeta_3}.$$ *)

Durch Heraufmultipliciren mit dem Nenner und zweimalige Differentiation ergeben sich die drei Gleichungen:

$$\gamma_1(\zeta_1 y - \eta_1) + \gamma_2(\zeta_2 y - \eta_2) + \gamma_3(\zeta_3 y - \eta_3) = 0,$$
$$\gamma_1(\zeta_1 y' + \zeta_1' y - \eta_1') + \gamma_2(\zeta_2 y' + \zeta_2' y - \eta_2') + \gamma_3(\zeta_3 y' + \zeta_3' y - \eta_3') = 0,$$
$$\gamma_1(\zeta_1 y'' + 2\zeta_1' y' + \zeta_1'' y - \eta_1'') + \gamma_2(\zeta_2 y'' + 2\zeta_2' y' + \zeta_2'' y - \eta_2'') + \gamma_3(\zeta_3 y'' + 2\zeta_3' y' + \zeta_3'' y - \eta_3'') = 0,$$

und daraus die gesuchte Differentialgleichung

$$\begin{vmatrix} \zeta_1 y - \eta_1, & \zeta_2 y - \eta_2, & \zeta_3 y - \eta \\ \zeta_1 y' + \zeta_1' y - \eta_1', & \zeta_2 y' + \zeta_2' y - \eta_2', & \zeta_3 y' + \zeta_3' y - \eta_3' \\ \zeta_1 y'' + 2\zeta_1' y' + \zeta_1'' y - \eta_1'', & \zeta_2 y'' + 2\zeta_2' y' + \zeta_2'' y - \eta_2'', & \zeta_3 y'' + 2\zeta_3' y' + \zeta_3'' y - \eta_3'' \end{vmatrix} = 0,$$

oder ausgerechnet:

$$\text{(II.)} \quad (A_0 + A_1 y)y'' + (B_0 + B_1 y)y' + C_0 y'^2 + D_0 + D_1 y + D_2 y^2 + D_3 y^3 = 0.$$

Darin ist:

$$A_0 = \begin{vmatrix} \eta_1 & \eta_1' & \zeta_1 \\ \eta_2 & \eta_2' & \zeta_2 \\ \eta_3 & \eta_3' & \zeta_3 \end{vmatrix}, \qquad A_1 = \begin{vmatrix} \zeta_1 & \zeta_1' & \eta_1 \\ \zeta_2 & \zeta_2' & \eta_2 \\ \zeta_3 & \zeta_3' & \eta_3 \end{vmatrix}, \quad C_0 = -2A_1,$$

$$D_0 = -\begin{vmatrix} \eta_1 & \eta_1' & \eta_1'' \\ \eta_2 & \eta_2' & \eta_2'' \\ \eta_3 & \eta_3' & \eta_3'' \end{vmatrix}, \qquad D_3 = \begin{vmatrix} \zeta_1 & \zeta_1' & \zeta_1'' \\ \zeta_2 & \zeta_2' & \zeta_2'' \\ \zeta_3 & \zeta_3' & \zeta_3'' \end{vmatrix},$$

$$B_0 = 2\begin{vmatrix} \eta_1 & \eta_1' & \zeta_1' \\ \eta_2 & \eta_2' & \zeta_2' \\ \eta_3 & \eta_3' & \zeta_3' \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \eta_1 & \eta_1'' & \zeta_1 \\ \eta_2 & \eta_2'' & \zeta_2 \\ \eta_3 & \eta_3'' & \zeta_3 \end{vmatrix}, \qquad B_1 = 2\begin{vmatrix} \zeta_1 & \zeta_1' & \eta_1' \\ \zeta_2 & \zeta_2' & \eta_2' \\ \zeta_3 & \zeta_3' & \eta_3' \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \zeta_1 & \zeta_1'' & \eta_1 \\ \zeta_2 & \zeta_2'' & \eta_2 \\ \zeta_3 & \zeta_3'' & \eta_3 \end{vmatrix},$$

*) Diese Differentialgleichung ist von Herrn ***Vessiot*** (Toulouse, Ann. IX. F.), dessen Arbeit mir leider erst nach Beendigung der meinigen durch die Güte des Herrn ***Lampe*** zugänglich gemacht wurde, in etwas anderer Weise behandelt worden.

$$D_1 = \begin{vmatrix} \eta_1 & \eta_1' & \zeta_1'' \\ \eta_2 & \eta_2' & \zeta_2'' \\ \eta_3 & \eta_3' & \zeta_3'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \eta_1' & \eta_1'' & \zeta_1 \\ \eta_2' & \eta_2'' & \zeta_2 \\ \eta_3' & \eta_3'' & \zeta_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \eta_1 & \eta_1'' & \zeta_1' \\ \eta_2 & \eta_2'' & \zeta_2' \\ \eta_3 & \eta_3'' & \zeta_3' \end{vmatrix},$$

$$D_2 = -\begin{vmatrix} \zeta_1 & \zeta_1' & \eta_1'' \\ \zeta_2 & \zeta_2' & \eta_2'' \\ \zeta_3 & \zeta_3' & \eta_3'' \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \zeta_1' & \zeta_1'' & \eta_1 \\ \zeta_2' & \zeta_2'' & \eta_2 \\ \zeta_3' & \zeta_3'' & \eta_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \zeta_1 & \zeta_1'' & \eta_1' \\ \zeta_2 & \zeta_2'' & \eta_2' \\ \zeta_3 & \zeta_3'' & \eta_3' \end{vmatrix}.$$

Die Verhältnisse dieser 9 Coefficienten repräsentiren 8 Grössen, die Verhältnisse der in ihren Determinantenausdrücken auftretenden Functionen η_i, $\zeta_i (i = 1, 2, 3)$ 5 Grössen; es müssen also zwischen den Coefficienten der Differentialgleichung (II.) *drei Bedingungsgleichungen* existiren. Die eine ergab sich sofort; sie lautet $C_0 = -2A_1$. Man erhält sie auch durch folgende Betrachtung: Die Differentialgleichung (II.) muss ihre Form bewahren, wenn man sie durch $y = \frac{1}{v}$ transformirt, da v dieselbe Gestalt wie y besitzt. Die transformirte Differentialgleichung lautet aber:

$$v(A_0 v + A_1)v'' + v(B_0 v + B_1)v' - (2A_1 + C_0 + 2A_0 v)v'^2 - v(D_0 v^3 + D_1 v^2 + D_2 v + D_3) = 0.$$

Damit sie die Form (II.) besitze, muss in der That

$$2A_1 + C_0 = 0$$

sein; nach Division durch v wird sie dann:

$$(A_1 + A_0 v)v'' + (B_1 + B_0 v)v' - 2A_0 v'^2 - D_3 - D_2 v - D_1 v^2 - D_0 v^3 = 0.$$

Man sieht zugleich, dass A_1 aus A_0, B_1 aus B_0, $-D_3$ aus D_0 und $-D_2$ aus D_1 dadurch hervorgehen muss, dass man die η_i mit den ζ_i vertauscht, und umgekehrt; der Anblick der Determinantenausdrücke bestätigt dies.

Die beiden übrigen Bedingungsgleichungen auf directem, rein calculatorischem Wege zu finden, würde einen abschreckend grossen Aufwand an Rechnungen erfordern; wir schlagen daher zu ihrer Auffindung einen anderen Weg ein, der verhältnissmässig schnell zum Ziele führt. — Wir stellen die Frage: „Wann lässt sich

$$\text{(I.)} \qquad y = \frac{\gamma_1 \eta_1 + \gamma_2 \eta_2 + \gamma_3 \eta_3}{\gamma_1 \zeta_1 + \gamma_2 \zeta_2 + \gamma_3 \zeta_3}$$

in einen Ausdruck von der Form

$$\text{(III.)} \qquad y = \frac{1}{q} \frac{\gamma_1 y_1' + \gamma_2 y_2' + \gamma_3 y_3'}{\gamma_1 y_1 + \gamma_2 y_2 + \gamma_3 y_3}$$

transformiren?“ — Da die Verhältnisse der $\eta_i, \zeta_i (i = 1, 2, 3)$ fünf von einander unabhängige Grössen, dagegen y_1, y_2, y_3, q vier solche Grössen repräsentiren, so müssen, wenn dies der Fall sein soll, die η_i, ζ_i, *eine* Bedingungsgleichung erfüllen. In der That ergiebt sich durch Vergleichung der beiden Ausdrücke für y:

$$\begin{aligned} y_1' &= \lambda q \eta_1, & y_1 &= \lambda \zeta_1, \\ y_2' &= \lambda q \eta_2, & y_2 &= \lambda \zeta_2, \\ y_3' &= \lambda q \eta_3, & y_3 &= \lambda \zeta_3. \end{aligned}$$

Andererseits erhält man durch Differentiation:

$$\begin{aligned} y_1' &= \lambda \zeta_1' + \lambda' \zeta_1, \\ y_2' &= \lambda \zeta_2' + \lambda' \zeta_2, \\ y_3' &= \lambda \zeta_3' + \lambda' \zeta_3; \end{aligned}$$

also:

$$\frac{y_1'}{y_2'} = \frac{\zeta_1' + \frac{\lambda'}{\lambda}\zeta_1}{\zeta_2' + \frac{\lambda'}{\lambda}\zeta_2} = \frac{\eta_1}{\eta_2},$$

$$\frac{y_1'}{y_3'} = \frac{\zeta_1' + \frac{\lambda'}{\lambda}\zeta_1}{\zeta_3' + \frac{\lambda'}{\lambda}\zeta_3} = \frac{\eta_1}{\eta_3}.$$

Daraus folgt:

$$-\frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{\begin{vmatrix} \eta_1 \zeta_1' \\ \eta_2 \zeta_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \eta_1 \zeta_1 \\ \eta_2 \zeta_2 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} \eta_1 \zeta_1' \\ \eta_3 \zeta_3' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \eta_1 \zeta_1 \\ \eta_3 \zeta_3 \end{vmatrix}}.$$

Die gesuchte Bedingungsgleichung lautet also:

$$\begin{vmatrix} \eta_1 \zeta_1 \\ \eta_2 \zeta_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \eta_1 \zeta_1' \\ \eta_3 \zeta_3' \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \eta_1 \zeta_1 \\ \eta_3 \zeta_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \eta_1 \zeta_1' \\ \eta_2 \zeta_2' \end{vmatrix} = 0.$$

Nun ist aber:*)

$$\begin{vmatrix} \eta_1 \zeta_2 - \zeta_1 \eta_2, & \eta_1 \zeta_2' - \zeta_1' \eta_2 \\ \eta_1 \zeta_3 - \zeta_1 \eta_3, & \eta_1 \zeta_3' - \zeta_1' \eta_3 \end{vmatrix} = \eta_1 \begin{vmatrix} \eta_1 & \zeta_1 & \zeta_1' \\ \eta_2 & \zeta_2 & \zeta_2' \\ \eta_3 & \zeta_3 & \zeta_3' \end{vmatrix}.$$

Hätten wir in den vorhergehenden Gleichungen η_2 bezw. η_3 statt η_1 bevorzugt, so wäre η_2 bezw. η_3 als Factor vor die letzte Determinante ge-

*) Vergl. ***Baltzer***, Theorie und Anwendung der Determinanten, 1881, p. 16—20, und p. 65.

treten; da η_1, η_2, η_3 nicht sämmtlich verschwinden dürfen, so nimmt unsere Bedingungsgleichung die elegante Form an:

$$(4.) \qquad A_1 = \begin{vmatrix} \eta_1 & \zeta_1 & \zeta_1' \\ \eta_2 & \zeta_2 & \zeta_2' \\ \eta_3 & \zeta_3 & \zeta_3' \end{vmatrix} = 0.$$

Es leuchtet ein, dass diese Bedingung auch hinreichend ist; dieselbe bleibt bestehen, wenn die η_i oder die ζ_i mit einem gemeinsamen Factor multiplicirt werden.

Es mögen nun, um sogleich den allgemeinsten Fall zu behandeln, die η_i, ζ_i in (I.) die Bedingung (4.) *nicht* erfüllen, also $A_1 \neq 0$ sein, so setzen wir:

$$y = \frac{1}{v} - \delta,$$

also

$$v = \frac{1}{y+\delta};$$

dann wird

$$v = \frac{\gamma_1\zeta_1 + \gamma_2\zeta_2 + \gamma_3\zeta_3}{\gamma_1(\eta_1 + \delta\zeta_1) + \gamma_2(\eta_2 + \delta\zeta_2) + \gamma_3(\eta_3 + \delta\zeta_3)},$$

und es kann nun δ so bestimmt werden, dass die neuen Functionen die Bedingungsgleichung (4.) erfüllen; dieselbe lautet nämlich nach gehöriger Reduction:

$$\begin{vmatrix} \zeta_1 & \eta_1 & \eta_1' + \delta\zeta_1' \\ \zeta_2 & \eta_2 & \eta_2' + \delta\zeta_2' \\ \zeta_3 & \eta_3 & \eta_3' + \delta\zeta_3' \end{vmatrix} = 0,$$

und daraus ergiebt sich

$$\delta = \frac{\begin{vmatrix} \eta_1 & \eta_1' & \zeta_1 \\ \eta_2 & \eta_2' & \zeta_2 \\ \eta_3 & \eta_3' & \zeta_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \zeta_1 & \zeta_1' & \eta_1 \\ \zeta_2 & \zeta_2' & \eta_2 \\ \zeta_3 & \zeta_3' & \eta_3 \end{vmatrix}} = \frac{A_0}{A_1}.$$

Ist δ demgemäss bestimmt worden, so lässt sich nunmehr v in die Form (III.) transformiren. Daher genügt v, wie ich in einer in diesem Journal er-

schienenen Arbeit*) gezeigt habe, einer Differentialgleichung von der Gestalt

$$(5.) \qquad v''+(p_0+3p_1v)v'+p_2+p_3v+(p_0p_1+p_1')v^2+p_1^2v^3 = 0,$$

und zwar ist darin $p_1 = q$; ich habe daselbst diese Gleichung eine „*Riccati*sche *Differentialgleichung zweiter Ordnung*" genannt, weil sie sich ihrerseits durch eine logarithmische Substitution in eine lineare homogene Differentialgleichung dritter Ordnung transformiren lässt. *Die Differentialgleichung* (II.) *lässt sich also durch die Substitution* $y = \frac{1}{v} - \frac{A_0}{A_1}$ *in eine Riccatische Differentialgleichung zweiter Ordnung transformiren.*

Genügen die η_i, ζ_i der Bedingungsgleichung (4.), d. h. ist $A_1 = 0$, so ist auch $C_0 = 0$, und es muss bereits die durch A_0 dividirte Differentialgleichung (II.) die Gestalt (5.) haben, woraus sich die beiden restirenden Bedingungsgleichungen zwischen ihren Coefficienten ergeben. Ist aber $A_1 \neq 0$, so muss n. O. die durch A_1 dividirte Differentialgleichung (II.) durch die Substitution $v = \frac{1}{y+\delta}$ aus (5.) hervorgehen; sie besitzt daher die Gestalt:

$$(6.) \quad \begin{cases} (y+\delta)y''-2y'^2+y'(3p_1+p_0\delta-4\delta'+p_0y)+\delta\delta''-2\delta'^2 \\ \qquad +(3p_1+p_0\delta)\delta'-p_2\delta^3-p_3\delta^2-(p_0p_1+p_1')\delta-p_1^2 \\ +(\delta''+p_0\delta'-3p_2\delta^2-2p_3\delta-p_0p_1-p_1')y-(3p_2\delta+p_3)y^2-p_2y^3 = 0. \end{cases}$$

Dividirt man die Differentialgleichung (II.) durch A_1 und benennt die Determinantenquotienten mit den entsprechenden kleinen lateinischen Buchstaben, so lautet sie mit Berücksichtigung der Relation $C_0 = -2A_1$:

$$(7.) \qquad (y+a_0)y''-2y'^2+(b_0+b_1y)y'+d_0+d_1y+d_2y^2+d_3y^3 = 0.$$

Durch Vergleichung von (7.) mit (6.) ergeben sich dann die beiden gesuchten Bedingungsgleichungen:

$$(8.) \quad \begin{cases} 9d_0 = -3a_0a_0''+2a_0'^2+a_0'b_0-3a_0b_0'-a_0b_0b_1-a_0a_0'b_1+2a_0^2b_1^2 \\ \qquad +3a_0^2b_1'+9a_0^2d_2-18a_0^3d_3-b_0^2, \\ 3d_1 = -a_0''+a_0b_1'+a_0b_1^2+6a_0d_2-9a_0^2d_3-b_0'-b_0b_1. \end{cases}$$

Dieselben stellen gleichzeitig bemerkenswerthe Determinantenrelationen dar; sie sind in der That so complicirt, dass sie sich auf directem Wege wohl nur mit einem übergrossen Aufwand an Rechnungen hätten finden lassen.

Zum Schluss möge noch kurz angegeben werden, wie die oben aufgeworfene Frage sich *allgemein* erledigt: Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass

$$y = \frac{\gamma_1\eta_1+\gamma_2\eta_2+\cdots+\gamma_n\eta_n}{\gamma_1\zeta_1+\gamma_2\zeta_2+\cdots+\gamma_n\zeta_n} \quad (n \geqq 3)$$

*) Dieses Heft S. 198; daselbst muss v^3 statt z^3 stehen.

sich in die Form

$$y = \frac{1}{q}\frac{\gamma_1 y_1' + \gamma_2 y_2' + \cdots + \gamma_n y_n'}{\gamma_1 y_1 + \gamma_2 y_2 + \cdots + \gamma_n y_n}$$

bringen lasse, ist das Bestehen der Gleichungen:

$$\begin{vmatrix} \eta_1 & \zeta_1 & \zeta_1' \\ \eta_2 & \zeta_2 & \zeta_2' \\ \eta_k & \zeta_k & \zeta_k' \end{vmatrix} = 0 \qquad (k = 3, 4, \ldots n),$$

aus denen übrigens das Bestehen *aller* Gleichungen

$$\begin{vmatrix} \eta_r & \zeta_r & \zeta_r' \\ \eta_s & \zeta_s & \zeta_s' \\ \eta_t & \zeta_t & \zeta_t' \end{vmatrix} = 0 \qquad (r, s, t = 1, 2, 3 \ldots n)$$

folgt.

Ist $n = 3$, so lässt sich, wie wir gesehen haben, *stets* eine Grösse δ so bestimmen, dass $v = \frac{1}{y+\delta}$ die oben angegebene Eigenschaft besitzt. Ist $n > 3$, so ist die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass δ sich so bestimmen lasse, das Bestehen der Gleichungen*):

$$\begin{vmatrix} \eta_1 & \zeta_1 & \eta_1' & \zeta_1' \\ \eta_2 & \zeta_2 & \eta_2' & \zeta_2' \\ \eta_3 & \zeta_3 & \eta_3' & \zeta_3' \\ \eta_k & \zeta_k & \eta_k' & \zeta_k' \end{vmatrix} = 0 \qquad (k = 4, 5, \ldots n).$$

Es sei noch bemerkt, dass es z. B. für $n = 4$ *ohne* Bestehen der letzten Bedingungsgleichung nicht etwa möglich ist, durch die *allgemeinere* lineargebrochene Substitution

$$v = \frac{\alpha y + \beta}{\gamma y + \delta}$$

die oben angegebene Eigenschaft zu erzielen, dass dagegen, *wenn* diese Bedingungsgleichung besteht, die Substitution

$$v = \frac{1}{y+\delta}$$

zu diesem Zwecke ausreicht. — Eine genauere Untersuchung der entsprechenden Differentialgleichungen behalte ich mir vor.

*) Wegen der nöthigen Umrechnungen siehe *Baltzer* a. a. O. S. 64.

Ueber die einer linearen Differentialgleichung n-ter Ordnung adjungirten und associirten Differentialgleichungen n-ter Ordnung.

(Von Herrn *E. Grünfeld* in Nikolsburg.)

1.

Ist

$$(1.)\qquad P(y) = \frac{d^n y}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + p_n y = 0$$

eine homogene lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung, deren Coefficienten $p_1, \ldots, p_n$ Functionen von x, und

$$D(y_1, y_2, \ldots, y_n) = D_n$$

die Determinante eines Fundamentalsystems von Lösungen $y_1, \ldots, y_n$ derselben, so genügen bekanntlich die n Grössen

$$(2.)\qquad u_{(k)_1} = \frac{1}{D_n}\frac{\partial D_n}{\partial y_1^{(k-1)}}, \qquad u_{(k)_2} = \frac{1}{D_n}\frac{\partial D_n}{\partial y_1^{(k-1)}}, \quad \ldots, \quad u_{(k)_n} = \frac{1}{D_n}\frac{\partial D_n}{\partial y_n^{(k-1)}}$$

für jedes $k = 1, 2, \ldots, n$ gleichfalls einer solchen Differentialgleichung:

$$(3.)\qquad Q_k(u_k) = \frac{d^n u_{(k)}}{dx^n} + q_{1k}\frac{d^{n-1} u_{(k)}}{dx^{n-1}} + \cdots + q_{nk} u_{(k)} = 0,$$

deren Coefficienten $q_{1k}, \ldots, q_{nk}$ sich rational aus den p_i und deren Ableitungen zusammensetzen, und welche die „Adjungirte der k-ten Zeile“ genannt wird (d. J. Bd. 115, S. 329ff.).

Da, von einem constanten Factor abgesehen,

$$(4.)\qquad D_n = e^{-\int p_1 dx}$$

ist, so können die Ausdrücke (2.) in der Form geschrieben werden:

$$(5.)\qquad u_{(k)_1} = \eta_{(k)_1} \cdot e^{\int p_1 dx}, \quad \ldots, \quad u_{(k)_n} = \eta_{(k)_n} \cdot e^{\int p_1 dx}$$

wenn gesetzt wird:

$$\frac{\partial D_n}{\partial y_1^{(k-1)}} = \eta_{(k)_1}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial D_n}{\partial y_n^{(k-1)}} = \eta_{(k)_n},$$

so dass also $\eta_{(k)_1}, \ldots, \eta_{(k)_n}$ die Adjuncten der Elemente der k-ten Zeile in $D(y_1, \ldots, y_n)$ bedeuten. Wenn nun gemäss (5.) in der Gleichung (3.) die Substitution gemacht wird:

$$(5'.) \qquad u_{(k)} = \eta_{(k)} \cdot e^{\int p_1 dx}$$

so verwandelt sich dieselbe in

$$(6.) \qquad Q_k(u_{(k)}) = e^{\int p_1 dx} \cdot R_{(k)}(\eta_{(k)}) = 0$$

wo

$$R_k(\eta_{(k)}) = \frac{d^n \eta_{(k)}}{dx^n} + r_{1k} \frac{d^{n-1} \eta_{(k)}}{dx^{n-1}} + \cdots + r_{nk} \eta_{(k)}$$

ein homogener linearer Differentialausdruck n-ter Ordnung ist, dessen Coefficienten ganze rationale Functionen der $q_{1k}, \ldots, q_{nk}$ und deren Ableitungen sind. Wenn also die Determinante D_n nach den Elementen der k-ten Zeile entwickelt wird, so genügen die durch dieselbe dividirten Adjuncten dieser Elemente, d. i., die Grössen (2.), der Differentialgleichung (3.), diese Adjuncten selbst: $\eta_{(k)_1}, \eta_{(k)_2}, \ldots, \eta_{(k)_n}$ aber genügen der Differentialgleichung:

$$(7.) \qquad R_k(\eta_{(k)}) = 0,$$

deren Coefficienten gleichfalls rational aus den p_i und deren Ableitungen zusammengesetzt sind. Diese letztere Differentialgleichung mag als die „Associirte der k-ten Zeile“ bezeichnet werden. Zwischen derselben und der Adjungirten der k-ten Zeile findet gemäss (6.) die Beziehung statt:

$$(8.) \qquad R_k(\eta_{(k)}) = D(y_1, y_2, \ldots, y_n) \cdot Q_k(u_{(k)}) \qquad (k = 1, \ldots, n).$$

Was diese neuen Veränderlichen $\eta_{(k)}$ betrifft, so sind dieselben nur eine besondere Art derjenigen, welche, wie Herr *Fuchs* gezeigt hat*), sich aus den Partialdeterminanten der verschiedenen Ordnungen in D_n bilden lassen und die homogenen linearen Differentialgleichungen genügen, deren Coefficienten rational aus den p_i und deren Ableitungen zusammensetzbar sind.

Bezeichnet $z = u_{(n)}$ die Adjungirte der n-ten Zeile, so ist die Determinante der Adjungirten aller n Zeilen (d. J. Bd. 117, S. 288):

$$(9.) \qquad |u_{(k)_i}| = D(z_1, z_2, \ldots, z_n) \qquad (k, i = 1, 2, \ldots, n)$$

oder auch:

$$(10.) \qquad |u_{(k)_i}| = D(y_1, y_2, \ldots, y_n)^{-1},$$

da (*Frobenius* d. J. Bd. 77):

$$(11.) \qquad D(y_1, \ldots, y_n) \cdot D(z_1, \ldots, z_n) = 1$$

*) Sitzungsberichte der Berliner Akademie, 1888, II, S. 1115ff. Vergl. auch *Forsyth,* Philosophical Transactions, vol. 179. p. 424 sqq.

ist. Zufolge der Substitution (5.) ist aber

$$|u_{(k)_i}| = |\eta_{(k)_i}| \cdot (e^{\int p_1 dx})^n = |\eta_{(k)_i}| \cdot D(y_1, \ldots, y_n)^{-n}$$

woraus mit Rücksicht auf (10.) folgt:

$$(12.) \qquad |\eta_{(k)_i}| = D(y_1, y_2, \ldots, y_n)^{n-1} \qquad (k, i = 1, 2, \ldots, n),$$

sodass also die Determinante der Associirten aller n Zeilen gleich der $(n-1)$-ten Potenz von D_n ist.

Der Kürze wegen werde $\eta_{(n)} = \zeta$, also $\eta_{(n)_i} = \zeta_i$ gesetzt. Wird in Gleichung (11.) gemäss (5.) $z_i = \zeta_i \cdot e^{\int p_1 dx}$ $(i = 1, \ldots, n)$ substituirt, so verwandelt sich dieselbe in:

$$D(y_1, \ldots, y_n) \cdot D(\zeta_1 e^{\int p_1 dx}, \ldots, \zeta_n e^{\int p_1 dx}) = 1$$

oder, weil, wenn $y, y_1, \ldots, y_n$ beliebige Variabeln bedeuten,

$$(13.) \qquad D(y y_1, \ldots, y y_n) = y^n \cdot D(y_1, \ldots, y_n)$$

ist (*Frobenius*, d. J. Bd. 77), in:

$$D(y_1, \ldots, y_n) \cdot D(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \cdot (e^{\int p_1 dx})^n = 1$$

oder zufolge (4.) in

$$(14.) \qquad D(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n) = D(y_1, y_2, \ldots, y_n)^{n-1}.$$

Gemäss (12.) ist daher:

$$|\eta_{(k)_i}| = D(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n) \qquad (k, i = 1, 2, \ldots, n),$$

welch letztere Beziehung derjenigen in (9.) analog ist und aus dieser durch die Substitution (5.) auch unmittelbar hervorgeht.

Es gilt ferner die Beziehung (d. J. Bd. 115, S. 332):

$$(15.) \qquad D(u_{(1)_1}, u_{(1)_2}, \ldots, u_{(1)_n}) = \frac{D(y_1', y_2', \ldots, y_n')^{n-1}}{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)^n};$$

durch Anwendung der Substitution (5.) und Berücksichtigung der Formel (13.) geht dieselbe über in:

$$(16.) \qquad D(\eta_{(1)_1}, \eta_{(1)_2}, \ldots, \eta_{(1)_n}) = D(y_1', y_2', \ldots, y_n')^{n-1}.$$

Die Beziehungen (14.) und (16.) lassen sich verallgemeinern:

Denn es ist (*Frobenius*, d. J. Bd. 77):

$$D(y_1, \ldots, y_n) \cdot D(z_{\varkappa+1}, z_{\varkappa+2}, \ldots, z_n) = D(y_1, \ldots, y_\varkappa) \qquad (\varkappa = 0, 1, \ldots, n-1)$$

woraus mittelst der Substitution (5.) sich ergiebt:

$$D(\zeta_{\varkappa+1}, \zeta_{\varkappa+2}, \ldots, \zeta_n) = D(y_1, y_2, \ldots, y_\varkappa) \cdot D(y_1, y_2, \ldots, y_n)^{n-\varkappa-1},$$

welche Beziehung gleichfalls für $\varkappa = 0, 1, \ldots, n-1$ gilt, und aus der für $\varkappa = 0$ die Beziehung (14.) hervorgeht. Ferner ist (d. J. Bd. 115, S. 334):

$$D(u_{(1)_1}, u_{(1)_2}, \ldots, u_{(1)_\varkappa}) = \frac{D(y_1', \ldots, y_n')^{\varkappa-1}}{D(y_1, \ldots, y_n)^{\varkappa}} \cdot D(y_{\varkappa+1}', y_{\varkappa+2}', \ldots, y_n') \qquad (\varkappa = 1, \ldots, n)$$

Diese Beziehung verwandelt sich mittelst der Substitution (5.) in die folgende:

(17.) $$D(\eta_{(1)_1}, \eta_{(1)_2}, \ldots, \eta_{(1)_\varkappa}) = D(y_1', y_2', \ldots, y_n')^{\varkappa-1} \cdot D(y_{\varkappa+1}', y_{\varkappa+2}', \ldots, y_n') \qquad (\varkappa = 1, \ldots, n)$$

die für $\varkappa = n$ in die Gleichung (16.) übergeht.

2.

Mittelst der Formel (17.) lässt sich die Differentialgleichung der Associirten der ersten Zeile in Form eines symbolischen Productes darstellen.

Es ist nämlich (*Frobenius*, d. J. Bd, 77):

$$R_1(\eta_{(1)}) = \frac{D_n}{D_{n-1}} \frac{d}{dx} \frac{D_{n-1}^2}{D_n D_{n-2}} \frac{d}{dx} \cdots \frac{d}{dx} \frac{D_1^2}{D_2 D_0} \frac{d}{dx} \frac{\eta_{(1)}}{D_1},$$

wenn der Kürze wegen $D_\varkappa = D(\eta_{(1)_1}, \eta_{(1)_2}, \ldots, \eta_{(1)_\varkappa})$, $\varkappa = 1, 2, \ldots, n$ gesetzt wird. Zufolge (17.) ist nun:

$$\frac{D(\eta_{(1)_1}, \ldots, \eta_{(1)_n})}{D(\eta_{(1)_1}, \ldots, \eta_{(1)_{n-1}})} = \frac{D(y_1', \ldots, y_n')}{D(y_n')}$$

und

$$\frac{D(\eta_{(1)_1}, \ldots, \eta_{(1)_i})^2}{D(\eta_{(1)_1}, \ldots, \eta_{(1)_{i+1}}) \cdot D(\eta_{(1)_1}, \ldots, \eta_{(1)_{i-1}})} = \frac{D(y_{i+1}', y_{i+2}', \ldots, y_n')^2}{D(y_{i+2}', \ldots, y_n') \cdot D(y_i', \ldots, y_n')},$$

weshalb $R_1(\eta_{(1)})$ übergeht in:

(18.)
$$\left\{ \begin{aligned} R_1(\eta_{(1)}) = {} & \frac{D(y_1', \ldots, y_n')}{D(y_n')} \frac{d}{dx} \frac{D(y_n')^2}{D(y_{n-1}', y_n')} \frac{d}{dx} \frac{D(y_{n-1}', y_n')^2}{D(y_n') D(y_{n-2}', y_{n-1}', y_n')} \frac{d}{dx} \\ & \cdots \frac{d}{dx} \frac{D(y_2', \ldots, y_n')^2}{D(y_3', \ldots, y_n') D(y_1', \ldots, y_n')} \frac{d}{dx} \frac{\eta_{(1)}}{D(y_2', \ldots, y_n')}. \end{aligned} \right.$$

Vergleicht man diese symbolische Darstellung mit derjenigen für die Differentialgleichung der Adjungirten der ersten Zeile (d. J. Bd. 115, S. 335), so ergiebt sich:

(8'.) $$R_1(\eta_{(1)}) = D(y_1, y_2, \ldots y_n) \cdot Q_1(u_{(1)}),$$

übereinstimmend mit Formel (8.) für $k = 1$. Umgekehrt kann man aus der symbolischen Darstellung von $Q_1(u_{(1)})$ diejenige für $R_1(\eta_{(1)})$ vermittelst (8'.) sofort in der obigen Form ableiten. So lässt sich auch mittelst der für $k = n$ aus (8.) hervorgehenden Formel:

(8''.) $$R_n(\eta_{(n)}) = D(y_1, \ldots, y_n) \cdot Q_n(u_{(n)})$$

aus der symbolischen Darstellung für die Differentialgleichung der n-ten Adjungirten (*Frobenius*, d. J. Bd. 77):

$$Q_n(u_{(n)}) = P_1(z) = \frac{D_0}{D_1}\frac{d}{dx}\frac{D_1^2}{D_2 D_0}\frac{d}{dx}\cdots\frac{d}{dx}\frac{D_{n-1}^2}{D_n D_{n-2}}\frac{d}{dx}\frac{D_n}{D_{n-1}}z,$$

wo jetzt $D_x = D(y_1, y_2, \ldots, y_x)$ ist, diejenige für die Gleichung der Associirten der n-ten Zeile in der Form herleiten:

$$R_n(\eta_{(n)}) = \frac{D_n D_0}{D_1}\frac{d}{dx}\frac{D_1^2}{D_2 D_0}\frac{d}{dx}\cdots\frac{d}{dx}\frac{D_{n-1}^2}{D_n D_{n-2}}\frac{d}{dx}\frac{\eta_{(n)}}{D_{n-1}},$$

wo gleichfalls D_x für $D(y_1, \ldots, y_x)$ geschrieben wurde.

Wenn die Differentialgleichung (1.) diejenige mit constanten Coefficienten ist:

$$(19.) \qquad P(y) = \frac{d^n y}{dx^n} + k_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + k_n y = 0,$$

so fallen die n Adjungirten in eine einzige zusammen, welche die Form hat (d. J. Bd. 117):

$$(20.) \quad P_1(u) = \frac{d^n u}{dx^n} - k_1\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} + k_2\frac{d^{n-2}u}{dx^{n-2}} - \cdots + (-1)^n k_n u = 0.$$

Es fallen daher auch die Associirten aller n Zeilen in eine einzige zusammen, die aus (20.) durch die Substitution (5.), welche jetzt die Form hat $u = e^{k_1 x}\cdot\eta$, hervorgeht, und deren Coefficienten ganze rationale Functionen von den $k_1, k_2, \ldots, k_n$ sind. Die symbolische Darstellung dieser gemeinsamen Associrten geht aus derjenigen für die Gleichung (20.) (d. J. Bd. 117, S. 279) mittelst der Eormel (8′.) in der Form hervor:

$$R_1(\eta) = e^{(r_2+r_3+\cdots+r_n)x}\frac{d}{dx}e^{-(r_2-r_1)x}\frac{d}{dx}e^{-(r_3-r_2)x}\frac{d}{dx}\cdots$$
$$\cdots\frac{d}{dx}e^{-(r_n-r_{n-1})x}\frac{d}{dx}e^{-(r_1+r_2+\cdots+r_{n-1})x}\eta = 0,$$

wo $r_1, \ldots, r_n$ die Wurzeln der Gleichung $r^n + k_1 r^{n-1} + \cdots + k_n = 0$ sind.

Ist ferner die Differentialgleichung (1.) die folgende:

$$(21.) \qquad P(y) = \frac{d^n y}{dx^n} + \frac{k_1}{x}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \frac{k_2}{x^2}\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \cdots + \frac{k_n}{x^n}y = 0,$$

wo die $k_1, \ldots, k_n$ wieder constant sind, so sind die Differentialgleichungen der n Adjungirten von derselben Art wie (21.) (d. J. Bd. 117.), und da die Substitution (5.) in diesem Falle die Form annimmt:

$$u = x^{k_1}\cdot\eta,$$

so folgt, dass auch die Differentialgleichungen der n Associirten von (21.)

so beschaffen sind, wie diese Gleichung selbst. Für diese letzteren Gleichungen gilt die gemeinsame symbolische Darstellung:

$$R_k(\eta_{(k)}) = x^{r_1+r_2+\cdots+r_{n-1}+k-\frac{n(n+1)}{2}} \frac{d}{dx} x^{r_n-r_{n-1}+1} \frac{d}{dx} x^{r_{n-1}-r_{n-2}+1} \frac{d}{dx} \cdots$$
$$\cdots \frac{d}{dx} x^{r_2-r_1+1} \frac{d}{dx} x^{-(r_2+r_3+\cdots+r_n)-k+1+\frac{n(n-1)}{2}} \eta_{(k)} = 0$$

$(k = 1, 2, \ldots, n)$, wo $r_1, \ldots, r_n$ die Wurzeln der Gleichung:

$$r(r-1)\ldots(r-n+1)+k_1 r(r-1)\ldots(r-n+2)+\cdots+k_{n-1}r+k_n = 0$$

sind (Vergl. d. J. Bd. 117, S. 284).

3.

Die Variabeln $u_{(1)}, u_{(2)}, \ldots, u_{(n)}$ sind (d. J. Bd. 117, S. 274) durch das folgende Gleichungssystem mit einander verbunden:

$$(22.)\quad \begin{cases} \frac{du_{(1)}}{dx} = p_n z, & \frac{du_{(2)}}{dx} = p_{n-1} z - u_{(1)}, & \frac{du_{(3)}}{dx} = p_{n-2} z - u_{(2)}, \ldots \\ & & \ldots, \frac{du_{(n)}}{dx} = p_1 z - u_{(n-1)}, \end{cases}$$

wo wieder $z = u_{(n)}$ gesetzt ist. Durch die Substitution (5.) verwandelt sich dieses Gleichungssystem in das folgende:

$$(23.)\quad \begin{cases} \frac{d\eta_{(1)}}{dx} + p_1 \eta_{(1)} = p_n \zeta, \\ \frac{d\eta_{(2)}}{dx} + p_1 \eta_{(2)} = p_{n-1} \zeta - \eta_{(1)}, \\ \frac{d\eta_{(3)}}{dx} + p_1 \eta_{(3)} = p_{n-2} \zeta - \eta_{(2)}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{d\eta_{(n)}}{dx} + p_1 \eta_{(n)} = p_1 \zeta - \eta_{(n-1)}, & \zeta = \eta_{(n)} \end{cases}$$

durch welches demnach der Zusammenhang zwischen den Variabeln $\eta_{(1)}$, $\eta_{(2)}, \ldots, \eta_{(n)}$ ausgedrückt ist. Wegen der Identität von ζ mit $\eta_{(n)}$ lautet die letzte der vorstehenden Gleichungen:

$$(24.)\quad \frac{d\eta_{(n)}}{dx} = -\eta_{(n-1)},$$

welche Beziehung aus der Bedeutung von $\eta_{(n-1)}$ und $\eta_{(n)}$ unmittelbar sich ergiebt. Bei diesem Anlasse bemerke ich, dass die Adjungirte der $(n-1)$-ten Zeile $u_{(n-1)}$ sich in der geschlossenen Form darstellen lässt:

$$(25.)\quad u_{(n-1)_\varkappa} = (-1)^{n+\varkappa-1} \frac{\frac{d}{dx} D(y_1, \ldots, y_{\varkappa-1}, y_{\varkappa+1}, \ldots, y_n)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}, \qquad (\varkappa = 1, \ldots, n)$$

woraus zufolge (5.) die Gleichung (24.) ebenfalls hervorgeht. Mittels (25.) lässt sich die letzte der Gleichungen (22.) unmittelbar verificiren. Denn schreibt man dieselbe in der Form

$$\frac{du_{(n)_\varkappa}}{dx} = -u_{(n-1)_\varkappa} + p_1 u_{(n)_\varkappa} \qquad (\varkappa = 1, \ldots, n)$$

und setzt (d. J. Bd. 115, S. 332):

$$p_1 = -\frac{\frac{d}{dx} D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}$$

und (*Frobenius*, d. J. Bd. 77):

$$u_{(n)_\varkappa} = z_\varkappa = (-1)^{n+\varkappa} \frac{D(y_1, \ldots, y_{\varkappa-1}, y_{\varkappa+1}, \ldots, y_n)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)} \qquad (\varkappa = 1, \ldots, n)$$

so geht dieselbe über in die folgende:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{d}{dx} \dfrac{D(y_1, \ldots, y_{\varkappa-1}, y_{\varkappa+1}, \ldots, y_n)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)} = \\ \dfrac{d}{dx} D(y_1, \ldots, y_{\varkappa-1}, y_{\varkappa+1}, \ldots, y_n) \quad D(y_1, \ldots, y_{\varkappa-1}, y_{\varkappa+1}, \ldots, y_n) \cdot \dfrac{d}{dx} D(y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ \hline D(y_1, y_2, \ldots, y_n) \qquad - \qquad D(y_1, y_2, \ldots, y_n)^2 \end{array} \right.,$$

deren Richtigkeit unmittelbar ersichtlich ist.

Mittels der Gleichungen (22.) kann man $u_{(1)}, u_{(2)}, \ldots, u_{(n-1)}$ durch die Adjungirte $u_{(n)} = z$ in der Form ausdrücken (dieses Journal Bd. 117, S. 273):

$$(26.) \qquad u_{(k)} = p_{n-k} z - \frac{d}{dx}(p_{n-k-1} z) + \frac{d^2}{dx^2}(p_{n-k-2} z) - \cdots + (-1)^{n-k} \frac{d^{n-k} z}{dx^{n-k}}.$$

$$(k = 1, \ldots, n).$$

In gleicher Weise lassen sich die Associirten $\eta_{(1)}, \eta_{(2)}, \ldots, \eta_{(n-1)}$ durch die Associirte $\eta_{(n)} = \zeta$ vermittelst der Gleichungen (23.) ausdrücken.

So ist

$$\eta_{(n-1)} = -\frac{d\zeta}{dx}, \qquad \eta_{(n-2)} = p_2 \zeta + p_1 \frac{d\zeta}{dx} + \frac{d^2\zeta}{dx^2},$$

$$\eta_{(n-3)} = (p_3 - p_1 p_2 - p_2') \zeta - (p_1^2 + p_1' + p_2) \frac{d\zeta}{dx} - 2p_1 \frac{d^2\zeta}{dx^2} - \frac{d^3\zeta}{dx^3}, \qquad \left(p' = \frac{dp}{dx}\right)$$

u. s. w.; diese Ausdrücke sind jedoch nicht von so einfacher Form wie die vorstehenden für die $u_{(k)}$.

Zwischen der Differentialgleichung (1.) und ihrer n-ten Adjungirten besteht bekanntlich die Beziehung:

$$(27.) \qquad z P(y) + (-1)^{n-1} y P_1(z) = \frac{d}{dx} P(y, z)$$

wo

$$P(y,z)=z\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\left(p_1z-\frac{dz}{dx}\right)\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\cdots+\left(p_{n-1}z-\frac{d}{dx}(p_{n-2}z)+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}}\right)y$$

ist. Dieser bilineare Differentialausdruck lässt sich zufolge (26.) in der Form darstellen (dieses Journal Bd. 115):

$$P(y,z)=u_{(n)}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+u_{(n-1)}\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\cdots+u_{(2)}\frac{dy}{dx}+u_{(1)}y.$$

Dieser letztere Ausdruck aber verwandelt sich durch die Substitution (5.) in den folgenden:

$$P(y,\zeta e^{\int p_1dx})=\left[\eta_{(n)}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\eta_{(n-1)}\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\cdots+\eta_{(2)}\frac{dy}{dx}+\eta_{(1)}y\right]\cdot e^{\int p_1dx},$$

der, wenn $\eta_{(n-1)}, \eta_{(n-2)}, \ldots, \eta_{(1)}$ durch ihre Ausdrücke in ζ ersetzt werden, in einen bilinearen Ausdruck $R(y,\zeta)$ ähnlicher Art wie $P(y,z)$ übergeht, und da andererseits gemäss (8″.)

$$P_1(z)=R_n(\zeta)\cdot e^{\int p_1dx}$$

ist, so verwandelt sich die Gleichung (27.) in

$$\zeta\cdot P(y)+(-1)^{n-1}y\cdot R_n(\zeta)=e^{-\int p_1dx}\frac{d}{dx}[R(y,\zeta)e^{\int p_1dx}],$$

wonach also der Ausdruck links erst dann ein vollständiger Differentialquotient wird, wenn derselbe mit $e^{\int p_1dx}$ multiplicirt wird.

4.

Die Coefficienten der n Differentialgleichungen

$$(28.)\qquad Q_k(u_{(k)})=0 \qquad (k=1,2,\ldots,n)$$

sind stets Functionen derselben Beschaffenheit wie die der Gleichung (1.) selbst (dieses Journal Bd. 117). Gleiches gilt nun auch von den Coefficienten der n Associirten

$$(29.)\qquad R_k(\eta_{(k)})=0, \qquad (k=1,2,\ldots,n)$$

wie dies aus der Entstehungsweise dieser Gleichungen unmittelbar hervorgeht. Hat die Differentialgleichung (1.) insbesondere die Gestalt:

$$(30.)\qquad \frac{d^ny}{dx^n}+\frac{p_1(x)}{x}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\frac{p_2(x)}{x^2}\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\cdots+\frac{p_n(x)}{x^n}y=0,$$

wo die $p_i(x)$ in der Umgebung des Punktes $x=0$ eindeutig und stetig sind, und ist

$$(31.)\quad r(r-1)\ldots(r-n+1)+p_1(0)r(r-1)\ldots(r-n+2)+\cdots+p_{n-1}(0)r+p_n(0)=0$$

die auf diesen Punkt bezügliche determinirende Fundamentalgleichung, so haben die Gleichungen (28.) gleichfalls die Form (30.), so zwar, dass ihre determinirenden Fundamentalgleichungen die Wurzeln

$$(32.) \qquad -r_1+k-1, \quad -r_2+k-1, \ \ldots, \ -r_n+k-1 \qquad (k=1,2,\ldots,n),$$

besitzen, wenn $r_1, r_2, \ldots, r_n$ diejenigen der Gleichung (31.) sind (dieses Journal Bd. 117). Demnach sind auch die Differentialgleichungen (29.) von der Form (30.), und die determinirenden Fundamentalgleichungen derselben besitzen Wurzeln, die wie folgt sich ermitteln lassen: Gemäss (4.) und (5.) ist

$$(33). \qquad \eta_{(k)_i} = u_{(k)_i} \cdot D(y_1, \ldots, y_n), \qquad (k,i=1,\ldots,n)$$

wo jetzt die $u_{(k)_i}$ reguläre Integrale (*Thomé*, dieses Journal Bd. 75), somit von der Form sind:

$$u_{(k)_i} = x^{-r_i+k-1}\varphi_{(k)_i}(x),$$

worin die wie F beschaffenen Functionen $\varphi_{(k)_i}$ für $x=0$ nicht verschwinden (*Fuchs*, dieses Journal Bd. 66). Andererseits kann, wie Herr *Fuchs* gezeigt hat (dieses Journal Bd. 66), die Determinante $D(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ auf die Form gebracht werden:

$$D(y_1, \ldots, y_n) = x^{r_1+r_2+\cdots+r_n-\frac{n(n-1)}{2}} \cdot \psi(x),$$

wo $\psi(x)$ in der Umgebung des Punktes $x=0$ eindeutig, stetig und für $x=0$ von Null verschieden ist; daher verwandelt sich (33.) in:

$$(34.) \qquad \eta_{(k)_i} = x^{r_1+\cdots+r_{i-1}+r_{i+1}+\cdots+r_n+(k-1)-\frac{n(n-1)}{2}} \cdot \psi_{(k)_i}(x),$$

wo die $\psi_{(k)_i}$ Functionen derselben Beschaffenheit sind wie die $\varphi_{(k)_i}$. In der Gleichung (31.) aber ist der Coefficient von r^{n-1}:

$$p_1(o)-\frac{n(n-1)}{2};$$

daher ist

$$r_1+\cdots+r_{i-1}+r_{i+1}+\cdots+r_n = -r_i+\frac{n(n-1)}{2}-p_1(0),$$

weshalb (34.) übergeht in

$$(35.) \qquad \eta_{(k)_i} = x^{-r_i+k-1-p_1(o)} \cdot \psi_{(k)_i}(x) \qquad (k,i=1,\ldots,n).$$

Aus Gleichung (35.) folgt demnach, dass die Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichung, die zur Differentialgleichung der Associirten der k-ten Zeile gehört ($k=1, \ldots, n$), gleich sind den um $p_1(0)$ verminderten Wurzeln derjenigen determinirenden Fundamentalgleichung, die zur Differential-

gleichung der Adjungirten der k-ten Zeile gehört; es ist, wenn die ersteren Wurzeln mit $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n$ bezeichnet werden

$$(36.)\quad \begin{cases} \varrho_{(k)_1} = -r_1+k-1-p_1(0), \quad \varrho_{(k)_2} = -r_2+k-1-p_1(0), \ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \varrho_{(k)_n} = -r_n+k-1-p_1(0). \end{cases}$$

Zu diesem Ergebnisse gelangt man auch auf folgende Weise:

Gemäss (5.) ist nämlich jetzt:

$$\eta_{(k)} = u_{(k)} \cdot e^{-\int \frac{p_1(x)}{x} dx};$$

da aber $\frac{p_1(x)}{x} = \frac{p_1(o)}{x} + f(x)$ ist, wo $f(x)$ in der Umgebung von $x=0$ eindeutig und stetig, somit

$$e^{-\int \frac{p_1(x)}{x} dx} = x^{-p_1(o)} \cdot e^{-\int f(x) dx},$$

so wird nach Einsetzung des Werthes von $u_{(k)}$:

$$\eta_{(k)} = x^{-r+k-1} \varphi_{(k)}(x) \cdot x^{-p_1(o)} \cdot e^{-\int f(x) dx},$$

woraus sofort der Werth für $\eta_{(k)}$ in der obigen Form (35.) hervorgeht.

5.

Es werden die Wurzeln $r_1, r_2, \ldots, r_n$ in Gruppen von der Art eingetheilt, dass in einer jeden nur solche Wurzeln vorkommen, die sich um Null oder reelle ganze Zahlen unterscheiden. Sind $r_1, r_2, \ldots, r_h$ die Wurzeln einer solchen Gruppe (R), so geordnet, dass für $\alpha < \beta$ die Differenz $r_\alpha - r_\beta$ nicht negativ ist, so giebt es (*Fuchs,* d. J. Bde. 66, 68) h Fundamentalintegrale der Differentialgleichung (30.) von der Form:

$$(S)\quad \begin{cases} y_1 = x^{r_1}\varphi_{11}, \quad y_2 = x^{r_2}[\varphi_{21}+\varphi_{22}\log x], \ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad y_h = x^{r_h}[\varphi_{h1}+\varphi_{h2}\log x+\cdots+\varphi_{hh}(\log x)^{h-1}]. \end{cases}$$

Sind die Wurzeln $r_1, \ldots, r_h$ alle von einander verschieden, so kann es vorkommen, dass in der vorstehenden, mit $(S.)$ bezeichneten Gruppe von Integralen alle Logarithmen verschwinden (*Fuchs,* d. J. Bd. 68, S. 373—378).

Die Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichung, die zur Adjungirten der k-ten Zeile gehört, sind nach (32.):

$$s_{(k)_1} = -r_1+k-1, \quad s_{(k)_2} = -r_2+k-1, \ldots, s_{(k)_n} = -r_n+k-1 \quad (k=1, \ldots n).$$

Bilden daher $r_1, \ldots, r_h$ eine Gruppe (R), so bilden wegen $s_{(k)_\alpha} - s_{(k)_\beta} = -(r_\alpha - r_\beta)$

die Wurzeln $s_{(k)_1}, \ldots, s_{(k)_h}$ gleichfalls eine Gruppe (R_k) von der Art, dass je zwei derselben sich nur um Null oder eine ganze Zahl unterscheiden. Da die Adjungirte der k-ten Zeile in Bezug auf den singulären Punkt $x = 0$ sich genau so verhält wie die Differerentialgleichung (30.) selbst, so besitzt dieselbe h Fundamentalintegrale: $u_{(k)_1}, u_{(k)_2}, \ldots, u_{(k)_h}$, welche zu den Wurzeln der Gruppe (R_k) als Exponenten gehören und eine Gruppe (S_k) von ähnlicher Beschaffenheit wie (S) bilden. Sind zwei oder mehrere von den Wurzeln $r_1, \ldots, r_h$ einander gleich, in welchem Falle die Gruppe (S) nothwendigerweise Logarithmen enthält, dann sind auch die entsprechenden Wurzeln der Gruppe (R_k) einander gleich, und in der Gruppe (S_k) treten dann ebenfalls Logarithmen auf. Von Herrn ***Jürgens*** aber ist gezeigt worden (d. J. Bd. 80, S. 150—168), dass man aus einem Systeme von Integralen der Differentialgleichung (1.) von der in der Gruppe (S) befindlichen Art ein ebenso geformtes System von Multiplicatoren derselben herleiten kann. Daraus folgt, dass in der Gruppe (S) von Integralen der Gleichung (30.) und der zugehörigen Gruppe (S_n) von Integralen ihrer n-ten Adjungirten stets gleichzeitig Logarithmen vorhanden sind oder nicht. Da nun ferner, wie aus dem Ausdrucke für $u_{(k)}$ in (26.) unmittelbar hervorgeht, einem mit Logarithmen behafteten Integrale z der n-ten Adjungirten solche Integrale $u_{(k)}$ der übrigen Adjungirten entsprechen, die gleichfalls mit Logarithmen behaftet sind, so folgt, dass in den Gruppen $(S_1), (S_2), \ldots, (S_n)$ Logarithmen vorhanden sind oder nicht, je nachdem solches in der Gruppe (S) der Fall ist oder nicht.

Aus (36.) geht hervor, dass die Wurzeln:

$$\varrho_{(k)_1}, \varrho_{(k)_2}, \ldots, \varrho_{(k)_h}$$

ebenfalls eine Gruppe (R'_k) der angegebenen Art bilden, und da ferner die $\eta_{(k)}$ von den $u_{(k)}$ sich nur um den Factor $D(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, welcher von Logarithmen frei ist, unterscheiden, so ergiebt sich, dass in der zur Wurzelgruppe (R'_k) gehörigen Gruppe (S'_k) von Integralen: $\eta_{(k)_1}, \eta_{(k)_2}, \ldots, \eta_{(k)_h}$ der Associirten der k-ten Zeile gleichfalls Logarithmen auftreten oder nicht, je nachdem dies in (S) der Fall ist oder nicht.

Zum Schlusse bemerke ich noch Folgendes: Jedes der n Systeme von Integralen: $u_{(k)_1}, \ldots, u_{(k)_n}$ $(k = 1, \ldots, n)$ der n Adjungirten, welche dem Systeme der Integrale $y_1, \ldots, y_n$ der Gleichung (1.) entsprechen, ist mit diesem

gleichzeitig linearunabhängig oder nicht (d. J. Bd. 117, S. 290). Da nun, wenn eine Gleichung von der Form:

$$c_1 u_{(k)_1} + c_2 u_{(k)_2} + \cdots + c_n u_{(k)_n} = 0$$

mit den von Null verschiedenen Constanten $c_1, c_2, \ldots, c_n$ stattfindet oder nicht, auch die Gleichung:

$$c_1 u_{(k)_1} e^{-\int p_1 dx} + \cdots + c_n u_{(k)_n} e^{-\int p_1 dx} = c_1 \eta_{(k)_1} + \cdots + c_n \eta_{(k)_n} = 0$$

stattfindet oder nicht, so folgt, dass auch jedes der n Systeme von Integralen: $\eta_{(k)_1}, \ldots, \eta_{(k)_n}$ $(k = 1, \ldots, n)$ der n Associirten gleichzeitig mit $y_1, \ldots, y_n$ linearunabhängig ist oder nicht.

Zur Theorie der singulären Punkte einer Raumcurve.

(Von Herrn *Alfred Meder* in Riga.)

In den meisten Darstellungen einer Theorie der ebenen und Raumcurven wird gewissen Grössen, deren analytischer Ausdruck ein Wurzelzeichen enthält, wie z. B. dem Bogenelement oder dem Krümmungsradius, ein constantes Vorzeichen beigelegt. Im Folgenden soll gezeigt werden, dass diese Annahme in gewissen singulären Punkten eine Unstetigkeit der Differentialquotienten dieser Grössen bedingt und andererseits die Annahme der Möglichkeit eines Zeichenwechsels in diesen Punkten die nähere Untersuchung derselben bedeutend vereinfacht.

§ 1.

Das Bogenelement.

Es seien die Coordinaten der zu untersuchenden Curve als eindeutige Functionen eines Parameters t gegeben, welche für ein gewisses Intervall dieses Parameters, das den betrachteten Punkt enthält, sammt ihren Ableitungen bis zu einer gewissen Ordnung hinauf endlich und stetig sind:

$$x = x_0 + x_0' t + x_0'' \frac{t^2}{2} + \cdots, \quad y = y_0 + y_0' t + y_0'' \frac{t^2}{2} + \cdots, \quad z = z_0 + z_0' t^2 + z_0'' \frac{t^2}{2} + \cdots.$$

In einem singulären Punkte können einige der ersten Ableitungen von x, y, z verschwinden, und zwar verschwindet, wie ich in einer früheren Abhandlung*) gezeigt habe, bei einer allgemeinen Lage des Coordinatensystems von jeder der drei Coordinaten dieselbe Anzahl von auf einander folgenden Ableitungen. Es sei für den Coordinatenanfangspunkt

$$(1.) \qquad \begin{cases} x' = x'' = \cdots = x^{(n)} = 0, & x^{(n+1)} \gtrless 0, \\ y' = y'' = \cdots = y^{(n)} = 0, & y^{(n+1)} \gtrless 0, \\ z' = z'' = \cdots = z^{(n)} = 0, & z^{(n+1)} \gtrless 0, \end{cases}$$

*) Ueber einige Arten singulärer Punkte von Raumcurven, Bd. 116 dieses Journals, S. 53.

so dass in der Umgebung desselben ($t=0$) die Coordinaten die folgende Gestalt haben:

$$(2.)\quad x=t^{n+1}(a+t(\cdots)),\quad y=t^{n+1}(b+t(\cdots)),\quad z=t^{n+1}(c+t(\cdots)),$$

wo a, b, c von Null verschiedene Constanten bedeuten und wobei offenbar der Fall des regulären Punktes in diesen Ausdrücken für $n=0$ enthalten ist.

Bezeichnet s die Länge des Bogens der Curve von irgend einem festen Punkte an gerechnet, so ist bekanntlich

$$(3.)\qquad s'^2 = x'^2+y'^2+z'^2$$

und man findet leicht durch mehrmalige Differentiation dieses Ausdruckes, dass infolge der Bedingungen (1.) das nachstehende System erfüllt sein muss:

$$s'=s''=\cdots=s^{(n)}=0,\qquad s^{(n+1)}\gtrless 0.$$

Ersetzt man in dem Ausdrucke (3.) x, y, z durch ihre Werthe aus den Gleichungen (2.), so erhält man in der That

$$(4.)\qquad s' = t^n\sqrt{d+t(\cdots)},$$

wo d eine von Null verschiedene Constante bedeutet.

Trifft man die Festsetzung, dass die in dem Ausdrucke (4.) auftretende, von den Werthen 0 und ∞ verschiedene Wurzel $\sqrt{d+t(\cdots)}$ ihr Zeichen nicht ändert, wenn dasselbe vorher durch irgendwelche Bestimmungen festgelegt ist, so sieht man, dass s' beim Durchgang durch $t=0$ sein Zeichen beibehält oder umkehrt, je nachdem n gerade oder ungerade ist. Nimmt man dagegen, wie es in den meisten Darstellungen der Fall ist, an, dass s' immer positiv sein soll, so zwingt man dadurch die von Null verschiedene Grösse $\sqrt{d+t(\cdots)}$ im Fall eines ungeraden n ihr Vorzeichen umzukehren; bei dieser Annahme bleiben $s', s'', \ldots, s^{(n)}$ stetig, während die folgenden Ableitungen im allgemeinen unstetig werden, nämlich ihr Zeichen wechseln, ohne durch den Werth 0 oder ∞ hindurchzugehen. Will man also vermeiden, dass die Ableitungen von s, von der $(n+1)$-ten an, unstetig werden, so muss man annehmen, dass s' im Falle eines ungeraden n, d. h. in einem Rückkehrpunkt*) sein Zeichen umkehrt. Functionentheoretisch bedeuten diese Erwägungen, dass für $t=0$ zwei Werthe von s' zusammenfallen, ohne dass dieser Punkt ein Verzweigungspunkt ist. Der analytischen Fortsetzung der Function s' ist dann ein ganz bestimmter Weg vorgeschrieben und wir haben nichts anderes gethan, als

*) A. a. O. S. 64.

dass wir die Function sich auf diese Weise fortsetzen liessen. Bei unserer Festsetzung über den Zeichenwechsel von s' ist beim Auftreten eines Rückkehrpunktes die Länge s des Bogens der Curve ein Maximum oder Minimum, d. h. lässt man einen Punkt t die Curve durchlaufen und die zugehörige Tangente längs der Curve hinrollen, wobei wir festsetzen, dass die positiven Richtungen je zweier auf einander folgenden Tangenten immer einen unendlich kleinen Winkel mit einander bilden*), so giebt s die Entfernung des jeweiligen Berührungspunktes von einem festen Punkte der Tangente an, mag P auf seinem Wege einen Rückkehrpunkt passiert haben oder nicht. Durch die von uns getroffene Annahme des Zeichenwechsels ist s auch *stets* gleich der Differenz der Entfernungen der beiden Endpunkte des Bogens s von den entsprechenden Punkten einer Evolvente der untersuchten Curve.

§ 2.

Der Contingenzwinkel, der Torsionswinkel und der Krümmungsradius.

Gelangt man bei stetiger Aenderung der unabhängigen Variabeln t zu einem Werthe t_0 derselben, für welchen die beiden Werthe der Function $w = \sqrt{f(t)}$, wo $f(t)$ eine eindeutige und bis auf einzelne Pole stetige Function von t bedeutet, einander gleich werden, etwa gleich w_0, und ist dieser Punkt $t = t_0$ kein Verzweigungspunkt, so hat beim Ueberschreiten dieses Punktes jeder der beiden Werthe von w eine ganz bestimmte analytische Fortsetzung. Ist im besonderen $t_0 = 0$ und $w_0 = 0$, so gilt in der Umgebung dieses Punktes die *Taylor*sche Entwickelung

$$w = w_0' t + w_0'' \frac{t^2}{2} + \cdots,$$

in welcher die in $w_0', w_0'', \ldots$ auftretenden Wurzeln für die eine der beiden Werthreihen von w mit dem positiven für die andere mit dem negativen Vorzeichen zu nehmen sind. Aus dieser Entwickelung ersehen wir, dass, wenn wir mit wachsenden reellen Werthen von t fortschreiten, nach Durchlaufung des Werthes $t = 0$ jeder der beiden Werthe der Function w sein Zeichen wechselt oder beibehält, je nachdem die erste nicht verschwindende Ableitung von w für diesen Punkt von ungerader oder gerader Ordnung ist. Besitzt dagegen w für $t = 0$ eine Unendlichkeitsstelle von polarer Natur, so haben wir die Reihe

$$\frac{1}{w} = \left(\frac{1}{w}\right)_0' t + \left(\frac{1}{w}\right)_0'' \frac{t^2}{2} + \cdots,$$

*) A. a. O. S. 50.

aus welcher ohne weiteres folgt, dass w, auch wenn es durch den Werth ∞ hindurchgeht, in manchen Fällen sein Zeichen umzukehren hat.

Die speciellen Functionen, denen wir uns jetzt zuwenden, genügen, wie man sich leicht überzeugen kann, in der That denselben Voraussetzungen, wie die Function w, so dass wir ohne weiteres die eben angestellten Betrachtungen auf sie anwenden können. Zwei solche Functionen sind z. B. die analytischen Ausdrücke für den Contingenzwinkel ε und den Torsionswinkel ω:

$$(5.) \qquad \varepsilon = \frac{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}{s'^2}\,dt, \quad \omega = \frac{s'\Delta}{A^2+B^2+C^2}\,dt,$$

wo A, B, C, Δ für folgende Determinanten gesetzt sind:

$$A = y'z''-y''z', \quad B = z'x''-z''x', \quad C = x'y''-x''y',$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}.$$

Trifft man die Festsetzung, dass, mit wachsenden Werthen von t, der Werth von $\varepsilon : dt$ gemäss der analytischen Fortsetzung zu nehmen ist, so ändert, da s'^2 und dt stets positiv bleiben, $\varepsilon : dt$ dann und nur dann sein Zeichen, wenn $\sqrt{A^2+B^2+C^2}$ sein Vorzeichen umkehrt, und dieses tritt ein, wenn A, B, C ihr Zeichen wechseln, was sich durch Betrachtungen ergiebt, die den in § 1 angestellten analog sind. Es sei für den betrachteten Punkt

$$A = A' = \cdots = A^{(m)} = 0, \quad A^{(m+1)} \gtrless 0,$$
$$B = B' = \cdots = B^{(m)} = 0, \quad B^{(m+1)} \gtrless 0,$$
$$C = C' = \cdots = C^{(m)} = 0, \quad C^{(m+1)} \gtrless 0;$$

dann haben, wenn a_1, b_1, c_1 von Null verschiedene Constanten bedeuten, die Ausdrücke für A, B, C die Gestalt

$$A = t^{m+1}(a_1+t(\cdots)), \quad B = t^{m+1}(b_1+t(\cdots)), \quad C = t^{m+1}(c_1+t(\cdots)),$$

aus welcher ersichtlich ist, dass eine Zeichenänderung für $t = 0$ dann und nur dann eintritt, wenn m gerade ist, welche Bedingung das Kriterium für eine Rückkehrtangente*) ist. Es ändert folglich $\varepsilon : dt$ sein Zeichen, wenn eine Rückkehrtangente auftritt, also nach der *Wiener*schen**) Bezeichnungsweise in den Fällen

III. $+-+$, IV. $+--$, VII. $--+$, VIII. $---$.

---

*) A. a. O. S. 66.

**) A. a. O. S. 52.

In dem Ausdrucke für $\omega : dt$, dessen Aenderung wir auch der analytischen Fortsetzung gemäss bestimmt denken wollen, ist der Nenner $A^2+B^2+C^2$ stets positiv, der Ausdruck ändert also sein Zeichen, wenn eine der Grössen s' oder Δ ihr Zeichen umkehrt, d. h. im Falle einer Rückkehrschmiegungsebene*), also nach der *Wiener*schen Bezeichnung in den Fällen

II. $++-$, IV. $+--$, VI. $-+-$, VIII. $---$.

Definirt man den Contingenzwinkel und den Torsionswinkel als den Winkel zwischen den positiven Richtungen zweier auf einander folgenden Tangenten resp. Binormalen, so muss man, damit der geometrisch definirte Werth mit dem gemäss der analytischen Fortsetzung aus den Formeln (5.) gefundenen übereinstimmt, diese Richtungen für das betrachtete Intervall dadurch festlegen, dass je zwei auf einander folgende Richtungen immer einen unendlich kleinen Winkel mit einander bilden mögen; es lässt dann der Zeichenwechsel von ε und ω auch eine einfache geometrische Deutung**) zu. Nimmt man dagegen an, dass die positive Richtung der Tangente stets übereinstimmen soll mit der Richtung wachsender Werthe von t im Berührungspunkt, so wird der Contingenzwinkel in einem Rückkehrpunkt unstetig, indem er plötzlich den endlichen Werth π erhält, was mit der Aenderung des Ausdrucks (5.) für $\varepsilon : dt$, wenn man dieselbe gemäss der analytischen Fortsetzung nimmt, nicht übereinstimmt.

Eine Function, die denselben Voraussetzungen genügt wie die S. 232 definirte Function w, ist ferner der Ausdruck für den Krümmungsradius R, dessen Werth wir künftig auch gemäss der analytischen Fortsetzung nehmen wollen. Es ist

$$R = \frac{s'}{\varepsilon}\, dt$$

und R wird sein Zeichen beibehalten, wenn s' und $\varepsilon : dt$ beide ihr Zeichen behalten oder beide ändern, dagegen sein Vorzeichen umkehren, wenn nur eine der Grössen s' oder $\varepsilon : dt$ ihr Zeichen ändert. Man erhält also nach den von uns in dem vorigen und in diesem Paragraphen abgeleiteten Resultaten für den Krümmungsradius R ein Beibehalten des Vorzeichens beim Auftreten der Singularitäten

I. $+++$, II. $++-$, VII. $--+$, VIII. $---$,

*) A. a. O. S. 78.

**) A. a. O. S. 260ff.

und einen Zeichenwechsel in den Fällen

III. $+-+$, IV. $+--$, V. $-++$, VI. $-+-$.

Um uns über den geometrischen Sinn hiervon klar zu werden, betrachten wir die Projection des untersuchten Punktes auf seine Schmiegungsebene, in welcher bekanntlich je ein Krümmungsradius liegt. Diese Projection*) ist in den Fällen

I. $+++$ und II. $++-$ ein regulärer Punkt,
VII. $--+$ und VIII. $---$ ein Schnabelpunkt,

in den Fällen

III. $+-+$ und IV. $+--$ ein Wendepunkt,
V. $-++$ und VI. $-+-$ eine Spitze.

In den ersteren vier Fällen bleibt, wie man leicht sieht, der Krümmungsmittelpunkt in der Schmiegungsebene auf derselben Seite der Curve, in den letzteren geht er von der einen Seite auf die andere hinüber; wir erhalten also das Resultat:

Der gemäss der analytischen Fortsetzung bestimmte Werth des Krümmungsradius ändert sein Vorzeichen, wenn der Krümmungsmittelpunkt in der Schmiegungsebene von der einen Seite der Curve auf die andere hinübergeht.

§ 3.

Die *Frenet-Serret*schen Formeln.

Bezeichnet man durch α, β, γ mit den resp. Indices 1, 2, 3 die Richtungscosinus der positiven Richtungen der Tangente, Hauptnormale und Binormale, durch s' die Ableitung des Bogens nach dem Parameter t, durch R den Krümmungsradius und durch $1:T$ die Torsion, so bestehen zwischen diesen Grössen die nach *Frenet* und *Serret* benannten Beziehungen:

$$(6.) \qquad \alpha_1' = \frac{\alpha_2 s'}{R}, \qquad \alpha_2' = -\frac{\alpha_1 s'}{R} + \frac{\alpha_3 s'}{T}, \qquad \alpha_3' = -\frac{\alpha_2 s'}{T},$$

nebst zwei ähnlichen Systemen, die man erhält, wenn man β oder γ an Stelle von α schreibt.

Herr *Kneser***) hat gezeigt, dass diese Beziehungen in der obigen Form (6.) richtig sind, wenn man die in ihnen enthaltenen Grössen s' und R stets mit dem positiven Vorzeichen nimmt und wenn die positiven Richtungen der Tangente, Hauptnormale und Binormale so zu einander liegen, wie die

*) *Wiener,* Lehrbuch der darstellenden Geometrie, Bd. I, S. 215.

**) *Kneser*, Bemerkungen über die *Frenet-Serret*schen Formeln und die analytische Unterscheidung rechts und links gewundener Raumcurven. Bd. 113 dieses Journals S. 89 ff.

Axen der Coordinaten x, y, z, wobei die positive Richtung der Tangente im Berührungspunkt mit der Richtung wachsender Werthe von t längs der Curve übereinstimmt, die positive Richtung der Hauptnormale nach dem Krümmungscentrum hin geht, wodurch dann auch die positive Richtung der Binormale eindeutig bestimmt ist.

Es fragt sich nun, in welchen Fällen die in den Formeln (6.) auftretenden Grössen α, β, γ unter Beibehaltung der definirten Voraussetzungen unstetig werden, nämlich ohne durch den Werth 0 zu gehen ihr Zeichen wechseln, wenn man bei wachsenden Werthen von t über einen singulären Punkt hinausgelangt. Da die positive Richtung der Tangente übereinstimmend angenommen war mit der Richtung wachsender Werthe von t längs der Curve, so hat man $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ und demgemäss auch $\alpha_1', \beta_1', \gamma_1'$ nach einem Rückkehrpunkt (V. $-++$, VI. $-+-$, VII. $--+$, VIII. $---$) mit dem Minuszeichen zu versehen. Wie wir am Schluss von § 2 gefunden haben, geht das Krümmungscentrum von der einen Seite der Curve auf die andere über in den Fällen III. $+-+$, IV. $+--$, V. $-++$, VI. $-+-$, wir müssen also in diesen Fällen $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ und $\alpha_2', \beta_2', \gamma_2'$ mit dem negativen Zeichen nehmen. Da endlich das System der positiven Richtungen der Tangente, Hauptnormale und Binormale congruent sein soll mit dem System der positiven Richtungen der Axen der Coordinaten x, y, z, so hat man vor $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ und $\alpha_3', \beta_3', \gamma_3'$ das Minuszeichen zu setzen nach Durchlaufung eines Punktes von der Art III. $+-+$, IV. $+--$, VII. $--+$, VIII. $---$. Enthält also die Curve in dem betrachteten Intervall einen singulären Punkt und sind, wenn man mit wachsenden Werthen des Parameters t fortschreitet, für den vor dem singulären Punkt liegenden Theil der Curve die von Herrn *Kneser* definirten Voraussetzungen erfüllt, also die Formeln (6.) gültig, so treten, wenn man die in denselben auftretenden Grössen s' und R ihr Zeichen nicht wechseln und auch die Richtungscosinus α, β, γ nebst ihren Ableitungen nicht unstetig werden lässt, für den jenseits des singulären Punktes liegenden Theil die folgenden Gleichungssysteme in Kraft:

$$(7.)\quad \begin{cases} \text{I}+++ \text{ u. } \text{II}++-: \alpha_1' = \dfrac{\alpha_2 s'}{R},\ \alpha_2' = -\dfrac{\alpha_1 s'}{R} + \dfrac{\alpha_3 s'}{T},\ \alpha_3' = -\dfrac{\alpha_2 s'}{T}; \\ \text{III}+-+ \text{ u. } \text{IV}+--: \alpha_1' = -\dfrac{\alpha_2 s'}{R},\ \alpha_2' = \dfrac{\alpha_1 s'}{R} + \dfrac{\alpha_3 s'}{T},\ \alpha_3' = -\dfrac{\alpha_2 s'}{T}; \\ \text{V}-++ \text{ u. } \text{VI}-+-: \alpha_1' = \dfrac{\alpha_2 s'}{R},\ \alpha_2' = -\dfrac{\alpha_1 s'}{R} - \dfrac{\alpha_3 s'}{T},\ \alpha_3' = \dfrac{\alpha_2 s'}{T}; \\ \text{VII}--+ \text{ u. } \text{VIII}---: \alpha_1' = -\dfrac{\alpha_2 s'}{R},\ \alpha_2' = \dfrac{\alpha_1 s'}{R} - \dfrac{\alpha_3 s'}{T},\ \alpha_3' = \dfrac{\alpha_2 s'}{T}. \end{cases}$$

Wir wollen nun zeigen, dass, wenn man die Werthe der irrationalen Ausdrücke in den Formeln (6.) gemäss der analytischen Fortsetzung bestimmt, sich von selbst diejenigen Aenderungen der Vorzeichen ergeben, welche den modificirten Formeln (7.) entsprechen. Bei der Annahme einer allgemeinen Lage des Coordinatensystems, wie wir es zunächst voraussetzen, können in dem betrachteten Punkte die Richtungscosinus α, β, γ ihr Zeichen nicht ändern. Bei α_1' tritt also, nach den Formeln (6.) immer und nur dann ein Zeichenwechsel ein, wenn $\frac{s'}{R}$ sein Zeichen umkehrt; dieses findet aber, da $\frac{s'}{R} = \frac{\varepsilon}{dt}$ ist, wo ε den Contingenzwinkel bedeutet, nach S. 233, beim Auftreten einer Rückkehrtangente statt, also gerade dann, wenn nach den Gleichungen (7.) die rechte Seite des ersten Systems der *Frenet-Serret*schen Formeln mit dem negativen Vorzeichen zu nehmen ist. Ebenso findet man, dass α_3' im Fall einer Rückkehrschmiegungsebene sein Zeichen umkehrt; beachtet man aber, dass der Ausdruck T in den Entwickelungen des Herrn *Kneser* und in den unsrigen mit dem gleichen Vorzeichen behaftet ist, so sieht man leicht ein, dass, bei der Annahme eines Zeichenwechsels der irrationalen Glieder gemäss der analytischen Fortsetzung, α_3' den der Formel (6.) entgegengesetzten Werth erhalten muss im Fall einer Zeichenänderung von s', also (S. 231) im Falle eines Rückkehrpunktes, was ebenfalls mit den Resultaten (7.) übereinstimmt. Auf ähnliche Weise lässt sich zeigen, dass auch das zweite System der *Frenet-Serret*schen Formeln in Werthe übergeht, welche den Gleichungen (7.) entsprechen.

Dass, wenn man das Vorzeichen der irrationalen Glieder gemäss der analytischen Fortsetzung bestimmt, sich auch bei einer speciellen Lage des Coordinatensystems die den Gleichungen (7.) entsprechenden Aenderungen von selbst ergeben, wird aus Folgendem ersichtlich. Es sei etwa für den betrachteten Punkt $\alpha_2 = 0$. Wir führen dann ein neues Coordinatensystem ein und bezeichnen in Bezug auf dasselbe die Richtungscosinus der x-Axe des alten Systems durch f, g, h, die Richtungscosinus α, β, γ durch Ueberstreichen. Dann ist

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= f\bar{\alpha}_2 + g\bar{\beta}_2 + h\bar{\gamma}_2, \\ \alpha_1' &= f\bar{\alpha}_1' + g\bar{\beta}_1' + h\bar{\gamma}_1', \end{aligned}$$

wobei f, g, h immer so bestimmt werden können, dass alle $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}$ von Null

verschieden sind. Die Gleichung

$$\alpha_1' = \frac{\alpha_2 s'}{R}$$

geht dann über in

$$(8.) \qquad f\bar{\alpha}_1' + g\bar{\beta}_1' + h\bar{\gamma}_1 = (f\bar{\alpha}_2 + g\bar{\beta}_2 + h\bar{\gamma}_2)\frac{s'}{R}.$$

Da $\bar{\alpha}_2, \bar{\beta}_2, \bar{\gamma}_2$ von Null verschieden sind, so ergeben sich, wie wir gesehen haben, wenn man die Werthe der irrationalen Ausdrücke gemäss der analytischen Fortsetzung bestimmt, in den Relationen

$$(9.) \qquad \bar{\alpha}_1' = \frac{\bar{\alpha}_2 s'}{R}, \quad \bar{\beta}_1' = \frac{\bar{\beta}_2 s'}{R}, \quad \bar{\gamma}_1' = \frac{\bar{\gamma}_2 s'}{R}$$

diejenigen Vorzeichenänderungen, welche den Formeln (7.) entsprechen. Dasselbe wird offenbar der Fall sein bei jeder linearen homogenen Verbindung mit constanten Coefficienten, die wir aus den Gleichungen (9.) bilden können, also auch mit der Relation (8.), womit, da man diese Betrachtung für jede beliebige der *Frenet-Serret*schen Formeln aufstellen kann, unsere Behauptung bewiesen ist.

Die Entwickelungen dieses Paragraphen sind unter anderem von Wichtigkeit für die Untersuchung der Polarfläche einer Curve, da zur Herleitung der Gleichung derselben die *Frenet-Serret*schen Formeln benutzt werden. Enthält nämlich die Curve einen singulären Punkt und nimmt man an, dass die in den Formeln auftretenden Grössen s' und R immer das positive Vorzeichen haben sollen, wobei die übrigen auf S. 235 u. 236 formulirten Voraussetzungen für den, im Sinne des Wachsthums von t, vor dem singulären Punkte liegenden Theil der Curve erfüllt sein mögen, so hat man für diesen die Formeln (6.) zu benutzen, für den jenseits des singulären Punktes liegenden dagegen, wenn die Richtungscosinus α, β, γ stetig bleiben sollen, die Gleichungen (7.) Wir erhalten also für die diesen beiden Intervallen entsprechenden Theile der Polarfläche verschiedene Gleichungen, oder bei denselben Gleichungen Unstetigkeit der Richtungscosinus; die Polarfläche ist gleichsam zerschnitten und wir müssen nachher in Gedanken die beiden Theile zusammenfügen, um uns ein genaues Bild von der Fläche machen zu können.

Trifft man dagegen die Annahme, dass die in den Formeln auftretenden Quadratwurzeln mit dem gemäss der analytischen Fortsetzung bestimmten Vorzeichen zu nehmen sind, so genügen die Formeln in der

Gestalt (6.) für das ganze betrachtete Intervall der Curve und wir erhalten eine einzige Gleichung für die ganze Polarfläche, wodurch die Untersuchung jedenfalls bedeutend vereinfacht wird.

Ehe wir jedoch an eine derartige Anwendung unserer Untersuchungen gehen, müssen wir noch die analytischen Kriterien für das Auftreten von Singularitäten in unendlich fernen Punkten einer Raumcurve aufstellen.

§ 4.

Analytische Kriterien für die Art eines im Unendlichen liegenden Punktes.

Da die Art eines Curvenpunktes in Bezug darauf, ob Punkt, Tangente und Schmiegungsebene in ihm gewöhnliche oder Rückkehrelemente sind, eine projective Eigenschaft des betreffenden Punktes ist, so geht jeder Punkt bei einer Centralcollineation im Raume in einen Punkt von derselben Art über. Wir können daher die Art eines im Unendlichen liegenden Punktes durch die Art eines ihm collinear verwandten im Endlichen liegenden definiren. Sind Collineationscentrum, Collineationsebene und Verschwindungsebene beliebig im Endlichen gegeben, wobei nur die Collineationsebene nicht durch den betrachteten Punkt gehen darf, so kann man zu dem die Umgebung des zu untersuchenden unendlich fernen Punktes bildenden Theil der gegebenen Curve k den collinear verwandten k' construiren, der sich im Endlichen befinden wird.

Für das Auftreten eines im Unendlichen liegenden *Rückkehrpunktes* ist es offenbar nothwendig und hinreichend, dass die Coordinaten x, y, z, welche in dem betrachteten Punkt polar unstetig sind, den Sinn ihres Zu- oder Abnehmens ändern, d. h. x', y', z' ihr Zeichen nach Durchlaufung des Werthes ∞ umkehren.

Im Fall einer *Rückkehrtangente* des unendlich fernen Punktes der Curve k, also auch des entsprechenden im Endlichen liegenden Punktes der Curve k', hat die Schnittcurve der Tangenten an die letztere mit der Collineationsebene einen Rückkehrpunkt. Diese Curve ist aber nach dem Grundgesetz der Centralcollineation, dass sich entsprechende Geraden in der Collineationsebene schneiden, identisch mit der Curve, welche durch die Tangenten an die Curve k in der Collineationsebene ausgeschnitten wird; wir erhalten als Kriterium für das Auftreten einer Rückkehrtangente in einem unendlich fernen Punkt, dass A, B, C ihr Zeichen umkehren, was sich durch Betrachtungen ergiebt, die den für einen im Endlichen liegenden Punkt

angestellten*) ganz analog sind; der einzige Unterschied ist der, dass für letzteren alle ihr Zeichen wechselnden Grössen durch den Werth 0 hindurchgehen, während für einen im Unendlichen liegenden Punkt der Zeichenwechsel auch durch den Werth ∞ stattfinden kann.

Im Fall einer ***Rückkehrschmiegungsebene*** der Curve k' muss der Schnittpunkt der auf einander folgenden Schmiegungsebenen mit einer in der Collineationsebene liegenden festen Geraden ein Rückkehrpunkt sein. Die Spuren der Schmiegungsebenen in der Collineationsebene sind aber für entsprechende Punkte der Curven k und k' dieselben, wir erhalten auch für einen unendlich fernen Punkt, dass die Determinante Δ**) beim Auftreten einer Rückkehrschmiegungsebene ihr Zeichen wechseln muss, wenn der Punkt kein Rückkehrpunkt ist, dagegen behalten muss im Falle eines Rückkehrpunktes.

Wir können also die Bedingungen für das Auftreten von Rückkehrelementen in endlichen und unendlich fernen Punkten zusammenfassen und sagen:

Eine Curve besitzt dann und nur dann einen Rückkehrpunkt, wenn in einem allgemeinen Coordinatensystem x', y', z' ihr Zeichen wechseln, eine Rückkehrtangente, wenn $A = y'z'' - y''z'$, $B = z'x'' - z''x'$, $C = x'y'' - x''y'$ ihr Zeichen umkehren, eine Rückkehrschmiegungsebene, wenn im Falle keines Rückkehrpunktes $\Delta = \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}$ ***sein Zeichen ändert, im Falle eines Rückkehrpunktes dagegen behält. Die Zeichenänderung geschieht in einem im Endlichen liegenden Punkt immer durch den Werth 0, in einem unendlich fernen Punkt bei x', y', z' immer durch den Werth ∞, bei A, B, C und Δ durch die Werthe 0 oder ∞ hindurch.***

Statt der Zeichenänderung von x', y', z' und A, B, C kann man nach §§ 1 und 2 auch den Zeichenwechsel von $s' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$ und $E = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$ untersuchen, welche letzteren Ausdrücke den Vortheil gewähren, dass sie von der Lage des Coordinatensystems unabhängig sind.

---

*) *Meder*, a. a. O. S. 65 u. 66.

**) *Meder*, a. a. O. S. 77 u. 78.

§ 5.

Die Rückkehrkante der Polarfläche.

Die Entwickelungen der vorhergehenden Paragraphen gestatten uns in sehr einfacher Weise die Frage nach den singulären Punkten der Rückkehrkante der Polarfläche der gegebenen Curve zu beantworten. Die Rückkehrkante wird durch folgende Gleichungen bestimmt:

$$(\xi-x)\alpha_1+(\eta-y)\beta_1+(\zeta-z)\gamma_1=0,$$
$$(\xi-x)\alpha_2+(\eta-y)\beta_2+(\zeta-z)\gamma_2=R,$$
$$(\xi-x)\alpha_3+(\eta-y)\beta_3+(\zeta-z)\gamma_3=T\frac{R'}{s'},$$

wo ξ, η, ζ die laufenden Coordinaten bedeuten, während die übrigen Bezeichnungen nach § 3 gewählt sind. Es sind dieses die nach den *Frenet-Serret*schen Formeln umgestalteten Gleichungen dreier auf einander folgenden Normalebenen, welche Umgestaltung, wenn man die Werthe der in den Formeln auftretenden Quadratwurzeln gemäss der analytischen Fortsetzung bestimmt, nach § 3 auch dann gestattet ist, wenn in dem betrachteten Intervalle der Curve ein singulärer Punkt liegt. Aus diesen Gleichungen ergiebt sich, wenn man zur Abkürzung

$$T\frac{R'}{s'}=P \tag{10.}$$

setzt:

$$\xi = x+P\alpha_3+R\alpha_2,$$

und hieraus:

$$\xi'=\alpha_3\frac{PP'+RR'}{P}=\alpha_3\frac{\varrho\varrho'}{P}, \tag{11.}$$

wo ϱ den Radius der Schmiegungskugel bezeichnet. Ersetzt man hierin α_3 durch β_3 und γ_3, so erhält man die Formeln für η' und ζ' die Ableitung des Bogens der Rückkehrkante hat also die Gestalt:

$$\sigma'=\sqrt{\xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2}=\frac{\varrho\varrho'}{P}=\frac{\varrho\varrho'}{R}\cdot\frac{s'}{T}.$$

Im Fall eines Rückkehrpunktes der Rückkehrkante muss σ' sein Zeichen wechseln (S. 240), was offenbar eintritt, wenn einer der drei Ausdrücke $\varrho\varrho', R', s'/T$ oder alle drei zu gleicher Zeit ihr Zeichen umkehren. Ein Zeichenwechsel von s'/T bedeutet, wegen $\frac{s'}{T}=\frac{\omega}{dt}$ (S. 234.), dass der Punkt

der ursprünglichen Curve eine Rückkehrschmiegungsebene besitzt, ein Zeichenwechsel von $\varrho\varrho'$, dass der absolute Werth von ϱ ein Maximum oder Minimum ist, ein Zeichenwechsel von R', dass R, wenn man darunter die in § 2 definirte, bald positive bald negative Grösse versteht, ein Maximum oder Minimum ist. Diese letzte Bedingung können wir nach S. 235 noch anders formulieren und erhalten dann das Resultat:

Die Rückkehrkante der Polarfläche hat dann und nur dann einen Rückkehrpunkt, wenn für den entsprechenden Punkt der ursprünglichen Curve von den folgenden Bedingungen eine oder alle drei erfüllt sind: 1) Die Schmiegungsebene ist eine Rückkehrebene, 2) der absolute Werth des Radius der Schmiegungskugel ist ein Maximum oder Minimum, 3) der Werth des Krümmungsradius ist ein Maximum oder Minimum und der Krümmungsmittelpunkt bleibt dabei in der Schmiegungsebene auf derselben Seite der Curve.

Aus dem Ausdruck (11.) erhält man mit Benutzung der *Frenet-Serret*schen Formeln:

$$\xi'' = \alpha_3\left(\frac{\varrho\varrho'}{P}\right)' - \alpha_2\frac{R'\varrho\varrho'}{P^2},$$

$$\xi''' = \alpha_3\left[\left(\frac{\varrho\varrho'}{P}\right)'' - \frac{R'^2\varrho\varrho'}{P^3}\right] - \alpha_2\left[\left(\frac{R'\varrho\varrho'}{P^2}\right)' - \frac{s'}{T}\left(\frac{\varrho\varrho'}{P}\right)'\right] + \alpha_1\frac{s'}{R}\cdot\frac{R'\varrho\varrho'}{P^2},$$

nebst den entsprechenden Gleichungen für $\eta'', \zeta'', \eta''', \zeta'''$, die sich ergeben, wenn man α durch β und γ ersetzt.

Für das Auftreten einer Rückkehrtangente waren die folgenden Determinanten massgebend:

$$A = \eta'\zeta'' - \eta''\zeta' = \alpha_1\frac{s'\varrho^2\varrho'^2}{TP^2}, \quad B = \zeta'\xi'' - \zeta''\xi' = \beta_1\frac{s'\varrho^2\varrho'^2}{TP^2},$$

$$\Gamma = \xi'\eta'' - \xi''\eta' = \gamma_1\frac{s'\varrho^2\varrho'^2}{TP^2},$$

$$\sqrt{A^2+B^2+\Gamma^2} = \frac{s'}{T}\cdot\frac{\varrho^2\varrho'^2}{P^2}.$$

Nach S. 240 muss im Fall einer Rückkehrtangente der Rückkehrkante der letzte Ausdruck sein Zeichen wechseln, und dieses geschieht, wenn $\frac{s'}{T}$ sein Zeichen umkehrt, was wiederum (S. 234) die Bedingung für eine Rückkehrschmiegungsebene der ursprünglichen Curve ist.

Die Rückkehrkante der Polarfläche hat dann und nur dann eine Rückkehrtangente, wenn in dem entsprechenden Punkte der ursprünglichen Curve eine Rückkehrschmiegungsebene auftritt.

Bilden wir jetzt die folgende Determinante:

$$(12.) \qquad D = \begin{vmatrix} \xi' & \eta' & \zeta' \\ \xi'' & \eta'' & \zeta'' \\ \xi''' & \eta''' & \zeta''' \end{vmatrix} = \frac{s'}{R} \cdot \frac{\varrho\varrho'}{P} \cdot \frac{R'^2\varrho^2\varrho'^2}{P^4} = \frac{s'}{R} \cdot \sigma' \cdot \frac{R'^2\varrho^2\varrho'^2}{P^4},$$

wo σ' wieder die Ableitung des Bogens der Rückkehrkante der Polarfläche bedeutet. Dieser Ausdruck muss (S. 240) im Fall einer Rückkehrschmiegungsebene der Rückkehrkante sein Zeichen ändern, wenn σ' sein Zeichen behält, dagegen sein Zeichen behalten, wenn σ' sein Vorzeichen umkehrt; in beiden Fällen ist die Bedingung hierfür, dass $\frac{s'}{R}$ sein Zeichen wechselt. Wir erhalten also, da $\frac{s'}{R} = \frac{\varepsilon}{dt}$ ist, nach S. 233:

Die Rückkehrkante der Polarfläche hat dann und nur dann eine Rückkehrschmiegungsebene, wenn in dem entsprechenden Punkte der ursprünglichen Curve eine Rückkehrtangente auftritt.

Das Kriterium für die Rückkehrtangente und Rückkehrschmiegungsebene hätte man auch aus der schon von *Fourier**) gefundenen Thatsache folgern können, dass der Contingenzwinkel einer Curve gleich dem Torsionswinkel der Rückkehrkante der Polarfläche im entsprechenden Punkte ist, und umgekehrt.

Es scheint, als ob der Ausdruck (12.) ein unbestimmtes Vorzeichen hat, was der von Herrn *Kneser***) gefundenen Eigenschaft dieser Determinante widersprechen würde, durch ihr Vorzeichen die Unterscheidung rechts und links gewundener Raumcurven zu geben; dieser Widerspruch ist aber nur ein scheinbarer, denn wir können den Ausdruck nach der Gleichung (10.) umgestalten und erhalten dann

$$(13.) \qquad D = \frac{\varrho\varrho'}{RR'} \cdot \frac{s'^6\varrho^3\varrho'^2}{T^5R'^2},$$

wo nur noch die Factoren $\varrho\varrho'$ und RR' ein Wurzelzeichen enthalten; dieselben sind aber beim Wachsen der absoluten Werthe von ϱ und R immer positiv, beim Abnehmen derselben immer negativ, so dass in der That die Determinante D ein ganz bestimmtes Vorzeichen hat. Beachten wir, dass T und Δ, wegen $T\Delta = A^2+B^2+C^2$, dasselbe Vorzeichen haben müssen und

*) *Frenet,* sur les courbes à double courbure, Journal de mathématiques (I série) t. XVII p. 443.

**) *Kneser,* a. a. O. S. 100.

T in dem Ausdrucke (13.) in einer ungeraden Potenz auftritt, so können wir sagen:

Der Sinn der Windung der Rückkehrkante der Polarfläche stimmt mit dem Sinne der Windung der ursprünglichen Curve in dem entsprechenden Punkte überein, wenn in letzterer der Radius der Schmiegungskugel und der Krümmungsradius ihrem absoluten Werthe nach zu gleicher Zeit wachsen oder abnehmen; er ist ihm entgegengesetzt, wenn der eine dieser beiden Radien zu-, der andere abnimmt.

Sur quelques lignes liées à l'hélice cylindrique.

(Par M. *Geminiano Pirondini* à Parme.)

§ 1.

Soient: L, L_0, L_1, L_2 une hélice cylindrique, la ligne de striction de la surface gauche des normales principales, le lieu des centres de courbure et le lieu des centres des sphères osculatrices; $\Lambda, \Lambda_0, \Lambda_1, \Lambda_2$ les projections de ces lignes sur le plan d'une section droite du cylindre contenant L (plan coordonné $z = 0$); K, K_0, K_1, K_2 les cylindres projetant les lignes données sur ce plan; l, l_0, l_1, l_2 les transformées planes des lignes L, L_0, L_1, L_2, c'est-à-dire les lignes qu'on obtient de celles-ci en étalant les cylindres sur un plan.

La théorie générale des lignes nous apprend que L_2 est aussi une hélice (l_1, l_2 sont deux droites) et que les normales principales de L sont tangentes au cylindre K_0 le long de L_0(Λ_0 est la développée de Λ). Mais à ces relations connues entre les lignes qu'on vient de considérer, on peut ajouter plusieurs d'autres relations très intéressantes, soit en elles-mêmes, soit en vue des applications dont elles sont susceptibles.

Tel est le but de ce travail.

$L_n(x_n, y_n, z_n)$ et $\Lambda_n(\xi_n, \eta_n)$ étant une quelconque des lignes L, L_0, L_1, L_2 et $\Lambda, \Lambda_0, \Lambda_1, \Lambda_2$, désignons par s_n, k_n, r_n l'arc, le rayon de courbure et le rayon de torsion de L_n; par σ_n, ϱ_n l'arc et le rayon de courbure de la ligne plane Λ_n; par A_n et a_n deux points correspondants des lignes L_n, Λ_n; par Θ l'inclinaison constante de l'hélice L sur les génératrices du cylindre K.

Puisque Λ_0 est la développée de Λ, on a:

$$\sigma_0 + h = \varrho, \qquad \frac{d\sigma_0}{\varrho_0} = \frac{d\sigma}{\varrho},$$

h étant une constante.

On obtient d'ici:

$$\varrho_0 = \varrho \frac{d\sigma_0}{d\sigma} = \varrho \frac{d\varrho}{d\sigma};$$

d'ailleurs

$$z_0 = z = \varrho \cdot \cot\Theta.$$

On a donc les équations:

$$(1.)\qquad \begin{cases} \varrho_0 = \varrho\,\varrho', \\ \sigma_0 + h = \varrho, \\ z_0 = \sigma\cot\Theta. \end{cases}$$

Le segment aa_0 est le rayon de courbure de Λ et aa_1 le rayon de courbure de l'hélice L. On a donc:

$$(2.)\qquad \begin{cases} aa_0 = \varrho, \\ aa_1 = k = \dfrac{\varrho}{\sin^2\Theta}, \\ a_0a_1 = \varrho\cot^2\Theta. \end{cases}$$

En désignant par $(\cos\alpha, \cos\beta)$, $(\cos\lambda, \cos\mu)$ les cosinus directeurs de la tangente et de la normale de Λ, on a:

$$\xi_1 = \xi + \frac{\varrho}{\sin^2\Theta}\cos\lambda; \qquad \eta_1 = \eta + \frac{\varrho}{\sin^2\Theta}\cos\mu.$$

Si donc on soumet ces relations aux calculs habituels et si l'on remarque de plus que $z_1 = z$, on trouve les équations:

$$(3.)\qquad \begin{cases} \varrho_1 = \dfrac{\varrho}{\sin^2\Theta}\cdot\dfrac{(\varrho'^2+\cos^4\Theta)^{\frac{3}{2}}}{(\varrho'^2+\cos^4\Theta) - \varrho\varrho''\cos^2\Theta}, \\ \sigma_1 = \dfrac{1}{\sin^2\Theta}\cdot\int\sqrt{\varrho'^2+\cos^4\Theta}\cdot d\sigma, \\ z_1 = \sigma\cdot\cot\Theta. \end{cases}$$

On a de même:

$$\xi_1 = \xi_0 + \varrho\cot^2\Theta\cdot\cos\alpha_0 = \xi_0 + (\sigma_0+h)\cot^2\Theta\cdot\cos\alpha_0,$$
$$\eta_1 = \eta_0 + \varrho\cot^2\Theta\cdot\cos\beta_0 = \eta_0 + (\sigma_0+h)\cot^2\Theta\cdot\cos\beta_0.$$

A ces formules on peut appliquer un calcul analogue au précédent. Que l'on remarque de plus que (en vertu de la deuxième relation (1.)) on a:

$$\frac{dz_1}{d\sigma_0} = \frac{dz}{d\sigma_0} = \frac{d\sigma}{d\sigma_0}\cot\Theta = \frac{\varrho}{\varrho_0}\cot\Theta = \frac{\sigma_0+h}{\varrho_0}\cot\Theta,$$

d'où:

$$dz_1 = \frac{(\sigma_0+h)\,d\sigma_0}{\varrho_0}\cdot\cot\Theta.$$

On obtient ainsi les équations:

$$(4.)\quad \begin{cases} \varrho_1 = \dfrac{1}{\sin^2\Theta}\cdot\dfrac{\{\varrho_0^2+(\sigma_0+h)^2\cos^4\Theta\}^{\frac{3}{2}}}{\{\varrho_0^2+(\sigma_0+h)^2\cos^4\Theta\}+\varrho_0\{\varrho_0-(\sigma_0+h)\varrho_0'\}\cos^2\Theta}, \\ \sigma_1 = \dfrac{1}{\sin^2\Theta}\displaystyle\int\frac{\sqrt{\varrho_0^2+(\sigma_0+h)^2\cos^4\Theta}}{\varrho_0}\,d\sigma_0, \\ z_1 = \cot\Theta\displaystyle\int\frac{(\sigma_0+h)\,d\sigma_0}{\varrho_0}. \end{cases}$$

Remarque. — On pouvait déduire les formules (4.) en modifiant les formules (3.) à l'aide des relations (1.).

D'après la théorie générale des lignes, on a pour le lieu L_2 des centres des sphères osculatrices de L:

$$(5.)\quad \begin{cases} k_2 = k+r\cdot\dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{dk}{ds}\cdot r\right), \\ r_2 = \dfrac{k}{r}\left\{k+r\cdot\dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{dk}{ds}\cdot r\right)\right\}, \\ s_2+\text{const}^{\text{e}}. = r\dfrac{dk}{ds}+\displaystyle\int\frac{k}{r}ds. \end{cases}$$

Et puisque ces formules donnent:

$$\frac{k_2}{r_2}=\frac{r}{k},$$

on conclut: Le lieu des centres des sphères osculatrices de l'hélice L est une autre hélice L_2. Entre les inclinaisons Θ, Θ_2 de ces courbes sur les génératrices des cylindres K, K_2 il y a la relation $\Theta_2+\Theta=\frac{\pi}{2}$.

Dans le cas général, entre les coordonnées z_2, z des points correspondants des lignes L_2, L on a la relation:

$$(6.)\qquad z_2 = z+r\frac{dk}{ds}\cdot\cos n,$$

n étant l'angle que la binormale de L fait avec l'axe des z.

En remarquant que dans notre cas:

$$k=\frac{\varrho}{\sin^2\Theta},\qquad r=\frac{\varrho}{\sin\Theta\cos\Theta},\qquad ds=\frac{d\sigma}{\sin\Theta},$$

$$k_2=\frac{\varrho_2}{\cos^2\Theta},\qquad r_2=\frac{\varrho_2}{\sin\Theta\cos\Theta},\qquad ds_2=\frac{d\sigma_2}{\cos\Theta},$$

$$n=\frac{\pi}{2}-\Theta,$$

les équations (5.), (6.) donnent:

$$(7.)\qquad \begin{cases} \varrho_2 = \dfrac{\varrho(\varrho\varrho'' + \varrho'^2 + \cos^2\Theta)}{\sin^2\Theta} = \dfrac{\varrho\{(\varrho\varrho')' + \cos^2\Theta\}}{\sin^2\Theta}, \\ \sigma_2 = \dfrac{\varrho\varrho' + \sigma\cos^2\Theta}{\sin^2\Theta}, \\ z_2 = z + \dfrac{\varrho\varrho'}{\sin\Theta\cos\Theta} = \dfrac{\varrho\varrho' + \sigma\cos^2\Theta}{\sin\Theta\cos\Theta}. \end{cases}$$

§ 2.

On trouve des équations (2.): $\dfrac{a a_0}{a_0 a_1} = \operatorname{tang}^2\Theta$, c'est-à-dire: Les points de la ligne de striction de la surface gauche des normales principales d'une hélice quelconque partagent les rayons de courbure de celle-ci en deux parties, dont le rapport est constant.

Trois points correspondants A, A_1, A_2 des lignes L, L_1, L_2 sont les sommets d'un triangle rectangle en A_1; c'est le même du triangle $a a_1 a_2$, car le côté $A A_1$ est parallèle à sa projection $a a_1$.

Si donc on remarque que $A A_2$ est le rayon R de la sphère osculatrice de L, on déduit sans peine:

$$R = A A_2 = \frac{\varrho\sqrt{\cos^2\Theta + \varrho'^2}}{\sin^2\Theta \cdot \cos\Theta},$$

$$(8.)\qquad A_1 A_2 = \frac{\varrho\varrho'}{\sin^2\Theta \cdot \cos\Theta}.$$

Si du point A_1, on mène une droite parallèle au plan $z = 0$, coupant $A_2 a_2$ en M, la troisième équation (7.) donne:

$$z_2 - z = A_2 M = \frac{\varrho\varrho'}{\sin\Theta\cos\Theta}.$$

On a donc:

$$(9.)\qquad A_1 M = a_1 a_2 = \frac{\varrho\varrho'}{\sin^2\Theta}$$

et conséquemment:

$$(10.)\qquad a a_2 = \frac{\varrho\sqrt{1 + \varrho'^2}}{\sin^2\Theta}.$$

En posant $A_1 A_2 = \text{constante} = m$, l'équation (8.) donne:

$$\varrho = \sqrt{2m\sin^2\Theta\cos\Theta \cdot \sigma + n},$$

n étant une constante. Si donc on remarque que $A_1 A_2$ représente la distance entre les normales principales correspondantes des hélices L, L_2, on a le théorème:

Les normales principales des hélices L, L_2:

1°. coïncident entre elles, seulement quand L est une hélice circulaire;

2°. sont à une distance constante, seulement quand la section droite du cylindre K contenant L est une développante de cercle.

Dans le premier cas L_2 est aussi une hélice circulaire; dans le deuxième cas l'hélice L_2 est tracée sur un cylindre dont la section droite est une développante de cercle (§ 7).

Si l'on remarque que dans l'équation (9.) le numérateur $\varrho\varrho'$ est le rayon de courbure ϱ_0 de A_0, on a:

$$A_1M = \frac{\varrho_0}{\sin^2\Theta}.$$

Donc: Si sur le cylindre K_0 contenant la ligne de striction L_0 on décrit une hélice coupant les génératrices sous l'angle Θ, le rayon de courbure de cette hélice est égal à la distance entre les génératrices correspondantes des cylindres K_1, K_2.

L'équation (10.), en supposant $aa_2 = \text{constante} = m$, donne:

$$\frac{\varrho\, d\varrho}{\sqrt{m^2\sin^4\Theta - \varrho^2}} = d\sigma,$$

d'où par intégration:

$$\varrho = \sqrt{m^2\sin^4\Theta - \sigma^2}.$$

Donc: Les sections droites A, A_2 des cylindres contenant l'hélice donnée L et l'hélice L_2, lieu des centres des sphères osculatrices, ont les points correspondants à une distance constante en deux cas seulement: quand l'hélice L est circulaire, ou bien quand elle est tracée sur un cylindre dont la section droite est une cycloïde.

Peut-on avoir $\varrho_2 = m\varrho$, m étant une constante?

La première équation (7.), en force de cette condition, donne:

$$(\varrho\varrho')' = m\sin^2\Theta - \cos^2\Theta,$$

d'où, après deux intégrations successives:

$$(11.) \qquad \varrho = \sqrt{(m\sin^2\Theta - \cos^2\Theta)\sigma^2 + a\sigma + b},$$

a et b étant des constantes.

Telle est l'équation intrinsèque de la section droite A du cylindre contenant l'hélice demandée.

Entre les lignes de la famille (11.) on trouve: la spirale logarithmique, quand $a = b = 0$; la développante de cercle, quand $m = \cot^2\Theta$; les courbes cycloïdales, quand $m < \cot^2\Theta$ (épicycloïde pour $m < -1$, cycloïde pour $m = -1$, hypocycloïde pour $\cot^2\Theta > m > -1$).

Peut-il être $\sigma_2 = m\sigma + n$, m et n étant des constantes? La deuxième équation (7.) donne:

$$\varrho\varrho' = (m\sin^2\Theta - \cos^2\Theta)\sigma + n\sin^2\Theta;$$

d'où par intégration:

$$\varrho = \sqrt{(m\sin^2\Theta - \cos^2\Theta)\sigma^2 + 2n\sin^2\Theta \cdot \sigma + a},$$

a étant une constante.

On trouve donc ici les mêmes lignes que celles du problème précédent.

Si l'on désigne par Θ_0 et Θ_1 les inclinaisons des courbes L_0 et L_1 sur les génératrices des cylindres K_0 et K_1, les équations (1.), (3.) donnent:

$$(12.) \qquad \operatorname{tang}\Theta_0 = \frac{d\sigma_0}{dz_0} = \varrho' \operatorname{tang}\Theta; \qquad \operatorname{tang}\Theta_1 = \frac{d\sigma_1}{dz_1} = \frac{\sqrt{\varrho'^2 + \cos^4\Theta}}{\sin\Theta\cos\Theta}.$$

Si donc on élimine ϱ' entre ces égalités, on arrive à la conclusion:

Les trois angles Θ, Θ_0, Θ_1 sont liés entre eux par la relation finie:

$$\operatorname{tang}^2\Theta_1 \sin^4\Theta = \operatorname{tang}^2\Theta_0 + \sin^2\Theta\cos^2\Theta.$$

L'angle Θ est constant. Il suit que les angles Θ_0, Θ_1 sont tous les deux constants, quand un seul d'entr'eux est donné constant, ou bien qund $\Theta_0 = \Theta_1$, ou bien quand $\operatorname{tang}\Theta_0 = a \cdot \operatorname{tang}\Theta_1$, a étant une constante. Dans tout ces cas les relations (12.) donnent l'égalité:

$$\varrho = m\sigma + n,$$

qui définit pour Δ une spirale logarithmique.

On a donc le théorème: Quand on pose une des conditions:

1°. la ligne de striction L_0 est une hélice,

2°. le lieu des centres de courbure L_1 est une hélice,

3°. les lignes L_0, L_1 coupent les génératrices des cylindres K_0, K_1 sous des angles égaux,

4°. les lignes L_0, L_1 coupent les génératrices des cylindres K_0, K_1 sous des angles dont les tangentes sont proportionnelles,

les deux hélices L, L_2 et les deux lignes L_0, L_1 sont quatre hélices cylindro-coniques.

§ 3.

En considérant les six lignes Λ, Λ_0 Λ_1 Λ_2, l_0, l_1, on a que lorsqu'on donne, d'une manière arbitraire, une des quatre courbes Λ, Λ_0, l_0, l_1, on peut déterminer les autres cinq lignes, par des simples quadratures.

Cas I. Si l'on suppose d'avoir:

$$\varrho = f(\sigma), \tag{13.}$$

les équations (1.) donnent:

$$\sigma_0 + h = \varrho = f(\sigma),$$

c'est-à-dire:

$$\sigma_0 + h = f(z_0 \operatorname{tang} \Theta). \tag{14.}$$

Puisqu'on à:

$$\varrho' = f'(\sigma) = f'(z_1 \operatorname{tang} \Theta); \qquad d\sigma = dz_1 \cdot \operatorname{tang} \Theta$$

la deuxième équation (3.) donne:

$$\sigma_1 = \frac{1}{\sin \Theta \cos \Theta} \int \sqrt{f'^2(z_1 \operatorname{tang} \Theta) + \cos^4 \Theta} \cdot dz_1. \tag{15.}$$

On a donc le théorème:

Lorsque la section droite du cylindre contenant l'hélice donnée L est représentée par l'equation intrinsèque (13.).

Les sections droites Λ_0, Λ_1, Λ_2 des autres cylindres K_0, K_1, K_2 sont représentées par l'ensemble des deux premières équations (1.), (3.), (7.), pourvu que l'on y remplace ϱ par sa valeur (13.). La ligne l_0, transformée plane de la ligne de striction L_0, est représentée par l'équation cartésienne (14.) La ligne l_1, transformée plane du lieu des centres de courbure de L, est représentée par l'équation cartésienne (15.).

Ce théorème fait voir que lorsqu'on donne la ligne Λ, les autres lignes Λ_0, Λ_1, Λ_2, l_0, l_1 résultent tout à fait déterminées.

Les équations (13.), (14.) démontrent que, à un facteur près, la ligne L (en coordonnées intrinsèques) et la ligne l_0 (en coordonnées cartésiennes) sont représentées par la même équation.

Quand $\Theta = \frac{\pi}{4}$, l'identité des deux équations a lieu d'une manière absolue. Cette remarque conduit aussitôt à une construction géométrique de l_0, lorsque Λ est donnée d'avance.

Que l'on fasse rouler, sans glisser, la ligne Λ sur l'axe des z_0 et que l'on prenne, à chaque position, le centre de courbure correspondant au point de contact. On obtient ainsi une certaine ligne λ_0; en altérant les

ordonnées z_0 de celle-ci dans un rapport constant convenable ($\operatorname{tang}\Theta$), on obtient la ligne cherchée l_0.

La même remarque donne quelquefois la ligne l_0 sans employer de calcul. En supposant, par exemple:

$$f(\sigma) = a\sigma, \quad \sqrt{m\sigma+n}, \quad \sqrt{a-b\sigma^2}\ (b>0), \quad \frac{a^2}{\sigma},$$

$$\frac{\sigma^2+a^2}{a}, \quad \frac{a}{2}\left(e^{\frac{\sigma}{a}}+e^{-\frac{\sigma}{a}}\right), \ \ldots \text{ etc.}$$

on déduit respectivement:

$$\sigma_0+h = a\operatorname{tang}\Theta\cdot z_0, \quad \sqrt{m\operatorname{tang}\Theta\cdot z_0+n}, \quad \sqrt{a-b\operatorname{tang}^2\Theta\cdot z_0^2}, \quad \frac{a^2\cot\Theta}{z_0},$$

$$\frac{z_0^2\operatorname{tang}^2\Theta+a^2}{a}, \quad \frac{a}{2}\left(e^{\frac{z_0\operatorname{tang}\theta}{a}}+e^{-\frac{z_0\operatorname{tang}\theta}{a}}\right), \ \ldots \text{ etc.}$$

Et vice versa.

On peut donc énoncer le théorème: Lorsque la section droite A du cylindre contenant l'hélice donnée est une spirale logarithmique, une développante de cercle, une courbe cycloïdale, une clotoïde, une chaînette ordinaire, une chaînette d'égale résistance, ... etc. etc.,
la transformée plane l_0 de la ligne de striction L_0 est respectivement une droite (en effet L_0 est, dans ce cas, une hélice), une parabole avec l'axe coïncidant avec une des génératrices du cylindre K_0, une ellipse, une hyperbole équilatère avec un des asymptotes coïncidant avec une génératrice de K_0, une parabole dont l'axe est superposé à une section droite de K_0, une courbe déduisible de la chaînette ordinaire en altérant les ordonnées z_0 dans un rapport constant convenable, ... etc. etc.

Et vice versa.

Si l'on suppose $f(\sigma)=a\sigma+b$, on trouve d'après les formules (14.), (15.):

$$\sigma_0 = a\operatorname{tang}\Theta\cdot z_0+b; \qquad \sigma_1 = \frac{\sqrt{a^2+\cos^4\Theta}}{\sin\Theta\cos\Theta}\,z_1;$$

ce sont les équations de deux droites.

Et puisque, en appliquant les considérations développées en ce paragraphe, on trouve, dans ce cas, que ϱ_0, ϱ_1, ϱ_2 sont des fonctions linéaires des arcs σ_0, σ_1, σ_2, on a: Quand L est une hélice cylindro-conique, L_0, L_1, L_2 sont aussi des hélices cylindro-coniques (Théorème connu).

L soit une hélice sphérique.

Une ligne gauche est sphérique quand le rayon des sphères oscula-

trices est constant, le rayon de courbure étant variable. Si donc m est le rayon de la sphère contenant L, on doit avoir (§ 2):

$$\frac{\varrho\sqrt{\cos^2\Theta+\varrho'^2}}{\sin^2\Theta\cos\Theta}=m.$$

Il suit d'ici:

$$\frac{\varrho d\varrho}{\sqrt{m^2\sin^4\Theta-\varrho^2}}=\cos\Theta\cdot d\sigma,$$

d'où par intégration:

$$\varrho=\sqrt{m^2\sin^4\Theta-\cos^2\Theta\cdot\sigma^2}.$$

Les formules de ce paragraphe, appliquées à notre cas, donnent:

$$\varrho_0=\sqrt{m^2\sin^4\Theta\cos^2\Theta-(\sigma_0+h)^2\cdot\cos^2\Theta};\qquad\frac{(\varrho_0+h)^2}{m^2\sin^4\Theta}+\frac{z_0^2}{m^2\sin^2\Theta}=1.$$

Donc: Une hélice sphérique est tracée sur un cylindre ayant une épicycloïde pour section droite A. La ligne de striction L_0 s'obtient en enveloppant le plan d'une certaine ellipse sur un cylindre K_0 ayant pour section droite A_0 une épicycloïde égale à la primitive A.

Si l'on calcule le rayon de courbure r_0 de l_0 d'après la formule (14.), et si l'on pose la condition $\frac{r_0}{\varrho}=a$, on obtient (en remarquant que $z_0\operatorname{tang}\Theta=z\operatorname{tang}\Theta=\sigma$):

$$\frac{(1+\varrho'^2\operatorname{tang}^2\Theta)^{\frac{3}{2}}}{\varrho''\operatorname{tang}^2\Theta}=a\varrho.$$

Si l'on regarde ϱ comme la variable indépendante et $\varrho'=p$ comme la fonction, cette équation se réduit à:

$$\frac{d\varrho}{\varrho}=a\operatorname{tang}^2\Theta\cdot\frac{p\,dp}{(1+p^2\operatorname{tang}^2\Theta)^{\frac{3}{2}}},$$

d'où par intégration:

$$\log(c\varrho)=-\frac{a}{\sqrt{1+p^2\operatorname{tang}^2\Theta}}.$$

On obtient d'ici:

$$\operatorname{tang}\Theta\cdot\frac{\log(c\varrho)\cdot d\varrho}{\sqrt{a^2-(\log\cdot c\varrho)^2}}=d\sigma,$$

d'où par intégration:

(16.) $$\operatorname{tang}\Theta\int\frac{\log(c\varrho)\cdot d\varrho}{\sqrt{a^2-(\log\cdot c\varrho)^2}}=\sigma+m.$$

Par conséquent:

$$(17.) \qquad \int \frac{\log\{c(\sigma_0+h)\}\,d\sigma_0}{\sqrt{a^2-\{\log\cdot c(\sigma_0+h)\}^2}} = z_0+m\cot\Theta.$$

On a ainsi le théorème: Les rayons de courbure correspondants ϱ, r_0 des lignes Δ, l_0 ont un rapport constant $\left(\frac{r_0}{\varrho}=a\right)$, quand Δ est définie par l'équation intrinsèque (16.) et l_0 par l'équation cartésienne (17.).

Deux lignes représentées par les mêmes équations, l'une en coordonnées intrinsèques et l'autre en coordonnées cartésiennes, peuvent-elles être semblables ou égales?

Les lignes demandées doivent être représentées par les équations (16.), (17.), quand on y suppose $\operatorname{tang}\Theta = 1$; et de plus la condition $r_0 = a\varrho$ doit être accompagnée par l'autre $ds_0 = a\,d\sigma$.

Cette dernière condition (à cause de l'égalité (14.) et da la condition $\operatorname{tang}\Theta = 1$) se réduit à:

$$\sqrt{1+\varrho'^2} = a;$$

cela porte à la conclusion que Δ doit être une spirale logarithmique. Mais puisque dans ce cas la ligne l_0 est une droite, il suit qu'on doit répondre négativement à la demande qu'on vient de faire.

On en conclut: Il n'existe aucune ligne plane qui puisse être représentée par la même équation, soit en coordonnées intrinsèques, soit en coordonnées cartésiennes.

§ 4.

Cas. II. La courbe Δ_0 soit représentée par l'équation intrinsèque:

$$(18.) \qquad \varrho_0 = F(\sigma_0).$$

Puisque la ligne Δ_0 est la développée de Δ, on a:

$$d\sigma = \frac{\varrho\,d\sigma_0}{\varrho_0}.$$

Si donc on a recours aux équations (1.), on obtient:

$$(19.) \qquad \begin{cases} \varrho = \sigma_0+h \\ \sigma = \int \frac{(\sigma_0+h)\,d\sigma_0}{F(\sigma_0)}, \end{cases}$$

h étant une constante convenable.

Dans les équations (7.) on peut introduire les éléments relatifs à la ligne donnée Λ_0. En remarquant qu'on a les relations (19.) et les autres:

$$\varrho \frac{d\varrho}{d\sigma} = \varrho_0; \qquad \frac{d}{d\sigma}\left(\varrho \frac{d\varrho}{d\sigma}\right) = \frac{d\varrho_0}{d\sigma} = \frac{F(\sigma_0)F'(\sigma_0)}{\sigma_0 + h},$$

on trouve:

$$(20.) \qquad \begin{cases} \varrho_2 = \dfrac{F(\sigma_0)F'(\sigma_0)}{\sin^2\Theta} + \cot^2\Theta \cdot (\sigma_0 + h), \\ \sigma_2 = \dfrac{F(\sigma_0)}{\sin^2\Theta} + \cot^2\Theta \cdot \displaystyle\int \frac{\sigma_0 + h}{F(\sigma_0)} \cdot d\sigma_0. \end{cases}$$

Et puisque $z_0 = z = \sigma\cot\Theta$, la deuxième équation (19.) donne:

$$(21.) \qquad z_0 = \cot\Theta \int \frac{(\sigma_0 + h)\, d\sigma_0}{F(\sigma_0)}.$$

On a donc le théorème:

Si la section droite Λ_0 du cylindre contenant la ligne de striction L_0 est représentée par l'équation intrinsèque (18.):

Les lignes Λ_1 et l_1 sont déterminées par les deux premières et par les deux dernières équations (4.), pourvu que l'on remplace ϱ_0 par sa valeur (18.). La section droite Λ du cylindre contenant L est représentée par les équations (19.). La section droite Λ_2 du cylindre contenant le lieu des centres des sphères osculatrices est définie par les équations (20.). La ligne l_0, transformée plane de la ligne de striction L_0, est représentée par l'équation (21.).

Il suit d'ici que, lorsqu'on se donne arbitrairement la ligne Λ_0, aucune des lignes $\Lambda, \Lambda_1, \Lambda_2, l_0, l_1$ ne résulte déterminée d'une manière unique.

En supposant $F(\sigma_0) = \text{constante} = m$ dans les formules de ce paragraphe, on trouve:

$$\varrho_2 = (\sigma_0 + h)\cot^2\Theta; \quad \sigma_2 = \frac{m}{\sin^2\Theta} + \frac{\cot^2\Theta}{2m}(\sigma_0 + h)^2,$$

d'où il suit:

$$\varrho_2 = \sqrt{\frac{2m}{\operatorname{tang}^2\Theta}\sigma_2 - \frac{2m^2}{\sin^2\Theta \operatorname{tang}^2\Theta}}.$$

Donc: Quand l'hélice L est tracée sur un cylindre dont la section droite est une développante de cercle, l'hélice L_2 lieu des centres des sphères osculatrices, est placée sur un cylindre de la même nature (V. § 7).

Dans la même hypothèse, on trouve que la transformée plane l_0 de la ligne de striction L_0 est la parabole:

$$z_0 = \frac{\cot\Theta}{2m}(\sigma_0 + h)^2$$

(Cela confirme un résultat obtenu dans le § 3).

La section droite A_1 du cylindre K_1 est définie par l'équation intrinsèque qu'on obtient en éliminant σ_0 entre les équations:

$$\begin{cases} 2m\sin^2\Theta\cos^2\Theta\cdot\sigma_1 = \cos^2\Theta(\sigma_0+h)\sqrt{m^2+(\sigma_0+h)^2\cos^4\Theta} \\ \qquad\qquad + m^2\log\{(\sigma_0+h)\cos^2\Theta+\sqrt{m^2+(\sigma_0+h)^2\cos^4\Theta}\}, \\ \varrho_1 = \dfrac{1}{\sin^2\Theta}\dfrac{\{m^2+(\sigma_0+h)^2\cos^4\Theta\}^{\frac{3}{2}}}{(1+\cos^2\Theta)m^2+(\sigma_0+h)^2\cos^4\Theta}. \end{cases}$$

Enfin la transformée plane l_1, de la ligne L_1 est représentée par l'équation cartésienne:

$$2\sin^2\Theta\cos^2\Theta\cdot\sigma_1 = \cos^2\Theta\sqrt{2\operatorname{tang}\Theta(m+2\operatorname{tang}\Theta\cos^4\Theta\cdot z_1)z_1} + m\log\{\cos^2\Theta\sqrt{2\operatorname{tang}\Theta\cdot mz_1}+\sqrt{m^2+2\operatorname{tang}\Theta\cos^4\Theta\cdot mz_1}\}.$$

Y a-t-il des hélices, ayant une ligne plane pour lieu des centres de courbure?

Puisque cette condition est remplie quand $\varrho_1=\infty$, la première équation (4.) donne dans cette hypothèse:

$$(1+\cos^2\Theta)\varrho_0^2-\cos^2\Theta(\sigma_0+h)\cdot\varrho_0\varrho_0'+(\sigma_0+h)^2\cdot\cos^4\Theta = 0.$$

On obtient d'ici l'équation différentielle linéaire:

$$t'-\frac{2(1+\cos^2\Theta)}{(\sigma_0+h)\cos^2\Theta}t = (\sigma_0+h)\cos^2\Theta,$$

à l'aide de la transformation:

$$\varrho_0^2 = 2t.$$

En appliquant alors la méthode ordinaire d'intégration et les transformations portées par des calculs usuels, on trouve:

$$\varrho_0 = (\sigma_0+h)\sqrt{c(\sigma_0+h)^{\frac{2}{\cos^2\Theta}}-\cos^4\Theta}, \tag{22.}$$

c étant une constante.

En se bornant à la détermination de A, les équations (19.), à l'aide de la relation (22.), donnent:

$$\sigma = \int\frac{d\varrho}{\sqrt{c\varrho^{\frac{2}{\cos^2\Theta}}-\cos^4\Theta}} \tag{23.}$$

On voit donc qu'il y a une classe entière d'hélices juissant de la propriété dite; elles sont tracées sur des cylindres dont les sections droites A sont des lignes de la famille (23.).

Les équations (18.), (21.) démontrent qu'une ligne gauche L_0, choisie d'une façon arbitraire, ne peut pas être considérée (en général) comme la ligne de striction de la surface gauche des normales principales d'une certaine hélice.

On peut prendre arbitrairement le cylindre K_0; mais une fois fixé ceci, la ligne L_0 peut être décrite d'une infinité de manières.

Si, par exemple, la section droite A_0 du cylindre K_0 est la clotoïde:

$$\varrho_0 = F(\sigma_0) = \frac{a^2}{\sigma_0},$$

la ligne l_0, transformée plane de la ligne de striction, est représentée par l'équation:

$$z_0 = \frac{\cot\Theta}{a^2}\left(\frac{\sigma_0^3}{3} + \frac{h\sigma_0^2}{2}\right).$$

Il y a donc une infinité de lignes L_0 placées sur le cylindre susdit; pour $h = 0$, la transformée plane l_0 se réduit à une parabole cubique.

§ 5.

Cas III. La ligne l_0 soit représentée par une des équations:

$$\sigma_0 = \varphi(z_0), \tag{24.}$$

$$z_0 = \psi(\sigma_0). \tag{25.}$$

En éliminant σ_0 entre (14.) et (24.), on obtient:

$$f(z_0 \operatorname{tang}\Theta) = \varphi(z_0) + h,$$

d'où, en remplaçant z_0 par $z_0 \cot\Theta$:

$$f(z_0) = \varphi(z_0\cot\Theta) + h.$$

Conséquemment:

$$\varrho = \varphi(\sigma\cot\Theta) + h. \tag{26.}$$

En éliminant z_0 entre (21.) et (25.), on a:

$$\psi(\sigma_0) = \cot\Theta \int \frac{(\sigma_0 + h)\,d\sigma_0}{F(\sigma_0)},$$

d'où (en remarquant que $F(\sigma_0) = \varrho_0$):

$$\varrho_0 = \frac{\sigma_0 + h}{\psi'(\sigma_0)} \cdot \cot\Theta. \tag{27.}$$

Si l'on porte la valeur (26.) de ϱ dans les deux premières équations (3.) et la valeur (27.) de ϱ_0 dans les deux premières équations (4.), on obtient, après un calcul très facile:

$$\left\{\begin{aligned} \varrho_1 &= \frac{\cos\Theta}{\sin^3\Theta} \cdot \frac{\{\varphi(\sigma\cot\Theta) + h\}\{\varphi'^2(\sigma\cot\Theta) + \sin^2\Theta\cos^2\Theta\}^{\frac{3}{2}}}{\{\varphi'^2(\sigma\cot\Theta) + \sin^2\Theta\cos^2\Theta\} - \cos^2\Theta\{\varphi(\sigma\cot\Theta) + h\}\varphi''(\sigma\cot\Theta)} \\ &= \frac{\cos\Theta}{\sin^3\Theta} \cdot \frac{(\sigma_0 + h)\{1 + \sin^2\Theta\cos^2\Theta\,\psi'^2(\sigma_0)\}^{\frac{3}{2}}}{\psi'(\sigma_0)\{1 + \sin^2\Theta\cos^2\Theta\,\psi'^2(\sigma_0)\} + \cos^2\Theta(\sigma_0 + h)\cdot\psi''(\sigma_0)}, \\ \sigma_1 &= \frac{\cos\Theta}{\sin^3\Theta}\int \sqrt{\varphi'^2(\sigma\cot\Theta) + \sin^2\Theta\cos^2\Theta}\cdot d\sigma \\ &= \frac{1}{\sin^2\Theta}\int \sqrt{1 + \sin^2\Theta\cos^2\Theta\cdot\psi'^2(\sigma_0)}\cdot d\sigma_0. \end{aligned}\right. \tag{28.}$$

On déduit des équations (1.):

$$\varrho = \sigma_0 + h = \varphi(z_0) + h, \qquad \sigma = z_0 \operatorname{tang} \Theta.$$

Si donc on en fait la substitution dans les deux premières équations (7.), on arrive aux formules:

$$(29.)\quad \begin{cases} \varrho_2 = \dfrac{\cos^2\Theta}{\sin^4\Theta}[\sin^2\Theta + \varphi'^2(z_0) + \{\varphi(z_0)+h\}\varphi''(z_0)]\{\varphi(z_0)+h\}, \\ \sigma_2 = \dfrac{\cos\Theta}{\sin^3\Theta}[z_0\sin^2\Theta + \{\varphi(z_0)+h\}\varphi'(z_0)]. \end{cases}$$

Si l'on porte la valeur (26.) de ϱ dans les deux dernières équations (3.), et ensuite on élimine σ entre les équations qu'on va obtenir, on a:

$$(30.)\qquad \sigma_1 = \frac{1}{\sin^2\Theta}\int \sqrt{\varphi'^2(z_1) + \sin^2\Theta\cos^2\Theta}\cdot dz_1.$$

Si enfin dans les deux dernières équations (4.) on remplace ϱ_0 par sa valeur (27.), on trouve:

$$(31.)\quad \begin{cases} \sigma_1 = \dfrac{1}{\sin^2\Theta}\int \sqrt{1 + \sin^2\Theta\cos^2\Theta\cdot\psi'^2(\sigma_0)}\cdot d\sigma_0, \\ z_1 = \psi(\sigma_0). \end{cases}$$

On a donc le théorème:

Lorsque la ligne l_0, transformée plane de la ligne de striction L_0 est représentée par une des équations (24.), (25.), les lignes Λ et Λ_0 sont représentées par les équations intrinsèques (26.) et (27.). Les autres lignes Λ_1, Λ_2 sont représentées par l'ensemble des équations (28.), (29.). Enfin la ligne l_1 est représentée par l'équation cartésienne (30.) ou par l'ensemble des deux équations (31.).

Ce théorème fait voir que lorsqu'on se donne la ligne l_0, il y a seulement la ligne l_1 qui résulte déterminée d'une seule manière.

Quand $\sigma_0 = \varphi(z_0) = az_0 + b$, l'équation (26.) donne:

$$\varrho = a\cot\Theta\cdot\sigma + b + h.$$

Si donc on a recours à un théorème du paragraphe 3, on a: Lorsque la ligne de striction L_0 est une hélice, les quatre lignes L, L_0, L_1, L_2 sont des hélices cylindro-coniques (§ 2).

Les équations (25.), (27.) démontrent que la transformée plane l_0 de L_0 peut être prise arbitrairement; et à chaque forme de celle-ci correspond une infinité de cylindres K_0, sur lesquels on peut envelopper le plan de l_0 pour avoir la ligne de striction L_0.

Si, par exemple, on veut que la ligne plane l_0 soit la conique à centre:

$$z_0 = \psi(\sigma_0) = \sqrt{a + b\sigma_0^2},$$

le cylindre K_0 a pour section droite une courbe définie par l'équation:

$$\varrho_0 = \frac{(\sigma_0 + h)\sqrt{a + b\sigma_0^2}}{b\sigma_0} \cot\Theta.$$

Cette équation donne toute une famille de courbes, chacune caractérisée par une valeur particulière de la constante h.

Pour $h = 0$ et pour des valeurs négatives de b, l'équation précédente donne les courbes cycloïdales.

Peut-il-arriver que les lignes A_0, l_0 soient représentées (l'une en coordonnées intrinsèques ϱ_0, σ_0 et l'autre en coordonnées cartésiennes z_0, σ_0) par la même équation?

Si l'on a regard aux égalités (25.), (27.), on trouve la condition:

$$\psi(\sigma_0) \cdot \psi'(\sigma_0) = (\sigma_0 + h)\cot\Theta,$$

d'où par intégration:

$$z_0 = \psi(\sigma_0) = \sqrt{c + (\sigma_0 + h)^2 \cdot \cot\Theta}.$$

La propriété dont on vient de parler a donc lieu quand la section droite A_0 est la courbe:

$$\varrho_0 = \sqrt{c + (\sigma_0 + h)^2 \cdot \cot\Theta};$$

et dans ce cas la transformée plane l_0 de la ligne de striction L_0 est la conique:

$$z_0^2 - (\sigma_0 + h)^2 \cdot \cot\Theta = c.$$

§ 6.

Cas IV. La ligne l_1 soit représentée par l'équation:

(32.) $$\sigma_1 = \Phi(z_1).$$

En éliminant σ_1 entre (15.) et (32.), on obtient:

$$f'(z_1 \operatorname{tang}\Theta) = \cos\Theta\sqrt{\sin^2\Theta \cdot \Phi'^2(z_1) - \cos^2\Theta},$$

c'est-à-dire, en remplaçant z_1 par $z_1\cot\Theta$:

$$f'(z_1) = \cos\Theta\sqrt{\sin^2\Theta \cdot \Phi'^2(z_1\cot\Theta) - \cos^2\Theta}.$$

Et puisque $\varrho = f(\sigma)$, il résulte:

(33.) $$\varrho = \cos\Theta \int \sqrt{\sin^2\Theta \cdot \Phi'^2(\sigma\cot\Theta) - \cos\Theta^2} \cdot d\sigma.$$

Si l'on remarque que:

$$\varrho = z \cdot \operatorname{tang}\Theta = z_0 \cdot \operatorname{tang}\Theta; \qquad \varrho = \sigma_0 + h,$$

l'équation (33.) se réduit à l'autre:

$$(34.)\qquad \sigma_0+h=\sin\Theta\int\sqrt{\sin^2\Theta\cdot\Phi'^2(z_0)-\cos^2\Theta}\cdot dz_0,$$

h étant une constante arbitraire.

L'équation (33.) donne par dérivation:

$$\varrho'=\cos\Theta\sqrt{\sin^2\Theta\cdot\Phi'^2(\sigma\cot\Theta)-\cos^2\Theta};\quad \varrho''=\sin\Theta\cos^2\Theta\,\frac{\Phi'(\sigma\cot\Theta)\cdot\Phi''(\sigma\cot\Theta)}{\sqrt{\sin^2\Theta\cdot\Phi'^2(\sigma\cot\Theta)-\cos^2\Theta}};$$

de manière que, si l'on porte les valeurs de $\varrho, \varrho', \varrho''$ dans les deux premières équations (3.) et dans les deux premières équations (7.), on trouve:

$$(35.)\quad\begin{cases}\varrho_1=\dfrac{\cos^2\Theta\cdot\Phi'^3(\sigma\cot\Theta)\sqrt{\sin^2\Theta\cdot\Phi'^2(\sigma\cot\Theta)-\cos^2\Theta}\int\sqrt{\sin^2\Theta\Phi'^2(\sigma\cot\Theta)-\cos^2\Theta}\cdot d\sigma}{\sin\Theta\cdot\Phi'^2(\sigma\cot\Theta)\sqrt{\sin^2\Theta\cdot\Phi'^2(\sigma\cot\Theta)-\cos^2\Theta}-\cos^3\Theta\Phi'(\sigma\cot\Theta)\cdot\Phi''(\sigma\cot\Theta)\int\sqrt{\sin^2\Theta\Phi'^2(\sigma\cot\Theta)-\cos^2\Theta}\cdot d\sigma},\\ \sigma_1=\Phi(\sigma\cot\Theta),\end{cases}$$

$$(36.)\quad\begin{cases}\varrho_2=\dfrac{\cos^3\Theta}{\sin\Theta}\left\{\sin\Theta+\sin\Theta\Phi'^2(\sigma\cot\Theta)+\dfrac{\cos\Theta\cdot\Phi'(\sigma\cot\Theta)\Phi''(\sigma\cot\Theta)}{\sqrt{\sin^2\Theta\Phi'^2(\sigma\cot\Theta)-\cos^2\Theta}}\cdot\int\sqrt{\sin^2\Theta\cdot\Phi'^2(\sigma\cot\Theta)-\cos^2\Theta}\cdot d\sigma\right\}\cdot\\ \qquad\qquad\cdot\int\sqrt{\sin^2\Theta\cdot\Phi'^2(\sigma\cot\Theta)-\cos^2\Theta}\cdot d\sigma,\\ \sigma_2=\cot^2\Theta\left\{\sigma+\sqrt{\sin^2\Theta\cdot\Phi'^2(\sigma\cot\Theta)-\cos^2\Theta}\cdot\int\sqrt{\sin^2\Theta\cdot\Phi'^2(\sigma\cot\Theta)-\cos^2\Theta}\cdot d\sigma\right\}.\end{cases}$$

On a donc le théorème:

Lorsque la ligne l_1, transformée plane du lieu des centres de courbure, est représentée par l'équation (32.) les sections droites A, A_1, A_2 et la transformée plane l_0 de la ligne de striction L_0 sont représentées par les équations (33.), (35.), (36.) et (34.).

En portant la valeur (33.) de ϱ dans les deux premières équations (1.), on obtient:

$$(37.)\quad\begin{cases}\varrho_0=\cos^2\Theta\sqrt{\sin^2\Theta\cdot\Phi'^2(\sigma\cot\Theta)-\cos^2\Theta}\cdot\int\sqrt{\sin^2\Theta\cdot\Phi'^2(\sigma\cot\Theta)-\cos^2\Theta}\cdot d\sigma,\\ \sigma_0+h=\cos\Theta\int\sqrt{\sin^2\Theta\cdot\Phi'^2(\sigma\cot\Theta)-\cos^2\Theta}\,d\sigma.\end{cases}$$

Si l'on se rappelle enfin que quand $z_0=\psi(\sigma_0)$ est la ligne l_0, on a:

$$(38.)\qquad \varrho_0=\frac{\sigma_0+h}{\psi'(\sigma_0)}\cdot\cot\Theta,$$

on peut énoncer le théorème: Dans la même hypothèse, la courbe A_0, section droite du cylindre contenant la ligne de striction L_0, est définie par l'équation intrinsèque qu'on obtient en éliminant σ entre les équations (37.); ou bien par l'équation intrinsèque (38.), $\psi(\sigma_0)$ étant la fonction de σ_0

qu'on obtient de l'égalité (34.) en la résolvant (aprés l'intégration) par rapport à z_0.

Ces théorèmes font voir que lorsqu'on donne la ligne l_1, toutes les autres courbes Λ, Λ_0, Λ_1, Λ_2, l_0 résultent déterminées sans aucune incertitude.

Voici une application de ce dernier théorème.

La transformée plane l_1 soit la courbe représentée par l'équation:

$$\sigma_1 = \frac{1}{4m\sin^2\Theta}\Big\{2z_1\sqrt{4z_1^2+m^2\sin^2\Theta\cos^2\Theta} + m^2\sin^2\Theta\cos^2\Theta\cdot\log(2z_1+\sqrt{4z_1^2+m^2\sin^2\Theta\cos^2\Theta})\Big\}.$$

L'équation (34.) se réduit à:

$$\sigma_0+h = \frac{z_0^2}{m}$$

et celle-ci donne:

$$z_0 = \psi(\sigma_0) = \sqrt{m(\sigma_0+h)}.$$

Si donc on fait usage de l'équation (38.), on conclut que la section droite Λ_0 du cylindre contenant la ligne de striction L_0 est la courbe définie par l'équation:

$$\varrho_0 = \frac{2\cot\Theta}{\sqrt{m}}(\sigma_0+h)^{\frac{3}{2}}.$$

Conséquemment [formules (21.), (19.)] la transformée plane l_0 de la ligne de striction est la parabole:

$$z_0^2 = m(\sigma_0+h),$$

et la section droite Λ est la courbe définie par l'équation:

$$\varrho = \frac{\cot^2\Theta}{m}\sigma^2.$$

On reconnaît d'ici que Λ appartient à la famille des chaînettes.

Si $\sigma_1 = \Phi(z_1) = az_1+b$, l'équation (33.) donne:

$$\varrho = \sqrt{a^2\sin^2\Theta-\cos^2\Theta}\cdot\cos\Theta\cdot\sigma.$$

Par conséquent: Quand le lieu L_1 des centres de courbure de l'hélice L est une hélice, les quatre lignes L, L_0, L_1, L_2 sont des hélices cylindro-coniques (§2).

Une ligne gauche L_1, choisie d'une façon absolument arbitraire, ne peut pas être considérée comme le lieu des centres de courbure d'une certaine hélice. On peut cependant prendre arbitrairement la transformée plane l_1 d'une telle ligne L_1; et une fois qu'on a fixé l_1, il n'y a qu'un seul cylindre K_1 sur lequel on peut envelopper le plan de l_1 pour avoir la ligne L_1. Un tel cylindre a pour section droite la courbe définie par les équations (35.).

§ 7.

Si l'on remplace la ligne A représentée par l'équation (13.) par l'autre ligne définie par l'équation:

$$\varrho = f(\sigma)+c, \tag{39.}$$

(c étant une constante quelconque) l'équation (15.) reste invariée, tandis que la (14.) se réduit à l'autre:

$$\sigma_0+h-c = f(z_0\operatorname{tang}\Theta).$$

On a donc le théorème: Si l'on considère la série d'hélices tracées sur des cylindres dont les sections droites sont les courbes définies par l'équation (39.) et coupant les génératrices sous même angle, les transformées planes l_0 des lignes de striction L_0 sont identiques entre elles; les transformées planes l_1 des lieux des centres de courbure L_1 sont aussi identiques entre elles.

Remplaçons la courbe A par une quelconque de ses parallèles A_i; puisqu'on a:

$$\varrho_i = \varrho+c = f(\sigma)+c; \qquad \sigma_i = \sigma+c\int\frac{d\sigma}{\varrho} = \sigma+c\int\frac{d\sigma}{f(\sigma)},$$

c étant une constante, les équations (1.) donnent:

$$\begin{cases} \sigma_0 = c+f(\sigma), \\ z_0 = \left\{\sigma+c\int\frac{d\sigma}{f(\sigma)}\right\}\cot\Theta. \end{cases} \tag{40.}$$

On a ainsi le théorème: Quand l'hélice L est tracée sur un cylindre dont la section droite A est parallèle à la ligne:

$$\varrho = f(\sigma),$$

la ligne A_0 est invariable et la transformée plane l_0 de la ligne de striction L_0 est définie par les équations (40.).

Exemple. — Soit $f(\sigma) = \frac{a^2}{\sigma}$; les deux équations (40.) après l'élimination de σ, donnent:

$$2\operatorname{tang}\Theta(\sigma_0-c)^2\cdot z_0 = 2a^2\sigma-a^2c. \tag{41.}$$

Si l'on élimine la constante arbitraire c entre l'équation (41.) et sa dérivée par rapport à c on obtient:

$$\sigma_0 z_0 = -\tfrac{1}{8}\cot\Theta\cdot a^2.$$

On a donc: En faisant parcourir à A toute la série des parallèles à la clotoïde $\varrho = \frac{a^2}{\sigma}$, les lignes de striction L_0 enveloppent, sur le cylindre fixe K_0, une courbe dont la transformée plane est une hyperbole équilatère.

Les transformées planes l_0 de ces lignes L_0 sont des lignes du troisième ordre, réductibles à une hyperbole équilatère pour $c = 0$.

Remplaçons la courbe A par la développée de la ligne:

$$\varrho = f(\sigma).$$

Puisque le rayon de courbure et l'arc de A sont dans ce cas:

$$f(\sigma)f'(\sigma) \text{ et } f(\sigma),$$

on a, par l'application des équations (1.): Quand l'hélice L est tracée sur un cylindre dont la section droite A est la développée de la ligne $\varrho = f(\sigma)$, la ligne A_0 est la deuxième développée de celle-ci et la courbe l_0 est représentée par les equations:

$$\sigma_0 = f(\sigma)\cdot f'(\sigma); \qquad z_0 = f(\sigma)\cdot \cot\Theta.$$

Si, par exemple $\varrho = \frac{a^2}{\sigma}$, il résulte:

$$\sigma_0 = -\frac{a^4}{\sigma^3}; \qquad z_0 = \frac{a^2}{\sigma}\cot\Theta,$$

d'où:

$$\sigma_0 = -\frac{\operatorname{tang}^3\Theta}{a^2} z_0^3.$$

Donc: Quand l'hélice L est tracée sur un cylindre dont la section droite est la développée d'une clotoïde, la section droite du cylindre K_0 est la deuxième développée d'une telle clotoïde et la transformée plane l_0 de la ligne de striction L_0 est une parabole cubique.

La première équation (20.) peut s'écrire:

$$\varrho_2 = \frac{\varrho_0\varrho_0' + (\sigma_0 + h)\cos^2\Theta}{\sin^2\Theta}; \tag{42.}$$

et cette relation entre les rayons de courbure ϱ_2, ϱ_0 et l'arc σ_0 peut servir à la solution de quelques questions.

Si, par exemple, on suppose $\varrho_2 = \text{constante} = m$, on a:

$$\varrho_0\varrho_0' = m\sin^2\Theta - (\sigma_0 + h)\cos^2\Theta,$$

d'où par intégration:

$$\varrho_0 = \sqrt{c + 2m\sin^2\Theta\cdot\sigma_0 - (\sigma_0 + h)^2\cos^2\Theta},$$

c étant une constante.

Donc: Quand l'hélice L_2, lieu des centres des sphères osculatrices de L est circulaire, la ligne de striction L_0 est tracée sur un cylindre dont la section droite est une épicycloïde, et l'hélice L est placée sur un cylindre dont la section droite est une développante d'une épicycloïde.

Dans la formule (42.) $\varrho_0\varrho_0'$ représente le rayon de courbure ϱ_{00} de la développée de Λ_0 (deuxième développée Λ_{00} de Λ). D'ailleurs σ_0+h est le rayon de courbure de Λ; les trois rayons ϱ_{00}, ϱ, ϱ_2 sont donc liés entre eux par la relation linéaire:

$$\varrho_{00} = \varrho_2 \sin^2\Theta - \varrho\cos^2\Theta.$$

Si Λ est une développante de cercle, $\varrho_{00}=0$ et ϱ_2, ϱ vérifient l'égalité (§ 2):

$$\varrho_2 = \varrho\cot^2\Theta.$$

Si Λ est une développante quelconque d'une développante de cercle, ϱ_{00} = constante = a et ϱ_2, ϱ vérifient l'égalité du premier ordre:

$$\varrho_2\sin^2\Theta - \varrho\cos^2\Theta = a.$$

Si l'on applique les équations (7.) au cas:

$$\varrho = \sqrt{a+2b\sigma+c\sigma^2} \tag{43.}$$

(a, b, c étant des constantes), on obtient:

$$\varrho' = \frac{b+c\sigma}{\sqrt{a+2b\sigma+c\sigma^2}}, \qquad \varrho'' = \frac{ac-b^2}{(a+2b\sigma+c\sigma^2)^{\frac{3}{2}}}$$

et conséquemment:

$$\varrho_2 = \frac{c+\cos^2\Theta}{\sin^2\Theta}\sqrt{a+2b\sigma+c\sigma^2}, \qquad \sigma_2 = \frac{b+(c+\cos^2\Theta)\sigma}{\sin^2\Theta}$$

L'élimination de σ entre ces équations donne:

$$\varrho_2 = \sqrt{\frac{(a-2b^2)(c+\cos^2\Theta)+b^2c}{\sin^4\Theta} + 2b\cot^2\Theta\cdot\sigma_2 + c\sigma_2^2}. \tag{44.}$$

Donc: Lorsque la section droite du cylindre contenant l'hélice L est la ligne (43.), la section droite du cylindre contenant l'hélice L_2, lieu des centres des sphères osculatrices, est l'autre courbe (44.).

On peut dériver d'ici une foule de résultats très intéressants. Si l'on remarque que la famille de courbes (43.) comprend: le cercle ($b=c=0$), la spirale logarithmique ($a=b=0$), la développante de cercle ($c=0$), la cycloïde ($c=-1$), l'épicycloïde (c négatif et en valeur absolue <1), l'hypocycloïde (c negatif et en valeur absolue >1), on a: Quand l'hélice L est tracée sur un cylindre K dont la section droite est un cercle, une spirale logarithmique, une développante de cercle, une cycloïde, une épicycloïde, une hypocycloïde, l'hélice L_2 lieu des centres des sphères osculatrices est tracée sur un autre cylindre K_2 de la même nature que K.

Ueber die singulären Lösungen der algebraischen Differentialgleichungen höherer Ordnung.

(Von Herrn *M. Hamburger* in Berlin.)

Im 112. Bande dieses Journals S. 205ff. sind die singulären Lösungen der algebraischen Differentialgleichungen erster Ordnung in y als Function von x nach einem Verfahren behandelt worden, welches gestattet, aus der Gestalt der Entwickelung eines Theilers $y-\eta$ der Discriminante der Differentialgleichung in Beziehung auf y' nach Potenzen von $x-c$, wo c ein willkürlicher Werth ist, zu entscheiden, ob $y=\eta$ ein singuläres oder particuläres Integral, oder überhaupt kein Integral darstellt. Dem Verfahren lag ein Princip zu Grunde, das Herr *Fuchs* in seiner Arbeit „Ueber die Differentialgleichungen, deren Integrale feste Verzweigungspunkte besitzen“ *) angewandt hat. Diese Methode lässt eine Erweiterung zu auf die singulären Lösungen algebraischer Differentialgleichungen n-ter Ordnung, die in Form von Differentialgleichungen $(n-1)$-ter Ordnung ohne willkürliche Constante erscheinen. Ist $y^{(n-1)}-\eta$ ein Theiler der Discriminante Δ der gegebenen Differentialgleichung in Beziehung auf $y^{(n)}$, wo η eine Function von $x, y, y', \ldots, y^{(n-2)}$ bedeutet, so giebt die Entwickelung von $y^{(n-1)}-\eta$ nach Potenzen von $x-x_0$ für einen willkürlichen Werth von x_0 in gleicher Weise charakteristische Merkmale dafür, ob $y^{(n-1)}=\eta$ ein singuläres oder particuläres erstes Integral der Differentialgleichung ist, oder überhaupt kein erstes Integral darstellt. Hiermit sowie mit der geometrischen Bedeutung von $y^{(n-1)}=\eta$ in allen Fällen beschäftigt sich der erste Abschnitt. Im zweiten wird eine Darstellung von n von einander unabhängigen ersten Integralen in der Form $\varphi(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) = \text{const.}$ gegeben, worin φ nach Potenzen von $y^{(n-1)}-\eta$ mit von $x, y, y', \ldots, y^{(n-2)}$ abhängenden Coefficienten entwickelt ist, und es wird gezeigt, wie die Exponenten der

*) Sitzungsberichte der Berliner Akademie 1884, Bd. 32, S. 699ff.

niedrigsten Potenz in der Entwickelungsreihe ebenfalls für die Beziehung der Gleichung $y^{(n-1)} = \eta$ zur Differentialgleichung charakteristisch ist. Im Anschluss daran wird im dritten Abschnitt die Existenz von n ersten Integralen in der Form $F(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}, C) = 0$ abgeleitet, welche Gleichung vom m-ten Grade in C ist, falls m den Grad der Differentialgleichung in Bezug auf $y^{(n)}$ bedeutet, worin ferner der Coefficient von C^m gleich Eins und die Coefficienten der übrigen Potenzen in der Umgebung eines *willkürlichen* Werthsystems $x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ in nach ganzen positiven Potenzen von

$$x - x_0,\ y - y_0,\ y' - y_0',\ \ldots,\ y^{(n-1)} - y_0^{(n-1)}$$

fortschreitende Reihen entwickelt werden können. Eine solche Integralgleichung wird bei der weiteren Betrachtung zu Grunde gelegt und die Discriminante D von $F = 0$ in Beziehung auf C untersucht. Bezeichnen wir einen Theiler derselben mit $y^{(n-1)} - \eta'$, so zeigt sich, dass die Entscheidung darüber, ob $y^{(n-1)} = \eta'$ ein singuläres Integral der aus $F = 0$ hervorgehenden Differentialgleichung ist, durch dieselbe Beschaffenheit des Exponenten der niedrigsten Potenz von $y^{(n-1)} - \eta'$ in der Entwickelung von C nach Potenzen von $y^{(n-1)} - \eta'$ gegeben wird, die das ausschliessliche Kriterium dafür war, dass die Gleichung $y^{(n-1)} = \eta$, wo $y^{(n-1)} - \eta$ ein linearer Theiler der Discriminante Δ ist, eine singuläre Lösung ist. Es folgt daraus, dass die Gleichungen $\Delta = 0$ und $D = 0$ die singulären Lösungen zu gemeinsamen Wurzeln haben müssen. Während aber eine Bedingung dafür zu erfüllen ist, dass die Wurzeln von $\Delta = 0$ eine Differentialgleichung als erste Integrale befriedigen, ist umgekehrt mindestens eine Bedingung erforderlich, damit keine Wurzel von $D = 0$ ein Integral der Differentialgleichung sei.

Die Behandlung der Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung mit mehreren unabhängigen Variablen nach der gleichen Methode behalten wir uns für eine spätere Arbeit vor.

I.

Es sei

$$f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0 \tag{1.}$$

eine algebraische Differentialgleichung n-ter Ordnung für y als Function von x vom m-ten Grade in Bezug auf die n-te Ableitung von y nach x. Die Coefficienten der verschiedenen Potenzen von $y^{(n)}$ seien ganze rationale Functionen von $x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ ohne gemeinsamen Theiler. Als algebraische Gleichung in Bezug auf $y^{(n)}$ betrachtet, soll ferner die Gleichung (1.) in

dem Sinne irreductibel sein, dass f nicht in Factoren von gleicher Beschaffenheit wie f von niedrigerem als m-ten Grade in Bezug auf $y^{(n)}$ zerlegbar sei. Es ist dadurch ausgeschlossen, dass für willkürliche Werthe von $x, y, y' \ldots, y^{(n-1)}$ die beiden Gleichungen

$$(2.) \qquad f(x, y, y' \ldots, y^{(n)}) = 0, \qquad \frac{\partial f(x,y,y', \ldots, y^{(n)})}{\partial y^{(n)}} = 0$$

zugleich bestehen. Es sei

$$(3.) \qquad \Delta(x,y,y', \ldots, y^{(n-1)}) = 0$$

das Resultat der Elimination von $y^{(n)}$ zwischen den Gleichungen (2.), $y^{(n-1)} = \eta$ sei eine Wurzel dieser Gleichung, und $y^{(n)} = \zeta$ eine den Gleichungen (1.) und (2.) gemeinschaftliche Wurzel, wenn in denselben $y^{(n-1)}$ durch η ersetzt wird. η und ζ sind Functionen der Variablen $x,y,y', \ldots, y^{(n-2)}$. Wir können stets für diese Variablen Bereiche festsetzen, in denen η endlich und stetig bleibt und sich nicht verzweigt; die zugeordnete gemeinschaftliche Wurzel ζ sei zunächst ebenfalls in diesen Bereichen endlich vorausgesetzt, dann werden mehrere, etwa p der Gleichung (1.) genügende algebraische Functionen $y^{(n)}$ von $y^{(n-1)}$ mit von $x,y,y', \ldots, y^{(n-2)}$ abhängenden Coefficienten für $y^{(n-1)} = \eta$ in den gemeinschaftlichen Werth ζ übergehen. Diese Functionen $y^{(n)}$ werden im allgemeinen in Gruppen von zusammenhängenden Zweigen zerfallen, und eine solche Gruppe wird dargestellt werden in der Form*)

$$(4.) \qquad y^{(n)} - \zeta = g_0 (y^{(n-1)} - \eta)^{\frac{k}{\alpha}} + g_1 (y^{(n-1)} - \eta)^{\frac{k+1}{\alpha}} + \cdots,$$

worin k wie α eine von Null verschiedene positive ganze Zahl bedeutet, und $g_0, g_1 \ldots$ Functionen von $x,y,y', \ldots, y^{(n-2)}$ sind, die in Reihen nach ganzen positiven Potenzen von $x - x_0, y - y_0, \ldots, y^{(n-2)} - y_0^{(n-2)}$ entwickelt werden können, falls $x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-2)}$ ein willkürliches Werthsystem in den Bereichen der bezüglichen Variablen $x, y, y', \ldots, y^{(n-2)}$ bedeutet, in denen η endlich, eindeutig und stetig bleibt. Da $\frac{k}{\alpha}$ als Exponent der niedrigsten Potenz in der Entwickelung (4.) angenommen ist, so darf g_0 nicht identisch verschwinden.

Solcher Entwickelungen (4.) haben wir so viele gesondert zu betrachten, als es Gruppen der algebraischen Function $y^{(n)}$ von $y^{(n-1)}$ giebt, die für $y^{(n-1)} = \eta$ in einen gemeinsamen endlichen Werth übergehen, der gleich ζ oder verschieden von ζ sein kann.

*) Vergl. *Fuchs*, Berl. Ber. 1884. XXXII, S. 701 ff.

Für die weitere Behandlung der Gleichung (4.) ist es nun wesentlich, zu unterscheiden, ob die Differentialgleichung $(n-1)$-ter Ordnung

$$(5.) \qquad y^{(n-1)} = \eta(x, y, y', \ldots, y^{(n-2)})$$

ein erstes Integral der vorgelegten Differentialgleichung ist oder nicht. Da sie keine willkürliche Constante enthält, so kann sie im ersten Falle nur ein particuläres oder singuläres Integral sein. Die Differentiation der Gleichung (5.) nach x muss alsdann für $y^{(n)}$ einen der Wurzelwerthe ergeben, in welche $y^{(n)}$ für $y^{(n-1)} = \eta$ übergeht, was erfordert, dass identisch

$$\zeta = \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} y' + \cdots + \frac{\partial \eta}{\partial y^{(n-3)}} y^{(n-2)} + \frac{\partial \eta}{\partial y^{(n-2)}} \cdot \eta$$

ist, wenn ζ einen der Wurzelwerthe bezeichnet.

Setzt man nun

$$y^{(n-1)} = \eta + u^{\alpha},$$

so wird

$$y^{(n)} = \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} y' + \cdots + \frac{\partial \eta}{\partial y^{(n-3)}} y^{(n-2)} + \frac{\partial \eta}{\partial y^{(n-2)}} (\eta + u^{\alpha}) + \alpha u^{\alpha-1} \frac{du}{dx}$$

und die Gleichung (4.) geht über in

$$\alpha u^{\alpha-1} \frac{du}{dx} = \zeta - \sigma - \frac{\partial \eta}{\partial y^{(n-2)}} u^{\alpha} + g_0 u^k + g_1 u^{k+1} + \cdots,$$

wo zur Abkürzung

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} y' + \cdots + \frac{\partial \eta}{\partial y^{(n-3)}} y^{(n-2)} + \frac{\partial \eta}{\partial y^{(n-2)}} \cdot \eta = \sigma$$

gesetzt ist.

Indem wir nun u als unabhängige Variable einführen, erhalten wir folgendes System von n Differentialgleichungen erster Ordnung

$$(6.) \quad \begin{cases} \dfrac{dx}{du} = \dfrac{\alpha u^{\alpha-1}}{N}, \quad \dfrac{dy}{du} = \dfrac{\alpha u^{\alpha-1}}{N} y', \quad \dfrac{dy'}{du} = \dfrac{\alpha u^{\alpha-1}}{N} y'', \ldots, \dfrac{dy^{(n-3)}}{du} = \dfrac{\alpha u^{\alpha-1}}{N} y^{(n-2)}, \\ \dfrac{dy^{(n-2)}}{du} = \dfrac{\alpha u^{\alpha-1}}{N} (\eta + u^{\alpha}), \\ N = \zeta - \sigma - \dfrac{\partial \eta}{\partial y^{(n-2)}} u^{\alpha} + g_0 u^k + g_1 u^{k+1} + \cdots, \end{cases}$$

durch welches die n Variablen $x, y, y', \ldots, y^{(n-2)}$ als Functionen von u bestimmt werden.

Wir nehmen zuerst den Fall, dass $y^{(n-1)} = \eta$ kein erstes Integral der vorgelegten Differentialgleichung sei; dann ist σ für willkürliche Werthe von $x, y, y', \ldots, y^{(n-2)}$ von ζ verschieden, und wir können das Werthsystem

$x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-2)}$ so gewählt denken, dass σ auch für dieses von ζ verschieden ist. Die rechten Seiten des Gleichungssystems (6.) stellen dann nach den gemachten Voraussetzungen Functionen von $x, y, y', \ldots, y^{(n-2)} u$ dar, die für $x = x_0$, $y = y_0$, $y' = y_0', \ldots, y^{(n-2)} = y_0^{(n-2)}$, $u = 0$ endlich sind und in der Umgebung dieses Werthsystems nach ganzen positiven Potenzen von $x - x_0, y - y_0, y' - y_0', \ldots, y^{(n-2)} - y_0^{(n-2)}$, und u entwickelt werden können. Den Differentialgleichungen (6.) wird also durch ein System von Functionen genügt, die für $u = 0$ resp. die Werthe $x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-2)}$ annehmen und in Reihen nach ganzen positiven Potenzen von u sich darstellen lassen. Man erhält:

$$(7.)\quad \begin{cases} x - x_0 = \dfrac{1}{\zeta_0 - \sigma_0} u^\alpha + b u^{\alpha+1} + \cdots, \qquad y - y_0 = \dfrac{y_0'}{\zeta_0 - \sigma_0} u^\alpha + \cdots, \\ \ldots, y^{(n-3)} - y_0^{(n-3)} = \dfrac{y_0^{(n-2)}}{\zeta_0 - \sigma_0} u^\alpha + \cdots, \qquad y^{(n-2)} - y_0^{(n-2)} = \dfrac{\eta_0 u^\alpha}{\zeta_0 - \sigma_0} + \cdots, \end{cases}$$

wo der Index 0 bei ζ und σ, wie überall im Folgenden, den Werth der mit ihm behafteten Grösse für $x = x_0, y = y_0, y' = y_0', \ldots, y^{(n-2)} = y_0^{(n-2)}$ bezeichnet. Durch Umkehrung der ersten der Gleichungen (7.) entsteht

$$(8.)\quad u = (y^{(n-1)} - \eta)^{\frac{1}{\alpha}} = (\zeta_0 - \sigma_0)^{\frac{1}{\alpha}} (x - x_0)^{\frac{1}{\alpha}} + \beta (x - x_0)^{\frac{2}{\alpha}} + \cdots$$

und hieraus

$$(\mathrm{I.})\quad y^{(n-1)} - \eta = (\zeta_0 - \sigma_0)(x - x_0) + \gamma_1 (x - x_0)^{1+\frac{1}{\alpha}} + \gamma_2 (x - x_0)^{1+\frac{2}{\alpha}} + \cdots.$$

Diese Gleichung, deren Coefficienten auf der rechten Seite die Parameter $x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-2)}$ enthalten, liefert uns die Entwickelung von $y^{(n-1)} - \eta$, wo y eine Integralfunction der vorgelegten Differentialgleichung von der Beschaffenheit ist, dass $y, y', \ldots, y^{(n-2)}, y^{(n-1)}, y^{(n)}$ für $x = x_0$ beziehlich die Werthe $y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-2)}$, η_0, ζ_0 annehmen. Aus (I.) folgt, dass für willkürliche Werthe von $x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-2)}$, für die unserer Voraussetzung nach ζ_0 von σ_0 verschieden ist, die Entwickelung von $y^{(n-1)} - \eta$ nach Potenzen von $x - x_0$ mit der ersten Potenz beginnt. Denkt man sich eine der Differentialgleichung $(n-1)$-ter Ordnung $y^{(n-1)} = \eta$ genügende Function y dadurch bestimmt, dass $y, y', \ldots, y^{(n-2)}$ für $x = x_0$ bezw. wie vorhin die Werthe $y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-2)}$ erhält, dann wird $y^{(n-1)}$ ebenfalls den Werth σ_0 für $x = x_0$ erhalten.

Ist also $y^{(n-1)} = \eta$ ***kein*** erstes Integral der vorgelegten Differentialgleichung (1.) und ist der etwa p-fache Wurzelwerth ζ, den man aus (1.) für $y^{(n)}$ erhält, wenn man $y^{(n-1)}$ durch η ersetzt, endlich, so hat jede durch

die Gleichung $y^{(n-1)} = \eta$ repräsentirte Curve folgende Eigenschaft: Bestimmt man Integralcurven der vorgelegten Differentialgleichung durch die Bedingung, dass sie in einem Punkte der ersteren Curve mit derselben eine Berührung $(n-1)$-ter Ordnung haben, so giebt es p solcher Integralcurven, die in dem betrachteten Punkte in eben so viele Verzweigungsgruppen zerfallen, als es Entwickelungen der algebraischen Function $y^{(n)}$ von $y^{(n-1)}$ mit dem gemeinschaftlichen Werth ζ für $y^{(n-1)} = \eta$ von der Form (4.) giebt, so dass z. B. eine solche Gruppe aus α Zweigen besteht. Alle diese p Integralcurven berühren einander in dem betrachteten Punkte mindestens in der n-ten Ordnung, haben aber daselbst mit der erwähnten, durch die Gleichung $y^{(n-1)} = \eta$ repräsentirten Curve keine Berührung von höherer als der $(n-1)$-ten Ordnung *).

Die Gültigkeit des Satzes setzt willkürliche Werthe von $x_0, y_0, \ldots, y_0^{(n-2)}$ voraus, sie erleidet eine Ausnahme, wenn $\zeta_0 = \sigma_0$ ist, was nach unserer Annahme eine Bedingungsgleichung zwischen den genannten Werthen darstellt.

Wir nehmen jetzt an, dass für $y^{(n-1)} = \eta$ der Coefficient der höchsten Potenz von $y^{(n)}$ in (1.) identisch verschwinde, also eine oder mehrere Wurzeln $y^{(n)}$ der Gleichung (1.) unendlich werden. Unter den der Gleichung (1.) genügenden algebraischen Functionen von $y^{(n-1)}$, die für $y^{(n-1)} = \eta$ unendlich werden, gebe es eine Gruppe von α in $y^{(n-1)} = \eta$ zusammenhängenden Zweigen; dann lassen sich dieselben in der Form darstellen

$$y^{(n)} = (y^{(n-1)} - \eta)^{-\frac{k}{\alpha}} \{g_0 + g_1 (y^{(n-1)} - \eta)^{\frac{1}{\alpha}} + \cdots\},$$

wo k, sowie α, eine von Null verschiedene positive ganze Zahl ist und $g_0, g_1 \ldots$ nach ganzen positiven Potenzen von $x - x_0, y - y_0, y' - y_0', \ldots, y^{(n-2)} - y_0^{(n-2)}$ fortschreitende Reihen bedeuten, wenn unter $x_0, y_0, \ldots, y_0^{(n-2)}$ wie oben ein willkürliches Werthsystem verstanden wird, in dessen Umgebung η eindeutig verläuft. Von g_0 wird vorausgesetzt, dass es nicht identisch verschwindet.

*) Dem entspricht im Falle der Differentialgleichung erster Ordnung der Satz, dass durch jeden Punkt einer durch die Discriminantengleichung in Bezug auf y' bestimmten Curve, die keine Integralcurve der Differentialgleichung ist, mehrere in diesem Punkte Verzweigungsgruppen bildende Integralcurven hindurchgehen, die daselbst sich sämmtlich berühren, aber in eben diesem Punkte mit der ersteren Curve ***keine*** Berührung haben. Da die Gleichung $\zeta = \sigma$ hier nur die Variable x enthält, so werden von dem Ausnahmefall nur ganz bestimmte, sogen. feste Werthe von x_0 betroffen. Vergl. d. J. Bd. 112, S. 213.

Setzen wir wieder $y^{(n-1)} = \eta + u^\alpha$ und multipliciren mit u^k, so erhalten wir, indem wir berücksichtigen, dass

$$y^{(n)} = \sigma + \frac{\partial \eta}{\partial y^{(n-2)}} u^\alpha + \alpha u^{\alpha-1} \frac{du}{dx},$$

$$\alpha u^{\alpha+k-1} \frac{du}{dx} = g_0 + g_1 u + \cdots + g_{k-1} u^{k-1} + (g_k + \sigma) u^k + g_{k+1} u^{k+1} + \cdots$$
$$+ \left(g_{k+\alpha} + \frac{\partial \eta}{\partial y^{(n-2)}}\right) u^{k+\alpha} + g_{k+\alpha+1} u^{k+\alpha+1} + \cdots,$$

und wenn man u als unabhängige Variable einführt,

$$\frac{dx}{du} = \frac{\alpha u^{\alpha+k+1}}{g_0 + g_1 u + \cdots}, \quad \frac{dy}{du} = y' \cdot \frac{\alpha u^{\alpha+k+1}}{g_0 + g_1 u + \cdots}, \cdots \frac{dy^{(n-3)}}{du} = y^{(n-2)} \frac{\alpha u^{\alpha+k-1}}{g_0 + g_1 u + \cdots}$$
$$\frac{dy^{(n-2)}}{du} = \frac{(\eta + u^\alpha) u^{\alpha+k-1}}{g_0 + g_1 u + \cdots}.$$

Da g_0 nicht identisch verschwindet, so können wir das Werthsystem $x_0, y_0, y_0', \cdots, y_0^{(n-2)}$ so gewählt, denken, dass g_0 auch für dieses verschwindet. Die rechten Seiten des vorstehenden Differentialgleichungssystems stellen dann Functionen dar, die nach ganzen positiven Potenzen der Grössen $x - x_0$, $y - y_0$, $y' - y_0', \ldots, y^{(n-2)} - y_0^{(n-2)}$ und u entwickelt werden können, folglich genügen dem System n Functionen $x, y, y', \ldots, y^{(n-2)}$ von u, die nach ganzen positiven Potenzen von u fortschreiten, und für $u = 0$ bezw. die Werthe $x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-2)}$ annehmen. Man erhält

$$(9.) \quad \begin{cases} x - x_0 = \dfrac{\alpha u^{\alpha+k}}{(\alpha+k) g_{00}} + b u^{\alpha+k+1} + \cdots, \quad y - y_0 = y_0' \dfrac{\alpha}{(\alpha+k) g_{00}} u^{\alpha+k} + \cdots, \\ y^{(n-3)} - y^{(n-3)} = y_0^{(n-2)} \dfrac{\alpha}{(\alpha+k) g_{00}} u^{\alpha+k} + \cdots \\ y^{(n-2)} - y_0^{(n-2)} = \eta_0 \dfrac{\alpha}{(\alpha+k) g_{00}} u^{\alpha+k} + \cdots \end{cases}$$

wo g_{00} den Werth von g_0 für $x = x_0$, $y = y_0$, …, $y^{(n-2)} = y_0^{(n-2)}$ bedeutet. Durch Umkehrung der ersten Gleichung ergiebt sich

$$u = (y^{(n-1)} - \eta)^{\frac{1}{\alpha}} = \left(\frac{\alpha+k}{\alpha} g_{00}\right)^{\frac{1}{\alpha+k}} (x - x_0)^{\frac{1}{\alpha+k}} + \beta (x - x_0)^{\frac{2}{\alpha+k}} + \cdots$$

und durch Erhebung in die α-te Potenz

$$(II.) \quad y^{(n-1)} - \eta = \left(\frac{\alpha+k}{\alpha} g_{00}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+k}} (x - x_0)^{\frac{\alpha}{\alpha+k}} + \gamma (x - x_0)^{\frac{\alpha+1}{\alpha+k}} + \cdots,$$

wo y ein particuläres Integral der vorgelegten Differentialgleichung bedeutet, welches dadurch bestimmt ist, dass $y, y', y'', \ldots, y^{(n-2)}, y^{(n-1)}, y^{(n)}$ für $x = x_0$

beziehlich die Werthe $y_0, y_0', y_0'', \ldots, y_0^{(n-2)}, \eta_0, \infty$ annehmen. Die Einsetzung des Ausdrucks für u in die Gleichungen (9.) ergiebt, dass dieses Integral y sich in $x = x_0$ $(\alpha+k)$-fach verzweigt, und dass alle Zweige dieser Integralcurve einander in der n-ten Ordnung berühren. Die durch die Gleichung $y^{(n-1)} = \eta$ und durch die Bedingungen $y = y_0, y' = y_0', \ldots, y^{(n-2)} = y_0^{(n-2)}$ für $x = x_0$ bestimmte Function y von x stellt eine Curve dar, die von allen Zweigen der Integralcurve in $x = x_0$ in der $(n-1)$-ten, aber nicht in der n-ten Ordnung berührt wird, da für sie zwar $y^{(n-1)}$ den Werth η_0, aber $y^{(n)}$ den ***endlichen*** Werth σ_0 für $x = x_0$ hat. Dieser Satz verliert seine Gültigkeit, wenn $g_{00} = 0$ ist, was der Annahme nach für willkürliche Werthe von $x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-2)}$ nicht eintritt.

Die Entwickelungsformen (I.) und (II.) sind die einzigen, die für willkürliche Werthe von $x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-2)}$ statthaben, falls $y^{(n-1)} = \eta$ ***kein*** erstes Integral der vorgelegten Differentialgleichung (1.) ist; sie haben das charakteristische Merkmal gemeinsam, ***dass der Exponent der niedrigsten in ihnen auftretenden Potenz von $x - x_0$ nicht grösser als Eins ist.***

Es sei noch bemerkt, dass diese Entwickelungsformen von der Voraussetzung, dass η eine Wurzel der Discriminantengleichung $\Delta = 0$ sei, nicht abhängig sind, sondern für jede Function η von $x, y, y', \ldots, y^{(n-2)}$ gelten, sofern nur $y^{(n-1)} = \eta$ kein erstes Integral der gegebenen Differentialgleichung ist. Im allgemeinen wird dann $\alpha = 1$ sein.

Wir gehen jetzt zur Betrachtung des Falles über, dass $y^{(n-1)} = \eta$, wo η eine endliche Wurzel der Discriminantengleichung $\Delta = 0$ ist, ein erstes Integral der vorgelegten Differentialgleichung sein soll. Eine der Wurzeln $y^{(n)}$ der Gleichung

$$f(x, y, y' \ldots y^{(n-2)}, \eta, y^{(n)}) = 0$$

wird dann gleich

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} y' + \cdots + \frac{\partial \eta}{\partial y^{(n-3)}} y^{(n-2)} + \frac{\partial \eta}{\partial y^{(n-2)}} \eta = \sigma$$

sein. Unter den Functionen $y^{(n)}$, die der Gleichung (1.) genügen, und für $y^{(n-1)} = \eta$ den gemeinschaftlichen Werth σ annehmen, möge eine Gruppe von α zusammenhängenden Zweigen existiren, welche die Darstellung haben

$$(10.) \qquad y^{(n)} - \sigma = g_0 (y^{(n-1)} - \eta)^{\frac{k}{\alpha}} + g_1 (y^{(n-1)} - \eta)^{\frac{k+1}{\alpha}} + \cdots,$$

worin über $g_0, g_1 \ldots$ die früheren Festsetzungen gelten und insbesondere, dass g_0 nicht identisch verschwindet. Setzt man wieder

$$y^{(n-1)} = \eta + u^\alpha, \text{ also } y^{(n)} = \sigma + \frac{\partial \eta}{\partial y^{(n-2)}} u^\alpha + \alpha u^{\alpha-1} \frac{du}{dx}$$

so geht die Darstellung (10.) über in

$$(11.) \qquad \alpha u^{\alpha-1}\frac{du}{dx} = -\frac{\partial\eta}{\partial y^{(n-2)}}u^{\alpha}+g_0u^k+g_1u^{k+1}+\cdots.$$

Hier sind zwei weitere Fälle zu unterscheiden:

1. $k<\alpha$.

Dieser Fall kann, da k und α positive von Null verschiedene ganze Zahlen sind, nur eintreten, wenn $\alpha>1$ ist.

Aus (11.) folgt

$$\alpha u^{\alpha-1-k}\frac{du}{dx} = g_0+g_1u+\cdots+\left(g_{\alpha-k}-\frac{\partial\eta}{\partial y^{(n-2)}}\right)u^{\alpha-k}+g_{\alpha-k+1}u^{\alpha-k+1}+\cdots,$$

wo zu bemerken, dass hier $\alpha-k>0$ ist.

Führt man u als unabhängige Variable ein, so erhält man das System von Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$\frac{dx}{du}=\frac{\alpha u^{\alpha-1-k}}{g_0+h_1u+h_2u^2+\cdots}, \quad \frac{dy}{du}=y'\frac{\alpha u^{\alpha-1-k}}{g_0+h_1u+h_2u^2+\cdots}, \quad \cdots,$$

$$\frac{dy^{(n-3)}}{du}=y^{(n-2)}\frac{\alpha u^{\alpha-1-k}}{g_0+h_1u+h_2u^2+\cdots}, \quad \frac{dy^{(n-2)}}{du}=(\eta+u^{\alpha})\frac{\alpha u^{\alpha-1-k}}{g_0+h_1u+h_2u^2+\cdots},$$

durch welches $x, y, y', \ldots, y^{(n-2)}$ als Functionen von u bestimmt werden. Wählt man ein willkürliches Werthsystem $x_0, y_0, \ldots, y_0^{(n-2)}$ in dem Eindeutigkeitsbereich von η so, dass g_0 für dasselbe nicht verschwindet, so lassen sich, da jetzt $\alpha-1-k\geqq 0$ ist, die rechten Seiten der vorstehenden Gleichungen in Reihen nach ganzen positiven Potenzen von $x-x_0, y-y_0, y'-y_0', \ldots, y^{(n-2)}-y_0^{(n-2)}$ entwickeln und es genügen daher dem Systeme n Functionen $x, y, y', \ldots, y^{(n-2)}$, die für $u=0$ beziehlich die willkürlichen Werthe $x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-2)}$ annehmen und folgende Darstellung haben:

$$(12.) \quad \begin{cases} x-x_0=\dfrac{\alpha}{(\alpha-k)g_{00}}u^{\alpha-k}+bu^{\alpha-k+1}+\cdots, & y-y_0=\dfrac{\alpha}{(\alpha-k)g_{00}}y_0'u^{\alpha-k}+\cdots, \quad \cdots, \\ y^{(n-3)}-y_0^{(n-3)}=\dfrac{\alpha}{(\alpha-k)g_{00}}y_0^{(n-2)}u^{\alpha-k}+\cdots, & y^{(n-2)}-y_0^{(n-2)}=\dfrac{\alpha}{(\mu-k)g_{00}}\eta_0u^{\alpha-k}+\cdots. \end{cases}$$

Durch Umkehrung der ersten dieser Gleichungen erhält man

$$u=(y^{(n-1)}-\eta)^{\frac{1}{\alpha}}=\left(\frac{(\alpha-k)g_{00}}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-k}}(x-x_0)^{\frac{1}{\alpha-k}}+\beta(x-x_0)^{\frac{2}{\alpha-k}}+\cdots$$

und durch Erhebung in die α-te Potenz

$$(III.) \qquad y^{(n-1)}-\eta=\left(\frac{\alpha-k}{\alpha}g_{00}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-k}}(x-x_0)^{\frac{\alpha}{\alpha-k}}+\beta(x-x_0)^{\frac{\alpha+1}{\alpha-k}}+\cdots$$

gültig für das particuläre Integral y, das durch die Bedingungen $y = y_0$, $y' = y_0', \ldots, y^{(n-2)} = y_0^{(n-2)}, y^{(n-1)} = \eta_0, y^{(n)} = \sigma_0$ für $x = x_0$ bestimmt ist. Dasselbe wird durch eine Curve dargestellt, die sich in $x = x_0$ $(\alpha - k)$-fach verzweigt, und deren Zweige, falls $\alpha - k > 1$ ist, sich alle daselbst in der n-ten Ordnung berühren. Gleichzeitig berühren sie auch die Curve, die durch die Differentialgleichung $y^{(n-1)} = \eta$ und die Bedingungen $y = y_0, y' = y_0', \ldots, y^{(n-2)} = y_0^{(n-2)}$ für $x = x_0$ bestimmt ist, in der n-ten Ordnung, da für das so bestimmte y ebenfalls $y^{(n-1)} = \eta_0$ und $y^{(n)} = \sigma_0$ für $x = x_0$ ist.*) Durch diese Eigenschaft charakterisirt sich die Gleichung $y^{(n-1)} = \eta$ als *singuläres* erstes Integral der Differentialgleichung (1.). Bezeichnend für die Entwickelungsform (III.) ist, dass *der Exponent der niedrigsten darin auftretenden Potenz von $x - x_0$ grösser als Eins ist.*

2. $$k > \alpha - 1.$$

In diesem Falle erhält man aus (11.)

$$(13.) \qquad \frac{du}{dx} = -\frac{1}{\alpha}\frac{\partial \eta}{\partial y^{(n-2)}} u + \frac{g_0}{\alpha} u^{k-\alpha+1} + \frac{g_1}{\alpha} u^{k-\alpha+2} + \cdots,$$

wo jetzt $k - \alpha + 1$ eine von Null verschiedene positive ganze Zahl ist. Fügt man dazu die Gleichungen

$$(13^a.) \qquad \frac{dy}{dx} = y', \quad \frac{dy'}{dx} = y'', \quad \ldots, \quad \frac{dy^{(n-2)}}{dx} = \eta + u^\alpha,$$

so stellen (13.) und (13ª.) ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung dar, durch welches $u, y, y', \ldots, y^{(n-2)}$ als Functionen von x bestimmt werden. Die rechten Seiten lassen sich für willkürliche Werthe $x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-2)}$ im Eindeutigkeitsbereich von η nach ganzen positiven Potenzen von $x - x_0$, $y - y_0, y' - y_0', \ldots, y^{(n-2)} - y_0^{(n-2)}$ und u entwickeln. Folglich giebt es ein System von Lösungen der Gleichungen (13.) und (13ª.) von der Beschaffenheit, dass die Functionen $u, y, y', \ldots, y^{(n-2)}$ sich in eine Reihe nach ganzen positiven Potenzen von $x - x_0$ entwickeln lassen und für $x = x_0$ beziehlich die Werthe $0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-2)}$ annehmen. Die Einsetzung dieser Reihen in (13.) ergiebt

$$u = 0, \quad \text{also } y^{(n-1)} - \eta = 0,$$

---

*) Dem entspricht im Falle der Differentialgleichung erster Ordnung der Satz, dass die durch einen Punkt der singulären Curve hindurchgehenden Zweige der particulären Integralcurve, falls mehr als ein Zweig vorhanden ist, einander und zugleich die singuläre Curve berühren, die daher die Enveloppe der particulären Integralcurven genannt wird. Vergl. dieses Journal Bd. 112, S. 217.

wodurch sich (13ª.) auf das System

$$\frac{dy}{dx} = y', \quad \frac{dy'}{dx} = y'', \quad \ldots, \quad \frac{dy^{(n-3)}}{dx} = y^{(n-2)}, \quad \frac{dy^{(n-2)}}{dx} = \eta$$

reducirt, welches selbst wieder mit der Differentialgleichung $(n-1)$-ten Ordnung $y^{(n-1)} = \eta$ äquivalent ist. Also ist in diesem Falle $y^{(n-1)} = \eta$ ein *particuläres* erstes Integral der Differentialgleichung (1.). Ausserdem kann diese Gleichung zugleich ein singuläres Integral von (1.) sein, wenn es für $y^{(n)}$ als algebraische Function von $y^{(n-1)}$ Zweige giebt, in deren Darstellung von der Form (4.) $\zeta = \sigma$ und $k < \alpha$ ist.

Die erlangten Ergebnisse fassen wir in folgenden Sätzen zusammen:

Ist $y^{(n-1)} = \eta(x, y, y', \ldots, y^{(n-2)})$ eine endliche Wurzel der durch Elimination von $y^{(n)}$ zwischen $f(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$ und $\frac{\partial f}{\partial y^{(n)}} = 0$ hervorgehenden Discriminantengleichung

$$\Delta(x, y, y', \ldots, y^{(n-2)}) = 0,$$

so sind 3 Fälle möglich:

1. $y^{(n-1)} = \eta$ ist *kein* erstes Integral der vorgelegten Differentialgleichung; dann gilt für alle Integrale y, die die Eigenschaft haben, dass x_0 für einen willkürlichen Werth $y, y', \ldots, y^{(n-2)}$ die willkürlichen Werthe $y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-2)}$ und $y^{(n-1)}$ den Werth $\eta_0 = \eta(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-2)})$ annehmen, eine Entwickelung von $y^{(n-1)} - \eta$ in der Form

$$(14.) \qquad y^{(n-1)} - \eta = \mathfrak{P}(x - x_0),$$

wo $\mathfrak{P}$ eine nach positiven ganzen oder gebrochenen Potenzen von $x - x_0$ fortschreitende Reihe bedeutet. In allen diesen Reihen ist der Exponent der niedrigsten Potenz von $x - x_0$ nicht grösser als 1.

2. $y^{(n-1)} = \eta$ ist ein singuläres erstes Integral; dann giebt es erste Integrale, die eine Darstellung in der Form (14.) zulassen, in denen der Exponent der niedrigsten Potenz von $x - x_0$ grösser als 1 ist.

3. $y^{(n-1)} = \eta$ ist ein particuläres erstes Integral; dann reduciren sich einige Darstellungen der Form (14.) auf $y^{(n-1)} - \eta = 0$. Für den Fall, dass es ausserdem Darstellungen der Form (14.) giebt, in denen der Exponent der niedrigsten Potenz von $x - x_0$ grösser als 1 ist, ist $y^{(n-1)} = \eta$ zugleich ein singuläres erstes Integral.

Die Natur des Integrals $y^{(n-1)} = \eta$ kann man übrigens unmittelbar

aus der Entwickelungsform (5.) für $y^{(n)}$ erkennen, die für den Fall gilt, dass $y^{(n-1)} = \eta$ ein erstes Integral der vorgelegten Differentialgleichung ist,

$$y^{(n)} - \sigma = g_0 (y^{(n-1)} - \eta)^{\frac{k}{\alpha}} + g_1 (y^{(n-1)} - \eta)^{\frac{k+1}{\alpha}} + \cdots,$$

wo k und α positive ganze von Null verschiedene Zahlen bedeuten.

$y^{(n-1)} = \eta$ ist ein singuläres Integral, wenn $k < \alpha$, ein particuläres, wenn $k > \alpha - 1$, und beides zugleich, wenn Entwickelungen von der einen und der anderen Beschaffenheit existiren. Da $\eta, \sigma, g_0, g_1, \ldots$ Functionen von $x, y, y', \ldots, y^{(n-2)}$ sind, also $y^{(n-1)}$ nicht enthalten, so erkennt man, dass im ersten Falle $\frac{\partial y^{(n)}}{\partial y^{(n-1)}} = \infty$ für $y^{(n-1)} = \eta$, im andern Falle endlich ist. Wir können also das Kriterium dafür, dass $y^{(n-1)} = \eta$ ein singuläres Integral ist, in folgender Gestalt aussprechen:

Ist eine der Wurzeln $y^{(n)}$ der Gleichung

$$f(x, y, y', \ldots, y^{(n-2)}, \eta, y^{(n)}) = 0$$

$$y^{(n)} = \sigma = \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} y' + \cdots + \frac{\partial \eta}{\partial y^{(n-3)}} y^{(n-2)} + \frac{\partial \eta}{\partial y^{(n-2)}} \eta,$$

was die Voraussetzung ist, dass $y^{(n-1)} = \eta$ überhaupt ein erstes Integral der vorgelegten Differentialgleichung $f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$ darstellt, und giebt es Zweige von $y^{(n)}$, als algebraische Function von $y^{(n-1)}$ betrachtet, für die $\frac{\partial y^{(n)}}{\partial y^{(n-1)}} = \infty$ wird für $y^{(n-1)} = \eta$, $y^{(n)} = \sigma$, dann ist das Integral $y^{(n-1)} = \eta$ singulär. Dasselbe Integral kann zugleich particulär sein, wenn die Function $y^{(n)}$ noch andere Zweige besitzt, für welche der Ausdruck $\frac{\partial y^{(n)}}{\partial y^{(n-1)}}$ bei der Substitution $y^{(n-1)} = \eta$, $y^{(n)} = \sigma$ einen endlichen Werth erhält. Ist das letztere bei allen Zweigen der Function $y^{(n)}$ der Fall, so ist $y^{(n-1)} = \eta$ ein particuläres Integral*).

Bemerkung. Aus dem Vorhergehenden erhellt, das y in allen betrachteten Fällen nach ganzen oder gebrochenen Potenzen von $x - x_0$ darstellbar ist, also in x_0 nur algebraische Singularitäten aufweist. Ausnahmen treten ein, wenn zwischen den willkürlichen Werthen $x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-2)}$ gewisse Bedingungsgleichungen bestehen. Diese sind gegeben: 1) wenn in der Entwickelung (4.) die Coefficienten von $y^{(n-1)} - \eta$ für das gewählte Werthsystem unendlich werden, 2) wenn, ohne dass identisch $\zeta = \sigma$ ist, $\zeta_0 = \sigma_0$

*) Vergl. d. J. Bd. 112, S. 219.

wird, 3) wenn im Falle, dass identisch $\zeta = \sigma$ ist, $g_{00} = 0$ wird. Hierdurch werden im Falle $n = 1$, wo x_0 allein in den Bedingungsgleichungen erscheint, nur feste singuläre Werthe ausgeschlossen, so dass da, wie bekannt, nur in festen Punkten x_0 andere als algebraische Singularitäten auftreten können.

Bei Differentialgleichungen höherer Ordnung $n > 1$ erscheint nicht mehr x_0 allein in den Bedingungsgleichungen, daher auch für stetig variirende Werthe von x_0 die Integralfunction y andere als algebraische Singularitäten besitzen kann, sofern man für $y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-2)}$ den Bedingungsgleichungen entsprechende Werthe annimmt. Zu beachten ist, dass das Gesagte gilt, auch wenn η nicht eine Wurzel der Discriminantengleichung, sondern eine beliebige Function von $x, y, y', \ldots, y^{(n-2)}$, worunter auch $\eta = 0$ begriffen ist, bedeutet. In diesem Falle treten im allgemeinen in der Entwickelung (4.) aus der alles Folgende abgeleitet ist, nur ganze Potenzen von $y^{(n-1)} - \eta$ auf.

Bemerkung 2. Lassen wir wieder $x_0, y_0, \ldots, y^{(n-2)}$ willkürlich, so kann man aus den vorhergehenden Entwickelungen noch folgendes Ergebniss ziehen: Wenn die durch die Gleichung (1.) definirte algebraische Function $y^{(n)}$ von $y^{(n-1)}$ nicht für willkürliche Werthe von $x, y, y', \ldots, y^{(n-2)}$ unendlich wird, ferner für alle Wurzeln der Discriminantengleichung $y^{(n-1)} = \eta$, für die $y^{(n)}$ als algebraische Function von $y^{(n-1)}$ sich verzweigt, $\zeta = \sigma = \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} y' + \cdots + \frac{\partial \eta}{\partial y^{(n-3)}} y^{(n-2)} + \frac{\partial \eta}{\partial y^{(n-2)}} \eta$, d. h. $y^{n-1} = \eta$ ein erstes Integral der Gleichung (1.) ist, endlich in diesem Falle in allen Entwickelungen der Form (4.) $k = \alpha - 1$ ist, so sind die Integrale y von der Beschaffenheit, dass $y, y', \ldots, y^{(n-2)}$ für $x = x_0$ in ***willkürliche,*** d. h. oben erwähnten Ausnahmen nicht unterliegende Werthe $x_0, y_0, \ldots, y_0^{(n-2)}$ übergehen, wie auch $y^{(n-1)}$ für $x = x_0$ gewählt sei, in ihrem ganzen Verlaufe unverzweigt. Für $n = 1$ ist dies Resultat von Herrn ***Fuchs*** in der angezogenen Arbeit bewiesen worden.

II.

Es sei

$$\varphi(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) = \text{Const.} \tag{15.}$$

ein erstes Integral der vorgelegten Differentialgleichung (1.), so folgt durch totale Differentiation

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} y' + \frac{\partial \varphi}{\partial y'} y'' + \cdots + \frac{\partial \varphi}{\partial y^{(n-2)}} y^{(n-1)} + \frac{\partial \varphi}{\partial y^{(n-1)}} y^{(n)} = 0.$$

Setzt man für $y^{(n)}$ ihren Ausdruck in (4.) ein, so erhält man

$$(16.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} y' + \cdots + \dfrac{\partial \varphi}{\partial y^{(n-2)}} y^{(n-1)} & {\scriptstyle k>0} \\ + \dfrac{\partial \varphi}{\partial y^{(n-1)}} \left\{ \zeta + g_0 (y^{(n-1)} - \eta)^{\frac{k}{\alpha}} + g_1 (y^{(n-1)} - \eta)^{\frac{k+1}{\alpha}} + \cdots \right\} = 0, \end{cases}$$

wo $\eta, \zeta, g_0, g_1, \ldots$ Functionen von $x, y, y', \ldots, y^{(n-2)}$ sind, die in nach ganzen positiven Potenzen von $x - x_0, y - y_0, y' - y_0', \ldots, y^{(n-2)} - y_0^{(n-2)}$ fortschreitende Reihen entwickelbar sind. Setzen wir $y^{(n-1)} = \eta + u^\alpha$ und bezeichnen φ, als Function von $x, y, y', \ldots, y^{(n-2)}$ und u betrachtet, mit $\bar{\varphi}$, so wird

$$\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y^{(n-1)}} \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial y^{(n-1)}} \frac{\partial \eta}{\partial y}, \ \ldots, \ \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y^{(n-2)}} = \frac{\partial \varphi}{\partial y^{(n-2)}} + \frac{\partial \varphi}{\partial y^{(n-1)}} \frac{\partial \eta}{\partial y^{(n-2)}}$$

$$\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial u} = \frac{\partial \varphi}{\partial y^{(n-1)}} \alpha u^{\alpha - 1}$$

und die Gleichung (16.) geht, nachdem sie mit $\alpha u^{\alpha-1}$ multiplicirt ist, über in

$$(17.)\quad \begin{cases} \alpha u^{\alpha-1} \left(\dfrac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} + \dfrac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y} y' + \cdots + \dfrac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y^{(n-3)}} y^{(n-2)} + \dfrac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y^{(n-2)}} \eta + \alpha u^{2\alpha-1} \dfrac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y^{(n-2)}} \right) \\ + \dfrac{\partial \bar{\varphi}}{\partial u} \left\{ \zeta - \dfrac{\partial \eta}{\partial x} - \dfrac{\partial \eta}{\partial y} y' - \cdots - \dfrac{\partial \eta}{\partial y^{(n-3)}} y^{(n-2)} - \dfrac{\partial \eta}{\partial y^{(n-2)}} (\eta + u^\alpha) + g_0 u^k + g_1 u^{k+1} + \cdots \right\} = 0. \end{cases}$$

Betrachten wir zuerst den Fall, dass der Ausdruck

$$\zeta - \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \eta}{\partial y} y' - \cdots - \frac{\partial \eta}{\partial y^{(n-3)}} y^{(n-2)} - \frac{\partial \eta}{\partial y^{(n-2)}} \eta = \zeta - \sigma$$

nicht identisch verschwindet, so kann der Gleichung (17.) nach dem Satze der Frau von ***Kowalewsky*** durch eine einen gewissen Grenzbezirk besitzende Reihe von der Form

$$(18.)\quad \bar{\varphi} = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \varphi_\nu (x, y, \ldots, y^{(n-2)}) \frac{u^\nu}{\nu!}$$

genügt werden, wo $\varphi_0, \varphi_1, \ldots$ nach ganzen positiven Potenzen von $x - x_0, y - y_0, y' - y_0', \ldots, y^{(n-2)} - y_0^{(n-2)}$ fortschreitende Reihen bedeuten, von denen die für φ_0 willkürlich angenommen werden kann, und die übrigen sich aus der identischen Gleichung bestimmen, welche die Einsetzung des Ausdruckes (18.) für $\bar{\varphi}$ in (17.) ergiebt

$$(19.)\quad \begin{cases} \left(\varphi_1 + \varphi_2 \dfrac{u}{1!} + \varphi_3 \dfrac{u^2}{2!} + \varphi_4 \dfrac{u^3}{3!} + \cdots \right) \left(\zeta - \sigma - \dfrac{\partial \eta}{\partial y^{(n-2)}} u^\alpha + g_0 u^k + g_1 u^{k+1} + \cdots \right) \\ = -\alpha u^{\alpha-1} \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \left(\dfrac{\partial \varphi_\nu}{\partial x} + \dfrac{\partial \varphi_\nu}{\partial y} y' + \cdots + \dfrac{\partial \varphi_\nu}{\partial y^{(n-3)}} y^{(n-2)} + \dfrac{\partial \varphi_\nu}{\partial y^{(n-2)}} \eta \right) \dfrac{u^\nu}{\nu!} \\ - \alpha u^{2\alpha-1} \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \dfrac{\partial \varphi_\nu}{\partial y^{(n-2)}} \dfrac{u^\nu}{\nu!}. \end{cases}$$

Aus dieser Identität fliesst eine Folge von recurrenten Gleichungen, durch welche die Reihen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ successive eindeutig bestimmt werden. Insbesondere erhält man

$$\varphi_1=\varphi_2=\ldots\varphi_{\alpha-1}=0,\ (\zeta-\sigma)\frac{\varphi_\alpha}{(\alpha-1)!}=-\alpha\Big(\frac{\partial\varphi_0}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_0}{\partial y}y'+\cdots+\frac{\partial\varphi_0}{\partial y^{(n-3)}}y^{(n-2)}+\frac{\partial\varphi_0}{\partial y^{(n-2)}}\eta\Big).$$

Demnach wird

$$\varphi=\varphi_0+\varphi_\alpha\frac{u^\alpha}{\alpha!}+\varphi_{\alpha+1}\frac{u^{\alpha+1}}{(\alpha+1)!}+\cdots.$$

Zwischen $n+1$ Functionen φ, die man erhält, indem man für φ_0 ebensoviele verschiedene Functionen wählt, muss eine functionale Abhängigkeit existiren. Denn für $n+1$ Functionen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n+1}$ die der linearen partiellen Differentialgleichung (17.) genügen, besteht die Gleichung

$$\frac{\partial(\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_{n+1})}{\partial(x,y,y',\ldots,y^{(n-2)},u)}=0.$$

Man erhält n von einander unabhängige Functionen $\bar\varphi$ von $x, y, \ldots, y^{(n-2)}, u$, wenn man für die willkürliche Function φ_0 der Reihe nach $\varphi_0=x$, $\varphi_0=y, \ldots, \varphi_0=y^{(n-2)}$ nimmt. Denn n Functionen von $n+1$ Variablen können nur dann von einander abhängig sein, wenn die Functionaldeterminanten derselben nach je n der Variablen verschwinden. Nun verschwindet aber die Functionaldeterminante der gewählten Functionen, die für $u=0$ der Reihe nach in $x, y, \ldots, y^{(n-2)}$ übergehen, nach $x, y, y', \ldots, y^{(n-2)}$ nicht identisch, da sie für $u=0$ gleich 1 ist, folglich sind die so bestimmten Functionen $\bar\varphi$ von einander unabhängig.

Indem wir für u seinen Werth $(y^{(n-1)}-\eta)^{\frac{1}{\alpha}}$ wieder einsetzen, erhalten wir n von einander unabhängige erste Integrale der vorgelegten Differentialgleichung in der Form

$$(20.)\quad \varphi_0+\varphi_\alpha(y^{(n-1)}-\eta)+\varphi_{\alpha+1}\frac{(y^{(n-1)}-\eta)^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}}{(\alpha+1)!}+\varphi_{\alpha+2}\frac{(y^{(n-1)}-\eta)^{\frac{\alpha+2}{\alpha}}}{(\alpha+2)!}+\cdots=\text{Const.},$$

wenn wir für φ_0 der Reihe nach $x, y, y', \ldots, y^{(n-2)}$ wählen und $\varphi_\alpha, \varphi_{\alpha+1}, \ldots$ in der oben angegebenen Weise eindeutig durch φ_0 bestimmen.

Betrachten wir jetzt den Fall, dass $y^{(n)}$ für $y^{(n-1)}=\eta$ unendlich wird, so dass für $y^{(n)}$ die Entwickelung gilt:

$$y^{(n)}=(y^{(n-1)}-\eta)^{-\frac{k}{\alpha}}\{g_0+g_1(y^{(n-1)}-\eta)^{\frac{1}{\alpha}}+\cdots\}\qquad k>0,$$

g_0 von Null verschieden, dann lautet die partielle Differentialgleichung für $\bar{\varphi}$:

$$\alpha u^{\alpha-1}\Big(\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial x}+\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial y}y'+\cdots+\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial y^{(n-3)}}y^{(n-2)}+\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial y^{(n-2)}}\eta\Big)+\alpha u^{2\alpha-1}\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial y^{(n-2)}}$$
$$+\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial u}\Big(-\sigma-\frac{\partial\eta}{\partial y^{(n-2)}}u^{\alpha}+g_0u^{-\varkappa}+g_1u^{-\varkappa+1}+\cdots\Big),$$

und indem man mit $u^{\varkappa}$ multiplicirt,

$$\alpha u^{\varkappa+\alpha-1}\Big(\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial x}+\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial y}y'+\ldots+\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial y^{(n-3)}}y^{(n-2)}+\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial y^{(n-2)}}\eta+\alpha u^{\varkappa+2\alpha-1}\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial y^{(n-2)}}$$
$$+\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial u}\Big(-\sigma u^{\varkappa}-\frac{\partial\eta}{\partial y^{(n-2)}}u^{\varkappa+\alpha}g_0+g_1u+g_2u^2+\cdots\Big)=0.$$

Setzt man auch hier an:

$$\bar{\varphi}=\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty}\varphi_\nu(x,y,\ldots,y^{(n-2)})\frac{u^\nu}{\nu!},$$

so erhält man zur recurrenten Bestimmung der Coefficienten $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ durch φ_0 die Gleichung

$$\Big(\varphi_1+\varphi_2u+\varphi_3\frac{u^2}{2!}+\varphi_4\frac{u^3}{3!}+\cdots\Big)\Big(g_0+g_1u+\cdots+(g_\varkappa-\sigma)u^{\varkappa}+g_{\varkappa+1}u^{\varkappa+1}+\cdots$$
$$\cdots+\Big(g_{\varkappa+\alpha}-\frac{\partial\eta}{\partial y^{(n-2)}}\Big)u^{\varkappa+\alpha}+\cdots\Big)=-\alpha u^{\varkappa+\alpha-1}\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty}\Big(\frac{\partial\varphi_\nu}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_\nu}{\partial y}y'+\cdots$$
$$\cdots+\frac{\partial\varphi_\nu}{\partial y^{(n-3)}}y^{(n-2)}+\frac{\partial\varphi_\nu}{\partial y^{(n-2)}}\eta\Big)\frac{u^\nu}{\nu!}-\alpha u^{\varkappa+2\alpha-1}\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty}\frac{\partial\varphi_\nu}{\partial y^{(n-2)}}\frac{u_\nu}{\nu!}\qquad(\varkappa>0)$$

woraus insbesondere folgt

$$\varphi_1=\varphi_2=\cdots=\varphi_{k+\alpha-1}=0,\quad g_0\frac{\varphi_{k+\alpha}}{(k+\alpha-1)!}=-\alpha\Big(\frac{\partial\varphi_0}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_0}{\partial y}y'+\cdots+\frac{\partial\varphi_0}{\partial y^{(n-3)}}y^{(n-2)}+\frac{\partial\varphi_0}{\partial y^{(n-1)}}\eta\Big),$$

so dass die Reihe für $\bar{\varphi}$ die Gestalt erhält

$$\bar{\varphi}=\varphi_0+\varphi_{k+\alpha}\frac{u^{k+\alpha}}{(k+\alpha)!}+\varphi_{k+\alpha+1}\frac{u^{k+\alpha+1}}{(k+\alpha+1)!}+\cdots.$$

Im vorliegenden Falle giebt es also n von einander unabhängige erste Integrale der vorgelegten Differentialgleichung von der Form

$$(20^a.)\qquad \varphi_0+\varphi_{k+\alpha}\frac{(y^{(n-1)}-\eta)^{\frac{k+\alpha}{\alpha}}}{(k+\alpha)!}+\varphi_{k+\alpha+1}\frac{(y^{(n-1)}-\eta)^{\frac{k+\alpha+1}{\alpha}}}{(k+\alpha+1)!}+\cdots=\text{Const.},$$

wo für φ_0 der Reihe nach $x, y, y', \ldots, y^{(n-2)}$ zu nehmen ist und $\varphi_{k+\alpha}$, $\varphi_{k+\alpha+1}$ nach ganzen positiven Potenzen von $x-x_0$, $y-y_0$, $y'-y_0'$, $\ldots$, $y^{(n-2)}-y_0^{(n-2)}$ fortschreitende Reihen sind, die in der oben angegebenen Weise von φ_0 abhängen.

Da $\frac{k+\alpha}{\alpha}>1$ ist, so können wir, die Gleichungen (20.) und (20^a.) zusammenfassend, den Satz aufstellen:

Ist $y^{(n-1)}$ ***kein*** erstes Integral der vorgelegten Differentialgleichung, so gehören zu jeder Zweiggruppe von $y^{(n)}$ als Function von $y^{(n-1)}$ in der Umgebung von $y^{(n-1)}=\eta$ n von einander abhängige erste Integrale von der Form

$$(21.)\qquad \varphi_0+h_r(y^{(n-1)}-\eta)^{\frac{r}{\alpha}}+h_{r+1}(y^{(n-1)}-\eta)^{\frac{r+1}{\alpha}}+\cdots=\text{Const.},$$

worin die Coefficienten nach ganzen positiven Potenzen von $x-x_0$, $y-y_0$, $y'-y_0'$, …, $y^{(n-2)}-y_0^{(n-2)}$ fortschreitende Reihen sind und ***der Exponent der niedrigsten Potenz von $y^{(n-1)}-\eta$ nicht kleiner als Eins ist.***

Es sei nunmehr $y^{(n-1)}=\eta$ ein erstes Integral der vorgelegten Differentialgleichung, so dass also für einen Werth ζ, den $y^{(n)}$ für $y^{(n-1)}=\eta$ erhält, der Ausdruck

$$\zeta-\frac{\partial\eta}{\partial x}-\frac{\partial\eta}{\partial y}y'-\cdots-\frac{\partial\eta}{\partial y^{(n-3)}}y^{(n-2)}-\frac{\partial\eta}{\partial y^{(n-2)}}\eta=\zeta-\sigma$$

identisch verschwindet. Die partielle Differentialgleichung für $\bar\varphi$ erhält man aus (17.), indem man $\zeta=\sigma$ setzt, in der Form:

$$(22.)\quad\begin{cases}\alpha u^{\alpha-1}\Big(\dfrac{\partial\bar\varphi}{\partial x}+\dfrac{\partial\bar\varphi}{\partial y}y'+\cdots+\dfrac{\partial\bar\varphi}{\partial y^{(n-3)}}y^{(n-2)}+\dfrac{\partial\bar\varphi}{\partial y^{(n-2)}}\eta\Big)+\alpha u^{2\alpha-1}\dfrac{\partial\bar\varphi}{\partial y^{(n-2)}} & (k>0)\\ \qquad+\dfrac{\partial\bar\varphi}{\partial u}\Big\{-\dfrac{\partial\eta}{\partial y^{(n-2)}}u^{\alpha}+g_0u^k+g_1u^{k+1}+\cdots\Big\}=0,\end{cases}$$

worin g_0 von Null verschieden ist. Ist nun

1. $$k<\alpha,$$

so ergiebt die Division durch u^k

$$\alpha u^{\alpha-1-k}\Big(\frac{\partial\bar\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\bar\varphi}{\partial y}y'+\cdots+\frac{\partial\bar\varphi}{\partial y^{(n-3)}}y^{(n-2)}+\frac{\partial\bar\varphi}{\partial y^{(n-2)}}\eta\Big)+\alpha u^{2\alpha-k-1}\frac{\partial\bar\varphi}{\partial y^{(n-2)}}$$
$$+\frac{\partial\bar\varphi}{\partial u}\Big\{g_0+g_1u+\cdots\Big(g_{\alpha-k}-\frac{\partial\eta}{\partial y^{(n-2)}}\Big)u^{\alpha-k}+g_{\alpha-k+1}u^{\alpha-k+1}+\cdots\Big\}=0\quad(\alpha-k>0).$$

Setzt man

$$\bar\varphi=\sum_{\nu=0}^{\infty}\varphi_\nu(x,y,y',\ldots,y^{(n-2)})\frac{u^\nu}{\nu!},$$

worin φ_0 eine willkürliche Function der eingeschlossenen Grössen ist, so erhält man zur successiven Bestimmung der Coefficienten $\varphi_1,\varphi_2,\ldots$ die Gleichung

$$\Big(\varphi_1+\varphi_2u+\varphi_3\frac{u^2}{2!}+\varphi_4\frac{u^3}{3!}+\cdots\Big)\Big(g_0+g_1u+\cdots+\Big(g_{\alpha-k}-\frac{\partial\eta}{\partial y^{(n-2)}}\Big)u^{\alpha-k}+g_{\alpha-k+1}u^{\alpha-k+1}+\cdots\Big)$$
$$=-\alpha u^{\alpha-1-k}\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty}\Big(\frac{\partial\varphi_\nu}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_\nu}{\partial y}y'+\cdots+\frac{\partial\varphi_\nu}{\partial y^{(n-3)}}y^{(n-2)}+\frac{\partial\varphi_\nu}{\partial y^{(n-2)}}\eta\Big)\frac{u^\nu}{\nu!}$$
$$-\alpha u^{2\alpha-k-1}\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty}\frac{\partial\varphi_\nu}{\partial y^{(n-2)}}\frac{u^\nu}{\nu!},$$

woraus insbesondere folgt

$$(23.)\quad \left\{\begin{array}{l} \varphi_1=\varphi_2=\ldots\varphi_{\alpha-1-k}=0, \quad g_0\dfrac{\varphi^{\alpha-k}}{(\alpha-k-1)}=-\alpha\Big(\dfrac{\partial\varphi_0}{\partial x}+\dfrac{\partial\varphi_0}{\partial y}y'+\cdots \\ \qquad\qquad +\dfrac{\partial\varphi_0}{\partial y^{(n-3)}}y^{(n-2)}+\dfrac{\partial\varphi_0}{\partial y^{(n-2)}}\eta\Big) \end{array}\right.$$

ist (wobei zu bemerken, dass wenn $k=\alpha-1$, φ_1 von Null verschieden ist), so dass $\bar{\varphi}$ die Gestalt erhält

$$\bar{\varphi}=\varphi_0+\frac{\varphi_{\alpha-k}}{(\alpha-k)!}u^{\alpha-k}+\frac{\varphi_{\alpha-\varkappa+1}}{(\alpha-\varkappa+1)!}u^{\alpha-\varkappa+1}+\cdots.$$

Wir schliessen hieraus, dass es im vorliegenden Falle n von einander unabhängige Integrale der vorgelegten Differentialgleichung (1.) von der Form giebt

$$\varphi_0\pm\varphi_{\alpha-\varkappa}\frac{(y^{(n-1)}-\eta)^{\frac{\alpha-\varkappa}{\alpha}}}{(\alpha-\varkappa)!}+\varphi_{\alpha-\varkappa+1}\frac{(y^{(n-1)}-\eta)^{\frac{\alpha-\varkappa+1}{\alpha}}}{(\alpha-\varkappa)!}+\cdots=\text{Const.},$$

wo für φ_0 der Reihe nach $x, y, y', \ldots, y^{(n-2)}$ zu nehmen ist, und $\varphi_{\alpha-\varkappa}$, $\varphi_{\alpha-\varkappa+1}, \cdots$ nach ganzen positiven Potenzen von $x-x_0$, $y-y_0$, $y'-y_0'$, …, $y^{(n-2)}-y_0^{(n-2)}$ fortschreitende Reihen sind, die in der angegebenen Weise successive eindeutig aus φ_0 bestimmt werden. Da der Ausdruck auf der linken Seite für $y^{(n-1)}=\eta$ gleich φ_0, also nicht constant wird, so ist $y^{(n-1)}=\eta$ ein ***singuläres*** erstes Integral. $\varphi_{\alpha-\varkappa}$ ist nach (23.) für $\varphi_0=x$, $\varphi_0=y$, $\varphi_0=y'$, …, $\varphi_0=y^{(n-3)}$ von Null verschieden, für $\varphi_0=y^{(n-2)}$ nur dann nicht, wenn $\eta=0$ ist. In diesem Fall wählen wir statt dessen $\varphi_0=x+y^{(n-2)}$, welches von den anderen φ_0 unabhängig ist, und wofür $\varphi_{\alpha-\varkappa}$ ebenfalls verschieden von Null ist, ferner ist $\frac{\alpha-\varkappa}{\alpha}<1$. Wir haben also den Satz:

Ist $y^{(n-1)}=\eta$ ein ***singuläres*** Integral der Differentialgleichung (1.), so gehören zu allen Zweigen von $y^{(n)}$ als Function von $y^{(n-1)}$, die für $y^{(n-1)}=\eta$ den Werth $\sigma=\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial y}y'+\cdots+\frac{\partial\eta}{\partial y^{(n-3)}}y^{(n-2)}+\frac{\partial\eta}{\partial y^{(n-2)}}\eta$ annehmen, n von einander unabhängige erste Integrale von der Form

$$(24.)\qquad \varphi_0+h_r(y^{(n-1)}-\eta)^{\frac{r}{\alpha}}+h_{r+1}(y^{(n-1)}-\eta)^{\frac{r+1}{\alpha}}+\cdots=\text{Const.},$$

worin die Coefficienten nach ganzen positiven Potenzen von

$$x-x_0,\ y-y_0,\ \ldots,\ y^{(n-2)}-y_0^{(n-2)}$$

fortschreitende Reihen sind und der ***Exponent der niedrigsten Potenz von*** $y^{(n-1)}-\eta$ ***überall kleiner als Eins ist.***

Ist endlich

2. $$k > \alpha - 1,$$

so erhält man aus (22.) durch Division mit $u^{\alpha-1}$:

$$\alpha\Big(\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial x}+\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial y}y'+\cdots+\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial y^{(n-3)}}y^{(n-2)}+\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial y^{(n-2)}}\eta\Big)+\alpha u^{\alpha}\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial y^{(n-2)}}$$
$$+u\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial u}\Big(-\frac{\partial\eta}{\partial y^{(n-2)}}+g_0u^{k-\alpha+1}+g_1u^{k-\alpha+2}+\cdots\Big)=0.$$

Aus dieser Gleichung folgt, dass für $u=0$:

$$\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial x}+\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial y}y'+\cdots+\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial y^{(n-3)}}y^{(n-2)}+\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial y^{(n-2)}}\eta=0$$

oder, indem wir von φ auf φ als Function von $x, y, y', \ldots, y^{(n-2)}, y^{(n-1)}$ zurückgehen, dass für $y^{(n-1)}=\eta$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}y'+\cdots+\frac{\partial\varphi}{\partial y^{(n-3)}}y^{(n-2)}+\frac{\partial\varphi}{\partial y^{(n-2)}}y^{(n-1)}$$
$$+\frac{\partial\varphi}{\partial y^{(n-1)}}\Big(\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial y}y'+\cdots+\frac{\partial\eta}{\partial y^{(n-3)}}y^{(n-2)}+\frac{\partial\eta}{\partial y^{(n-2)}}\eta\Big)=0$$

ist. Dies bedeutet aber, dass das totale Differential

$$\frac{d\varphi}{dx}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}y'+\cdots+\frac{\partial\varphi}{\partial y^{(n-2)}}y^{(n-1)}+\frac{\partial\varphi}{\partial y^{(n-1)}}\frac{dy^{(n-1)}}{dx}$$

für $y^{(n-1)}=\eta$ verschwindet, also $\varphi(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ für $y^{(n-1)}=\eta$ constant wird. Mithin ist in diesem Falle $y^{(n-1)}=\eta$ ein *particuläres* erstes Integral der Differentialgleichung (1.). Dies steht in Uebereinstimmung mit dem im ersten Abschnitte (vergl. S. 276) enthaltenen Ergebniss, wonach, wenn $y^{(n-1)}=\eta$ ein erstes Integral der Differentialgleichung (1.) und in der Entwickelung von der Form (4.) von $y^{(n)}$ nach Potenzen von $y^{(n-1)}-\eta$ $k>\alpha-1$ ist, $y^{(n-1)}=\eta$ ein particuläres erstes Integral darstellt. Dass auch die anderen im ersten Abschnitt bewiesenen Sätze betreffs der Entwickelung von $y^{(n-1)}-\eta$ nach Potenzen von $x-x_0$ sich aus den Darstellungen (21.) und (24.) der ersten Integrale ableiten lassen, kann man folgendermassen zeigen.

Specialisiren wir die Constanten auf der rechten Seite in den n ersten Integralen

$$\varphi_0+h_r(y^{(n-1)}-\eta)^{\frac{r}{\alpha}}+h_{r+1}(y^{(n-1)}-\eta)^{\frac{r+1}{\alpha}}+\cdots=\text{Const.},$$

in denen für φ_0 der Reihe nach die Werthe $x, y, y', \ldots, y^{(n-2)}$ gewählt sind, durch die Bedingung, dass $y, y' \ldots, y^{(n-2)}, y^{(n-1)}$ beziehlich die Werthe

$$y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-2)}, \eta(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-2)})$$

haben sollen, bezeichnen die Coefficienten h_r, h_{r+1} in der k-ten Gleichung mit $h_{r,k}$, $h_{r+1,k}$, ... und setzen wieder $y^{(n-1)}-\eta=u^\alpha$, so lauten die n Gleichungen

$$\begin{aligned}
x-x_0+h_{r,1}u^r+h_{r+1,1}u^{r+1}+\cdots&=0,\\
y-y_0+h_{r,2}u^r+h_{r+1,2}u^{r+1}+\cdots&=0,\\
y'-y_0'+h_{r,3}u^r+h_{r+1,3}u^{r+1}+\cdots&=0,\\
&\vdots\\
y^{(n-2)}-y_0^{(n-2)}+h_{r,n}u^r+h_{r+1,n}u^{r+1}+\cdots&=0,
\end{aligned}$$

worin die Coefficienten h nach ganzen positiven Potenzen von $x-x_0$, $y-y_0$, $y'-y_0'$, ..., $y^{(n-2)}-y_0^{(n-2)}$ fortschreitende Reihen sind. Diese Gleichungen lassen sich, da die Functionaldeterminante der Functionen auf der linken Seite nach den Variablen $x, y, y', \ldots, y^{(n-2)}$ für $u=0$ gleich 1 ist, durch Reihen für $x, y, \ldots, y^{(n-2)}$ befriedigen, die nach ganzen positiven Potenzen von u fortschreiten und in der Umgebung von $u=0$ convergiren, und zwar erhält man für x die Reihenentwickelung

$$x-x_0=-h_{r,1}(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-2)})u^r+\beta u^{r+1}+\cdots$$

und durch Umkehrung

$$u=(y^{(n-1)}-\eta)^{\frac{1}{\alpha}}=\Big(-\frac{1}{h_{r,1}}\Big)_0^{\frac{1}{r}}(x-x_0)^{\frac{1}{r}}+\gamma(x-x_0)^{\frac{2}{r}}+\cdots$$

$$(h_{r,1})_0=h_{r,1}(x_0, y_0, \ldots, y_0^{(n-2)})$$

und daraus

$$y^{(n-1)}-\eta=\Big(-\frac{1}{h_{r,1}}\Big)_0^{\frac{\alpha}{r}}(x-x_0)^{\frac{\alpha}{r}}+\gamma'(x-x_0)^{\frac{\alpha+1}{r}}+\cdots.$$

Ist nun $y^{(n-1)}=\eta$ kein erstes Integral, dann ist

$$\frac{r}{\alpha}\geqq 1 \quad \text{also} \quad \frac{\alpha}{r}\leqq 1,$$

ist $y^{(n-1)}=\eta$ ein singuläres erstes Integral, dann ist

$$\frac{r}{\alpha}<1 \quad \text{also} \quad \frac{\alpha}{r}>1.$$

Das sind dieselben Resultate, zu denen wir im ersten Abschnitt auf einem anderen Wege gelangt sind.

III.

Für die Function φ in einem Integrale erster Ordnung

$$\varphi(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})=C$$

haben wir im vorigen Abschnitt aus der Zweiggruppe von $y^{(n)}$ als Function von $y^{(n-1)}$, wie sie durch die Entwickelung (4.) des ersten Abschnitts in der

Umgebung von $y^{(n-1)} = \eta$ dargestellt ist, Ausdrücke abgeleitet, die alle auf die gemeinsame Form

$$\varphi = L_0 + L_1(y^{(n-1)}\eta)^{\frac{1}{\alpha}} + L_2(y^{(n-1)} - \eta)^{\frac{2}{\alpha}} + \cdots + L_{\alpha-1}(y^{(n-1)})^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}$$

gebracht werden können, wo $L_0, L_1, \ldots, L_{\alpha-1}$ Reihen bedeuten, die nach ganzen positiven Potenzen $x-x_0,\ y-y_0,\ y'-y_0',\ \ldots,\ y^{(n-2)}-y_0^{(n-2)},\ y^{(n-1)}-\eta$ fortschreiten. Den α verschiedenen Werthen von $(y^{(n-1)}-\eta)^{\frac{1}{\alpha}}$ entsprechen α verschiedene Ausdrücke für die φ, die mit $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\alpha$ bezeichnet seien. Die Coefficienten der Potenzen von C in dem Producte

$$(C-\varphi_1)(C-\varphi_2)\ldots(C-\varphi_\alpha)$$

als symmetrische Functionen von $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\alpha$ sind also durch Reihen, die nach ganzen positiven Potenzen von

$$x-x_0,\ y-y_0,\ y'-y_0',\ \ldots,\ y^{(n-2)}-y^{(n-2)},\ y^{(n-1)}-\eta$$

fortschreiten, darstellbar, und da η selbst eine Reihe von der Form $y_0^{(n-1)} + \mathfrak{P}(x-x_0,\ y-y_0,\ y'-y_0',\ \ldots,\ y^{(n-2)}-y_0^{(n-2)})$ ist, schliesslich durch Reihen, die nach ganzen positiven Potenzen von $x-x_0,\ y-y_0,\ y'-y_0',\ \ldots, y^{(n-1)}-y^{(n-1)}$ fortschreiten.

Die Gleichung

$$(25.) \qquad (C-\varphi_1)(C-\varphi_2)\ldots(C-\varphi_\alpha) = 0$$

ist ein erstes Integral der Differentialgleichung

$$(y^{(n)}-u_1)(y^{(n)}-u_2)\ldots(y^{(n)}-u_\alpha) = 0,$$

wenn $u_1, u_2, \ldots, u_\alpha$ die Zweige der Function $y^{(n)}$ sind, deren Gruppe durch die Entwickelung (4.) dargestellt ist. Denkt man sich die Differentialgleichung (1.), vom m-ten Grade in $y^{(n)}$, in ihre m linearen Theiler $y^{(n)}-u_k$ zerlegt, für jede zusammenhängende Gruppe von u_k die entsprechende Gleichung (25.) aufgestellt und das Product dieser Gleichungen gebildet, so erhält man als erstes Integral der vorgelegten Differentialgleichung eine Gleichung m-ten Grades in C

$$(26.) \qquad F(x, y, y' \ldots, y^{(n-1)}, C) = 0,$$

worin der Coefficient von C^m gleich Eins, und die Coefficienten der übrigen Potenzen von C Reihen sind, die in der Umgebung eines willkürlichen Werthsystems $x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$, wobei die auszuschliessenden Werthsysteme Continuen $(n-1)$-ter Dimensionen erfüllen, in Reihen, die nach ganzen positiven Potenzen von $x-x_0, y-y_0, \ldots, y^{(-1)}-y_0^{(n-1)}$ fortschreiten, entwickelt werden

können. Indem man für die bei der Herstellung der Gleichung (26.) auftretenden willkürlichen Functionen der Reihe nach $x, y, y', \ldots, y^{(n-2)}$ wählt, erhält man n von einander unabhängige erste Integrale

$$F_1(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}, C_1) = 0, \ \ldots, \ F_n(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}, C_n) = 0,$$

aus denen durch Elimination von $y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$ sich

$$\psi(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0$$

als das vollständige Integral der vorgelegten Differentialgleichung mit n willkürlichen Constanten ergiebt.

Wir legen im Folgenden die Gleichung (26.) vom m-ten Grade in C

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}, C) = 0$$

zu Grunde und bilden die Differentialgleichung, der diese Gleichung als erstes Integral genügt. Die totale Differentiation derselben nach x, wobei wir C als durch diese Gleichung bestimmte Function von $x, y, \ldots, y^{(n-1)}$ betrachten, ergiebt

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' + \cdots + \frac{\partial F}{\partial y^{(n-1)}} y^{(n)} = -\frac{\partial F}{\partial C}\frac{dC}{dx}, \tag{27.}$$

wo

$$\frac{dC}{dx} = \frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y} y' + \cdots \frac{\partial C}{\partial y^{(n-1)}} y^{(n)}$$

gesetzt ist. Multiplicirt man die m Gleichungen, die aus (27.) hervorgehen, indem man für C die m Wurzeln $C_1, C_2, \ldots, C_m$ der Gleichung (26.) einsetzt, mit einander, so erhält man die Identität

$$\prod_{k=1}^{k=m} \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' + \cdots + \frac{\partial F}{\partial y^{(n-1)}} y^{(n)}\right)_{C=C_k} = (-1)^m \prod_{k=1}^{k=m} \left(\frac{\partial F}{\partial C}\right)_{C=C_k} \frac{dC_1}{dx} \cdot \frac{dC_2}{dx} \cdots \frac{dC_m}{dx},$$

$\prod_{k=1}^{k=m} \left(\frac{\partial F}{\partial C}\right)_{C=C_k}$ ist die Discriminante der Gleichung (26.) in Bezug auf C, die wir mit $(-1)^m D$ bezeichnen, sie ist eine Function von $x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}$; die linke Seite ist ein Polynom m-ten Grades in $y^{(n)}$, dessen von $x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ abhängende Coefficienten einen gemeinsamen Factor haben können, den wir M nennen, und so erhalten wir

$$Mf(x, y, y' \ldots y^{(n)}) = D \frac{dC_1}{dx} \cdot \frac{dC_2}{dx} \cdots \frac{dC_m}{dx}. \tag{28.}$$

Die Gleichung

$$f(x, y, y' \ldots y^{(n)}) = 0$$

vom m-ten Grade in $y^{(n)}$ mit von $x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ abhängenden Coefficienten ohne gemeinsamen Factor ist dann eine Differentialgleichung n-ter Ordnung,

welche, wie aus (28.) hervorgeht, durch $C_k = \text{const.}$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots, m)$ befriedigt wird, da durch diese Gleichungen für einen beliebigen Werth der Constanten nicht die von $y^{(n)}$ freie Gleichung $M = 0$ erfüllt werden kann; also stellt $f = 0$ die Differentialgleichung dar, für welche die Gleichung (26.) ein erstes Integral mit willkürlicher Constante (vollständiges erstes Integral) ist. Aber $f = 0$ kann auch noch erfüllt werden, wenn $D = 0$ ist. Wird dieser Gleichung durch $y^{(n-1)} = \eta(x, y, y', \ldots, y^{(n-2)})$ genügt, so stellt die letztere Gleichung, je nachdem keine der Wurzeln $C_1, \ldots, C_m$, oder einige, oder alle durch die Substitution $y^{(n-1)} = \eta$ einen constanten Werth erhalten, ein singuläres erstes Integral, ein singuläres und particuläres erstes Integral zugleich oder nur ein particuläres erstes Integral dar. Aber die Gleichung $D = 0$ kann auch erfüllt werden, ohne dass $f = 0$ wird, denn die Gleichung (28.) wird auch befriedigt, wenn mit $D = 0$ zugleich $M = 0$ ist. Genügt nun $y^{(n-1)} = \eta$ der Gleichung $D = 0$ und mit ihr der Gleichung $M = 0$ aber nicht der Gleichung $f = 0$, so ist $y^{(n-1)} = \eta$ überhaupt kein Integral der Differentialgleichung $f = 0$. Es ist nun wichtig festzustellen, unter welcher Bedingung dies eintritt.

Da $D = 0$ die Bedingung dafür enthält, dass mehrere Wurzeln C der Gleichung (26.) einander gleich werden, so mögen p Wurzeln C für $y^{(n-1)} = \eta$ den gleichen Werth ζ annehmen, der nicht constant sein soll, da sonst $y^{(n-1)} = \eta$ ein particuläres Integral der Differentialgleichung $f = 0$ wäre. Die Gleichung (26.) nach Potenzen von $y^{(n-1)} - \eta$ und $C - \zeta$ geordnet, erhält dann die Form

$$F = (y^{(n-1)} - \eta)\mathfrak{P}_0(y^{(n-1)} - \eta, C - \zeta) + (C - \zeta)^p \mathfrak{P}_1(y^{(n-1)} - \eta, C - \zeta) = 0,$$

wo, wie auch im Folgenden, $\mathfrak{P}$ Reihen nach ganzen positiven Potenzen der eingeklammerten Grössen mit von $x, y, y', \ldots, y^{(n-2)}$ abhängenden Coefficienten bedeuten, und $\mathfrak{P}_1$ für $y^{(n-1)} = \eta, C = \zeta$ von Null verschieden ist. Es folgt daraus für $\frac{\partial F}{\partial C}$ die Form

$$\frac{\partial F}{\partial C} = (y^{(n-1)} - \eta)\mathfrak{P}_2(y^{(n-1)} - \eta, C - \zeta) + (C - \zeta)^{p-1}\mathfrak{P}_3(y^{(n-1)} - \eta, C - \zeta), \tag{29.}$$

wo $\mathfrak{P}_3$ für $y^{(n-1)} = \eta, C = \zeta$ nicht verschwindet.

Nun möge eine Gruppe von $\alpha \leqq p$ Zweigen der Function C, die in $y = \eta$ den Werth ζ annehmen, die Entwickelung haben

$$C - \zeta = g_0(y^{(n-1)} - \eta)^{\frac{r}{\alpha}} + g_1(y^{(n-1)} - \eta)^{\frac{r+1}{\alpha}} + \cdots \tag{30.}$$

wo $g_0, g_1, \ldots$ in der Umgebung von $x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-2)}$ stetige Functionen bedeuten,

von denen g_0 nicht identisch verschwindet. Substituirt man den Ausdruck (30.) für $C-\zeta$ in (29.), so erhält $\frac{\partial F}{\partial C}$ die Form

$$\frac{\partial F}{\partial C} = (y^{(n-1)}-\eta)^{\varrho}\mathfrak{P}_0\Big((y^{(n-1)}-\eta)^{\frac{1}{\alpha}}\Big),$$

wo $\mathfrak{P}_0$ für $y^{(n-1)}=\eta$ nicht identisch verschwindet. ϱ wird nur dann kleiner als 1 sein, wenn

$$(p-1)\frac{r}{\alpha}<1,$$

und in diesem Falle ist $\varrho=(p-1)\frac{r}{\alpha}$, sonst ist $\varrho\geqq 1$.

Aus (30.) folgt

$$\frac{dC}{dx}=\frac{d\zeta}{dx}+(y^{(n-1)}-\eta)^{\frac{r}{\alpha}}\mathfrak{P}_1\Big((y^{(n-1)}-\eta)^{\frac{1}{\alpha}}\Big)+(y^{(n-1)}-\eta)^{\frac{r}{\alpha}-1}\mathfrak{P}_2\Big((y^{(n-1)}-\eta)^{\frac{1}{\alpha}}\Big)\Big(\frac{dy^{(n-1)}}{dx}-\frac{d\eta}{dx}\Big),$$

wo $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ für $y^{(n-1)}=\eta$ nicht identisch verschwinden. Also

$$(31.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial C}\cdot\dfrac{dC}{dx} = \mathfrak{P}_0\Big((y^{(n-1)}-\eta)^{\frac{1}{\alpha}}\Big)\Big[(y^{(n-1)}-\eta)^{\varrho}\Big\{\dfrac{d\zeta}{dx}+(y^{(n-1)}-\eta)^{\frac{r}{\alpha}}\mathfrak{P}_1\Big((y^{(n-1)}-\eta)^{\frac{1}{\alpha}}\Big)\Big\} \\ \qquad\qquad +(y^{(n-1)}-\eta)^{\varrho+\frac{r}{\alpha}-1}\mathfrak{P}_2\Big((y^{(n-1)}-\eta)^{\frac{1}{\alpha}}\Big)\Big(\dfrac{dy^{(n-1)}}{dx}-\dfrac{d\eta}{dx}\Big)\Big]. \end{cases}$$

Ist nun $\frac{r}{\alpha}\geqq 1$, so erhält man aus (31.) nach Abtrennung des Factors $(y^{(n-1)}-\eta)^{\varrho}$ einen Ausdruck, der für $y^{(n-1)}=\eta$ nicht verschwindet, da nach unseren Voraussetzungen $\frac{d\zeta}{dx}$ und $\mathfrak{P}_0$ für $y^{(n-1)}=\eta$ von Null verschieden sind.

Ist aber $\frac{r}{\alpha}<1$, dann ist $(y^{(n-1)}-\eta)^{\varrho+\frac{r}{\alpha}-1}$ die höchste gemeinsame Potenz von $y^{(n-1)}-\eta$ auf der rechten Seite von (31.) und nach Abtrennung dieser Potenz bleibt ein Ausdruck, der, da $\mathfrak{P}_0$ und $\mathfrak{P}_2$ für $y^{(n-1)}=\eta$ von Null verschieden sind, $y^{(n-1)}-\eta$ nicht mehr als Factor enthält, aber doch für $y^{(n-1)}=\eta$ verschwindet, weil dann $\frac{dy^{(n-1)}}{dx}=\frac{d\eta}{dx}$ wird.

Ist daher in den Entwickelungen aller Wurzeln C nach Potenzen von $y^{(n-1)}-\eta$ von der Form (30.) der Exponent der niedrigsten Potenz $\frac{r}{\alpha}\geqq 1$ und bezeichnet man die zugehörigen Exponenten mit $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_m$, so ergiebt der Ausdruck

$$(32.)\quad \prod_{k=1}^{k=m}\Big(\frac{\partial F}{\partial C}\Big)_{C=C_k}\frac{dC_1}{dx}\frac{dC_2}{dx}\cdots\frac{dC_m}{dx}=(-1)^m Mf(x, y, y', \ldots, y^{(m)})$$

durch $(y^{(n-1)}-\eta)^{\varrho_1+\varrho_2+\cdots\varrho_m}$ dividirt, einen Quotienten, der für $y^{(n-1)}=\eta$ nicht verschwindet. Diese Potenz von $y^{(n-1)}-\eta$ kann aber nur M als Factor enthalten, da nach unserer Voraussetzung die Coefficienten von f ohne gemeinsamen Theiler sind; also wird $M=0$, aber nicht $f=0$ durch $y^{(n-1)}=\eta$ befriedigt, oder $y^{(n-1)}=\eta$ ist in diesem Falle ***kein*** Integral der Differentialgleichung. Ist hingegen für eine Gruppe der Wurzel C_n in der Entwickelung von der Form (30.) der Exponent der niedrigsten Potenz von $y-\eta$ $\frac{r}{\alpha}<1$, dann bleibt nach Abtrennung der höchsten Potenz von $y^{(n-1)}-\eta$ auf der rechten Seite von (32.) noch der Ausdruck $M'f(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$ übrig, der nach dem Obigen für $y^{(n-1)}=\eta$ verschwindet, während M' nicht mehr $y^{(n-1)}-\eta$ als Factor enthält, also muss $f(x, y, y', \ldots, y^{(n)})=0$ werden für $y^{(n-1)}=\eta$, oder $y^{(n-1)}=\eta$ ist in diesem Falle ein Integral der Differentialgleichung.

Im vorigen Abschnitt haben wir, von der Differentialgleichung ausgehend, festgestellt, dass wenn $\varphi(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})=C$ ein erstes Integral ist, in der Entwickelung von C nach Potenzen von $y^{(n-1)}-\eta$ der Exponent der niedrigsten Potenz von $y-\eta$ nur dann kleiner als 1 ist, wenn $y^{(n-1)}=\eta$ eine Wurzel der Discriminantengleichung in Bezug auf y' $(\Delta=0)$ und zugleich ein singuläres Integral der Differentialgleichung ist. Daraus erkennt man, dass die Discriminantengleichungen $\Delta=0$ und $D=0$ die singulären Lösungen $y^{(n-1)}=\eta$ zu gemeinsamen Wurzeln haben müssen. Während übrigens von den Coefficienten der Differentialgleichung eine Bedingung erfüllt werden muss, damit eine Wurzel der Discriminantengleichung $\Delta=0$ ein Integral darstellt, nämlich dass $\zeta=\sigma$ ist, haben umgekehrt die Coefficienten des ersten Integrals $F(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}C)=0$ wenigstens eine Bedingung zu erfüllen, damit eine Wurzel der Discriminantengleichung in Bezug auf C $(D=0)$ ***kein*** Integral der Differentialgleichung ist. Es muss nämlich für diese Wurzel $y^{(n-1)}=\eta$ ausser $\frac{\partial F}{\partial C}$ zugleich $\frac{\partial F}{\partial y^{(n-1)}}=0$ sein. Denn ist $\frac{\partial F}{\partial y^{(n-1)}}$ für $y^{(n-1)}=\eta$ von Null verschieden, dann lässt sich $y^{(n-1)}-\eta$ in eine Reihe nach ganzen positiven Potenzen von $C-\zeta$ (wo ζ ein η entsprechender Werth von C ist) entwickeln, in der der Exponent der niedrigsten Potenz, da $\frac{\partial F}{\partial C}=0$, grösser als 1 ist; die Umkehrung ergiebt dann eine Reihenentwickelung von $C-\zeta$ nach Potenzen von $y^{(n-1)}-\eta$, in denen der Exponent der niedrigsten Potenz kleiner als 1 ist, in welchem Falle, wie bewiesen, $y^{(n-1)}=\eta$ ein Integral der Differentialgleichung ist.

Geht man von der vollständigen Lösung der Differentialgleichung mit n willkürlichen Constanten aus

$$\psi(x, y, C_1, C_2 \ldots C_n) = 0,$$

so erhält man die n ersten Integrale, indem man je $n-1$ der Constanten aus den Gleichungen

$$(33.) \qquad \psi = 0, \quad \frac{d\psi}{dx} = 0, \quad \frac{d^2\psi}{dx^2} = 0 \ldots, \quad \frac{d^{n-1}\psi}{dx^{n-1}} = 0$$

eliminirt, wo bei den totalen Differentiationen y als Function von x zu betrachten ist. Dieselben seien

$$(34.) \qquad F_k(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}, C_k) = 0 \qquad (k = 1, 2 \ldots n);$$

dann giebt es Factoren $M_0^k, M_1^k, \ldots, M_{n-1}^k$ von der Beschaffenheit, dass identisch

$$M_0^k\psi + M_1^k\frac{d\psi}{dx} + M_2^k\frac{d^2\psi}{dx^2} + \cdots + M_{n-1}^k\frac{d^{n-1}\psi}{dx^{n-1}} = F_k(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}, C_k).$$

Differentiirt man diese Gleichung nach $C_1, C_2, \ldots, C_n$ und berücksichtigt (33.), so erhält man

$$M_0^k\frac{\partial\psi}{\partial C_\lambda} + M_1^k\frac{\partial\frac{d\psi}{dx}}{\partial C_\lambda} + M_2^k\frac{\partial\frac{d^2\psi}{dx^2}}{\partial C_\lambda} + \cdots + M_{n-1}^k\frac{\partial\frac{d^n\psi}{dx^n}}{\partial C_\lambda} = 0,$$

wenn $\lambda \gtrless k$, und

$$M_0^k\frac{\partial\psi}{\partial C_k} + M_0^k\frac{\partial\frac{d\psi}{dx}}{\partial C_k} + M_2^k\frac{\partial\frac{d^2\psi}{dx^2}}{\partial C_k} + \cdots + M_{n-1}^k\frac{\partial\frac{d^n\psi}{dx^n}}{\partial C_k} = \frac{\partial F_k}{\partial C_k}.$$

Hieraus folgt, dass wenn gleichzeitig mit dem Bestehen der Gleichungen (33.) die Determinante

$$\Sigma\pm\frac{\partial\psi}{\partial C_1}\frac{\partial\frac{d\psi}{dx}}{\partial C_2}\frac{\partial\frac{d^2\psi}{dx^2}}{\partial C_3}\cdots\frac{\partial\frac{d^{n-1}\psi}{dx^{n-1}}}{\partial C_n}$$

verschwindet, die Gleichungen $F_k = 0$ und $\frac{\partial F_k}{\partial C_k} = 0$, für $k = 1, 2, \ldots, n$ eine unmittelbare Folge sind. Die Elimination von C_k aus $F_k = 0$, $\frac{\partial F_k}{\partial C_k} = 0$ ergab aber für jedes der k nach dem Vorhergehenden eine Gleichung, welche die singulären Lösungen der Differentialgleichung enthält. Also erhält man aus der vollständigen Lösung $\psi(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0$ die singulären Lösungen

durch Elimination sämmtlicher Constanten aus den $n+1$ Gleichungen

$$\psi = 0, \quad \frac{d\psi}{dx} = 0, \ldots, \frac{d^{n-1}\psi}{dx^n} = 0, \quad \Sigma \pm \frac{\partial \psi}{\partial C_1} \frac{\partial \frac{d\psi}{dx}}{\partial C_2} \cdots \frac{\partial \frac{d^{n-1}\psi}{dx^{n-1}}}{\partial C_n} = 0.$$

Beispiele:

1.

(1.) $$x^2 y''^2 + 2y''(y - xy') + 4 = 0.$$

Hier ist $\Delta = (y - xy')^2 - 4x^2$; $\Delta = 0$ giebt nach y' aufgelöst

$$y' = \eta = \frac{y}{x} \pm 2.$$

Nehmen wir das positive Vorzeichen, da für das negative alles Folgende gleichfalls gilt, also $\eta = \frac{y}{x} + 2$, dann wird $\sigma = \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y}\eta = \frac{2}{x}$ und für $y' = \eta$

$$x^2 y''^2 - 4xy'' + 4 = 0, \text{ also } y'' = \zeta = \frac{2}{x}.$$

Da hier $\zeta = \sigma$ für $y' = \eta$, so ist $y' = \frac{y}{x} + 2$ ein erstes Integral. Um zu erkennen, ob es ein singuläres ist, entwickeln wir y'' nach Potenzen von $y' - \eta = y' - \left(\frac{y}{x} + 2\right)$. Man erhält

(2.) $$\begin{cases} y'' - \frac{2}{x} = \frac{y' - \eta}{x} + \frac{(y' - \eta)^{\frac{1}{2}}(y' - \eta + 4)^{\frac{1}{2}}}{x} \\ \qquad = \frac{1}{x}\left\{2(y' - \eta)^{\frac{1}{2}} + (y' - \eta)^{\frac{3}{2}} + \frac{(y' - \eta)^{\frac{3}{2}}}{4} - \frac{1}{64}(y' - \eta)^{\frac{5}{2}} + \cdots\right\}. \end{cases}$$

In dieser Entwickelung ist $k = 1, \alpha = 2$, also $k < \alpha$, folglich nach S. 276 des ersten Abschnitts $y' = \frac{y}{x} + 2$ ein *singuläres* erstes Integral. Setzt man $y' = \eta + u^2$, also $y'' = \frac{2}{x} + \frac{u^2}{x} + 2u\frac{du}{dx}$, so ergiebt sich aus (2.)

(3.) $$2\frac{du}{dx} = \frac{\sqrt{u^2 + 4}}{x} \text{ oder } \frac{dx}{du} = \frac{2x}{\sqrt{4 + u^2}}.$$

Die Integration dieser Gleichung unter der Bedingung, dass $u = 0$ für $x = x_0$, wo x_0 von Null verschieden angenommen ist, giebt

$$x - x_0 = x_0 u + \alpha u^2 + \cdots,$$

also durch Umkehrung

$$u = (y'-\eta)^{\frac{1}{2}} = \frac{x-x_0}{x_0} + \alpha'(x-x_0)^2 \ldots,$$

$$y'-\eta = \frac{(x-x_0)^2}{x_0^2} + \beta(x-x_0)^3 \ldots,$$

also der Exponent der niedrigsten Potenz von $x-x_0$ grösser als 1, entsprechend dem Kriterium für das singuläre Integral im ersten Abschnitt (S. 275).

Die Gleichung (1.) lässt sich in endlicher Form integriren. Das vollständige Integral von (3.) ist

$$u = (y'-\eta)^{\frac{1}{2}} = (cx)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{(cx)^{\frac{1}{2}}}, \quad \text{also}$$

$$y'-\eta = y'-\frac{y}{x}-2 = cx+\frac{1}{cx}-2$$

oder

$$y' = \frac{y}{x}+cx+\frac{1}{cx} \tag{4.}$$

als erstes vollständiges Integral. Nach Potenzen von c geordnet, lautet dasselbe

$$c^2x^2+c(y-xy')+1 = 0.$$

Entwickelt man c nach Potenzen von $y'-\eta = y'-\left(\frac{y}{x}+2\right)$, so ergiebt sich

$$c-\frac{1}{x} = \frac{y'-\eta}{2x} + \frac{\sqrt{(y'-\eta)(y'-\eta+4)}}{2x} = \frac{(y'-\eta)^{\frac{1}{2}}}{x} + \frac{y'-\eta}{2x} + \frac{(y'-\eta)^{\frac{3}{2}}}{8x} + \cdots,$$

also ist der Exponent der niedrigsten Potenz von $y'-\eta$ in der Entwickelung von c kleiner als 1, wie es nach dem Satze im zweiten Abschnitt (S. 282) beim singulären Integrale stets der Fall ist. Specialisirt man die Constante c so, dass für $x = x_0$, $y' = \eta$ wird, indem man $c = \frac{1}{x_0}$ setzt, so wird

$$\frac{x-x_0}{x_0} = (y'-\eta)^{\frac{1}{2}} + \frac{y'-\eta}{2} + \frac{(y'-\eta)^{\frac{3}{2}}}{8} + \cdots,$$

woraus wie oben folgt:

$$y'-\eta = \frac{(x-x_0)^2}{x_0^2} + \beta(x-x_0)^3 + \cdots.$$

Bildet man von dem ersten vollständigen Integrale die Discriminante, indem man aus den Gleichungen

$$c^2x^2+c(y-xy')+1 = 0, \qquad 2cx^2+y-xy' = 0$$

c eliminirt, so erhält man

$$D = (y-xy')^2-4x^2 = 0.$$

Hier fällt D mit Δ zusammen.

Endlich kann man die Differentialgleichung erster Ordnung (4.) wiederum in endlicher Form integriren und erhält als vollständige endliche Integralgleichung mit zwei willkürlichen Constanten

$$y = cx^2 + c_1 x - \frac{1}{c}. \tag{5.}$$

Schreibt man

$$\psi = y - cx^2 - c_1 x + \frac{1}{c} \quad \text{und} \quad \varphi = \frac{d\psi}{dx} = y' - 2cx - c_1,$$

so erhält man die singulären Lösungen auch, indem man c und c_1 aus den drei Gleichungen

$$\psi = 0, \quad \varphi = 0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial c}\frac{\partial\varphi}{\partial c_1} - \frac{\partial\psi}{\partial c_1}\frac{\partial\varphi}{\partial c} = \frac{1}{c^2} - x^2 = 0$$

eliminirt. Die letzte Gleichung giebt $c = \pm\frac{1}{x}$, die zweite dann $c_1 = y' \mp 2$, und diese beiden Werthe in die erste eingesetzt $y = \pm x + (y' \mp 2)x \mp x = (y' \mp 2)x$, also $y - xy' = \mp 2x$, welche beide Gleichungen vereinigt wieder $(y - xy')^2 - 4x^2 = 0$ ergeben.

Bemerken wir noch, dass die singuläre Lösung $y' = \frac{y}{x} + 2$ zum Integral $y = 2x\log x + cx$ hat, welche Gleichung also die Schar der singulären Integralcurven darstellt. Bestimmt man c durch die Bedingung, dass für $x = x_0, y = y_0$ wird, so lautet die Gleichung

$$y = \frac{y_0}{x_0}x + 2x\log\frac{x}{x_0}, \tag{6.}$$

und es wird für $x = x_0$, $y' = \frac{y_0}{x_0} + 2$. Bestimmt man nun die beiden Constanten c und c_1 der vollständigen Lösung so, dass für $x = x_0$, $y = y_0$ und $y' = \frac{y_0}{x_0} + 2$ wird, so lautet dieselbe

$$y = \frac{x^2}{x_0} + \frac{y_0}{x_0}x - x_0, \tag{7.}$$

und man findet, dass die zweite Ableitung von x, y in (6.) und (7.) für $x = x_0$ denselben Werth $y'' = \frac{2}{x_0}$ hat.

Jede particuläre Integralcurve, die eine der singulären Curven in einem Punkte in der ersten Ordnung berührt, berührt sie in demselben Punkte auch in der zweiten Ordnung. Die hier vorkommenden Entwickelungen verlieren ihre Gültigkeit nur in dem Falle, dass $x_0 = 0$ ist.

Also hat in unserem Beispiel die Differentialgleichung nur die feste Ausnahmestelle $x = 0$.

Bemerken wir noch, dass während die vollständige Lösung algebraisch ist, die singuläre Lösung einen Logarithmus enthält, also transcendent ist. Es rührt das daher, dass zwar die Differentialgleichung erster Ordnung, welche die singuläre Lösung darstellt, als durch algebraische Operationen aus der Differentialgleichung zweiter Ordnung abgeleitet, stets algebraisch ist, doch die Integration derselben eine Transcendente einführen kann, die in der vollständigen Lösung nicht enthalten ist. So war das erste vollständige Integral $y' = \frac{y}{x} + cx + \frac{1}{cx}$; integrirt man diese Gleichung, c als constant behandelnd, so erhält man das rationale Integral (5.). Um aber die singuläre Lösung zu erhalten, muss man für c die im allgemeinen von x, y, y' abhängende Function nehmen, die aus der Nullsetzung der Ableitung nach c entspringt, hier $c = \sqrt{x^2}$, und so kann allerdings durch die Integration der die singuläre Lösung repräsentirenden Differentialgleichung eine Transcendente auftreten, die der vollständigen Lösung fremd ist.

2.

(8.) $$y''^2(xy' - y + 1) - 4y'' + 4 = 0.$$

Hier ist $\Delta = 4(xy' - y)$, $\Delta = 0$ liefert $y' = \eta = \frac{y}{x}$, $\sigma = \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y}\eta = 0$ und für $y' = \eta$, $y''^2 - 4y'' + 4 = 0$, also $y'' = \zeta = 2$. Da ζ von σ verschieden ist, so ist $y' = \frac{y}{x}$ ***kein*** erstes Integral der Gleichung (8.). Die Entwickelung von y'' nach Potenzen von $y' - \eta$ lautet

$$y'' - 2 = \frac{-2x(y' - \eta) + 2i\sqrt{x}\sqrt{y' - \eta}}{1 + x(y' - \eta)}$$

$$= 2i\sqrt{x}(y' - \eta)^{\frac{1}{2}} - 2x(y' - \eta)^{\frac{3}{2}} - 2ix^{\frac{3}{2}}(y' - \eta)^{\frac{3}{2}} + \cdots.$$

Setzt man $y' = \eta + u^2$, also $y'' = \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y}(\eta + u^2) + 2u\frac{du}{dx} = \frac{u^2}{x} + 2u\frac{du}{dx}$, so ergiebt sich

$$2u\frac{du}{dx} = 2 + 2i\sqrt{x} \cdot u - \left(2x + \frac{1}{x}\right)u^2 + \alpha u^3 + \cdots,$$

$$\frac{dx}{du} = u - i\sqrt{x}u^2 + \beta u^3 \cdots,$$

woraus durch Integration mit der Bestimmung, dass für $x = x_0$, $u = 0$:

$$x - x_0 = \frac{u^2}{2} + \gamma u^3 + \cdots.$$

Durch Umkehrung wird

$$u = \sqrt{y' - \eta} = \sqrt{2}(x - x_0)^{\frac{1}{2}} + \beta_2 (x - x_0)^{\frac{3}{2}} \ldots,$$
$$y' - \eta = 2(x - x_0) + \gamma (x - x_0)^{\frac{3}{2}} \ldots,$$

also ist der Exponent der niedrigsten Potenz von $x - x_0$ gleich 1, in Uebereinstimmung mit dem Satze im ersten Abschnitt, wonach er, falls $y' = \eta$ kein erstes Integral ist, nicht grösser als 1 sein darf. Das vollständige erste Integral von (8.) lässt sich in endlicher Form finden, indem man $y - xy' = z$ setzt. Man erhält

$$z'(1 + \sqrt{z}) = -2x$$

also

$$z + \frac{2}{3} z^{\frac{3}{2}} = -x^2 + C,$$

woraus man das erste Integral in der Form

$$(9.) \qquad F = 9(y - xy' + x^2 + C)^2 - 4(y - xy')^3 = 0$$

erhält. Da C durch Einsetzen von $y' = \frac{y}{x}$ keinen constanten Werth erhält, erkennt man, dass $y' = \frac{y}{x}$ kein particuläres erstes Integral ist. Die Discriminante von (9.) in Beziehung auf C ist $D = (y - xy')^3$; $D = 0$, giebt also, wie $\Delta = 0$, als einzige Wurzel $y' = \frac{y}{x}$. Dass diese auch kein singuläres Integral ist, ersieht man aus der Entwickelung von C nach Potenzen von $y' - \eta = y' - \frac{y}{x}$:

$$(10.) \qquad C + x^2 = x\left(y' - \frac{y}{x}\right) + \frac{2}{3}(-x)^{\frac{3}{2}}\left(y' - \frac{y}{x}\right)^{\frac{3}{2}},$$

worin der Exponent der niedrigsten Potenz ***nicht*** kleiner als 1 ist (vergl. den Satz S. 281 im zweiten Abschnitt).

Aus (9.) und (10.) folgt

$$\frac{\partial F}{\partial C}\frac{dC}{dx} = 12x(y - xy')^{\frac{3}{2}}\left(-2 + y'' - y''(y - xy')^{\frac{1}{2}}\right),$$

und indem man die den beiden Wurzelwerthen entsprechenden Werthe von C mit C_1 und C_2 bezeichnet,

$$\left|\frac{\partial F}{\partial C}\right|_{C=C_1} \cdot \left|\frac{\partial F}{\partial C}\right|_{C=C_2} \cdot \frac{dC_1}{dx} \cdot \frac{dC_2}{dx} = 144x^2(y - xy')^3 |y''^2(xy' - y + 1) - 4y'' + 4|.$$

Die Differentialgleichung, wie sie aus (9.) durch totale Differentiation nach x in der Form

$$\left|\frac{dF}{dx}\right|_{C=C_1} \cdot \left|\frac{dF}{dx}\right|_{C=C_2} = \left|\frac{\partial F}{\partial C}\right|_{C=C_1} \left|\frac{\partial F}{\partial C}\right|_{C=C_2} \frac{dC_1}{dx} \cdot \frac{dC_2}{dx} \text{ (s. S. 286)}$$

gewonnen wird, enthält also als gemeinsamen Factor den Coefficienten $x^2(y-xy')^3$, nach dessen Abtrennung die Differentialgleichung (8.) entsteht, die nicht mehr durch $y' = \frac{y}{x}$ befriedigt wird. Specialisirt man C so, dass für $x = x_0, y = y_0, y' = \frac{y_0}{x_0}$ wird, indem man $C = -x_0^2$ setzt, so erhält man, wenn man noch wie oben, $y' = \frac{y}{x} + u^2$ einführt, aus (10.)

$$x^2 - x_0^2 = xu^2 + \frac{2}{3} i x^{\frac{3}{2}} u^3,$$

$$x - x_0 = \frac{xu^2 + \frac{3}{2} i x^{\frac{3}{2}} u^3}{2x_0 + x - x_0};$$

hieraus folgt die Entwickelung

$$x - x_0 = \frac{u^2}{2} + \beta u^3 + \cdots$$

woraus dann weiter, wie oben

$$y' - \eta = y' - \frac{y}{x} = 2(x - x_0) + \gamma(x - x_0)^{\frac{3}{2}}$$

abgeleitet wird.

3.

$$x^4 y''^4 - 4(x^2 y'' - 2xy' + 2y)^2 (xy' - y) = 0.$$

Nach y'' aufgelöst, giebt diese Gleichung die vier Wurzeln

$$y'' = \sqrt{xy' - y}\left\{1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\sqrt{xy' - y}}{x^2}}\right\}, \quad y'' = -\sqrt{xy' - y}\left\{1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\sqrt{xy' - y}}{x^2}}\right\}.$$

Mehrere dieser Wurzeln werden gleich, wenn

$$1.\ y' = \eta = \frac{y}{x}. \qquad 2.\ y' = \eta = \frac{y}{x} + \frac{x^3}{16},$$

$y' = \frac{y}{x}$ genügt der Differentialgleichung, da $\sigma = \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y}\eta = 0$ und $y'' = \zeta = 0$ wird, ist also ein erstes Integral der Differentialgleichung. Die Entwickelungen von y'' nach Potenzen von $y' - \eta = y' - \frac{y}{x}$ lauten nach den beiden Auflösungen:

$$y'' = \pm\sqrt{x}\cdot\sqrt{y'-\eta}\left\{1-\sqrt{1-\frac{4\sqrt{y'-\eta}}{x^{\frac{3}{2}}}}\right\}, \qquad y'' = \pm\sqrt{x}\cdot\sqrt{y'-\eta}\left\{1+\sqrt{1-\frac{4\sqrt{y'-\eta}}{x^{\frac{3}{2}}}}\right\},$$

$$y'' = \pm\frac{2(y'-\eta)}{x}+\alpha(y'-\eta)^{\frac{3}{2}}+\cdots,$$

$$y'' = \pm 2\sqrt{x}(y'-\eta)^{\frac{1}{2}}+\beta(y'-\eta)^{\frac{2}{2}}+\cdots.$$

In der ersten Entwickelung ist $k=1$, $\alpha=1$, also $k>\alpha-1$, woraus folgt (S. 276 des ersten Abschnittes), dass $y'=\frac{y}{x}$ ein particuläres erstes Integral ist. Dies wird bestätigt, wenn man $y'-\eta$ nach Potenzen von $x-x_0$ (x_0 von Null verschieden) entwickelt. Setzt man nämlich $y'=\eta+u^2$, so erhält man $y''=\frac{u^2}{x}+2u\frac{du}{dx}$, also

$$2\frac{du}{dx}+\frac{u}{x}=\pm\frac{2u}{x}+\alpha u^2+\cdots,$$

woraus $u=y'-\frac{y}{x}=0$ folgt.

In der zweiten Entwickelung ist $k=1$, $\alpha=2$, also $k<\alpha$, folglich ist (nach S. 276) $y'=\frac{y}{x}$ zugleich ein singuläres erstes Integral.

Diese Resultate erhält man auch aus dem ersten Integrale mit willkürlicher Constante

$$xy'-y = C^2(x-C)^2.$$

Denn zunächst geht $y'=\frac{y}{x}$ aus ihm hervor, wenn man $C=0$ setzt, also ist $y'=\frac{y}{x}$ ein particuläres erstes Integral. Ferner ist das vollständige Integral der Differentialgleichung mit zwei willkürlichen Constanten:

$$y = C^2x^2-2C^3x\log x-C^4+C_1x.$$

Das Integral von $y'=\frac{y}{x}$ ist.

$$y=\alpha x.$$

Die Gerade aus der Schar, die durch den Punkt x_0, y_0 geht, hat die Gleichung $y=\frac{y_0}{x_0}x$, woraus $y'=\frac{y_0}{x_0}$.

Setzt man nun $C=x_0$, $C_1=\frac{y_0}{x_0}+2x_0^3\log x_0$, also

$$y = x_0^2(x^2-x_0^2)-2xx_0^3\log\frac{x}{x_0}+\frac{xy_0}{x},$$

so stellt diese Gleichung aus der zweifach unendlichen Schar der Integralcurven, wie aus

$$y' = 2x_0^2(x-x_0) - 2x_0^3 \log\frac{x}{x_0} + \frac{y_0}{x_0}$$

hervorgeht, diejenige Curve dar, welche die Curve $y = \frac{y_0}{x_0}$ im Punkte $x = x_0$ $y = y_0$ berührt. Die zweite Ableitung

$$y'' = 2x_0^2 - \frac{2x_0^3}{x}$$

zeigt dann, dass die beiden Curven in (x_0, y_0) eine Berührung ***zweiter*** Ordnung haben, da in beiden $y'' = 0$ für $x = x_0, y = y_0$. Dies ist aber dafür charakteristisch, dass $y = \alpha x$ zugleich eine Schar ***singulärer*** Integralcurven der betrachteten Differentialgleichung darstellt.

Aus dem Vorhergehenden ergiebt sich übrigens

$$y' - \eta = y' - \frac{y}{x} = 2x_0^2(x-x_0) - \frac{x_0^3(x^2-x_0^2)}{x} = x_0^2\frac{(x-x_0)^2}{x} = x_0(x-x_0)^2 + \alpha(x-x_0)^3 + \cdots,$$

also der Exponent der niedrigsten Potenz von $x-x_0$ grösser als 1, was für das singuläre erste Integral charakteristisch ist. Die Gleichung

$$y' = \eta = \frac{y}{x} + \frac{x^3}{16}$$

genügt ebenfalls der Differentialgleichung, wie man erkennt, wenn man $\sigma = \frac{\partial\eta}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y}\eta = \frac{x^2}{4}$ für y'' in die Differentialgleichung substituirt, und zwar den beiden Auflösungen

$$y'' = +\sqrt{xy'-y}\left\{1+\sqrt{1-\frac{4\sqrt{xy'-y}}{x^2}}\right\},\quad y'' = +\sqrt{xy'-y}\left\{1-\sqrt{1-\frac{4\sqrt{xy'-y}}{x^2}}\right\}.$$

Da $xy'-y = x(y'-\eta)+\eta x - y = x(y'-\eta)+\frac{x^4}{16}$, so erhält man

$$y'' = \sqrt{\frac{x^4}{16}+x(y'-\eta)}\left\{1\pm\sqrt{1-\frac{4}{x^2}\sqrt{\frac{x^4}{16}+x(y'-\eta)}}\right\},$$

also für ein von Null verschiedenes x

$$y'' = \left(\frac{x^2}{4}+\frac{2(y'-\eta)}{x}+\alpha_2(y'-\eta)^2+\cdots\right)\left(1\pm\sqrt{-\frac{8(y'-\eta)}{x^3}-4\frac{\alpha_2}{x^2}(y'-\eta)^2+\cdots}\right)$$

$$= \left(\frac{x^2}{4}+\frac{2(y'-\eta)}{x}+\alpha_2(y'-\eta)^2+\cdots\right)\left(1\pm\frac{\sqrt{-8}}{x^{\frac{3}{2}}}(y'-\eta)^{\frac{1}{2}}\pm\beta_2(y'-\eta)^{\frac{3}{2}}\pm\cdots\right)$$

$$y'' - \frac{x^2}{4} = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{-2x}(y'-\eta)^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{x}(y'-\eta)^{\frac{3}{2}} + g(y'-\eta)^{\frac{3}{2}}+\cdots,$$

aus welcher Entwickelung, da $k=1, \alpha=2$, also $k<\alpha$, hervorgeht, dass $y'=\frac{y}{x}+\frac{x^3}{16}$ ein singuläres erstes Integral ist. Dasselbe von neuem integrirt giebt

$$y=\frac{x^4}{48}+\alpha x.$$

Die Curve aus der Schar, die durch den Punkt x_0, y_0 geht, hat die Gleichung

$$y=\frac{x^4}{48}+x\left(\frac{y_0}{x_0}-\frac{x_0^3}{48}\right),$$

woraus

$$y'=\frac{x^3}{12}+\frac{y_0}{x_0}-\frac{x_0^3}{48}.$$

Setzt man nun im allgemeinen Integrale

$$C=\frac{x_0}{2},\quad C_1=\frac{y_0}{x_0}-\frac{3x_0^3}{16}+\frac{x_0^3}{4}\log x_0,$$

so wird

$$y=\frac{x_0^2}{16}(4x^2-3xx_0-x_0^2)-\frac{x_0^3x}{4}\log\frac{x}{x_0}+\frac{y_0}{x_0}x.$$

$$y'=\frac{x_0^2}{16}(8x-7x_0)-\frac{x_0^3}{4}\log\frac{x}{x_0}+\frac{y_0}{x_0}.$$

Für $x=x_0$ wird demnach in beiden Curven $y=y_0$, $y'=\frac{y_0}{x_0}+\frac{x_0^3}{16}$; C und C_1 sind also so bestimmt worden, dass die entsprechende particuläre Integralcurve und die singuläre Curve sich in x_0 in der ersten Ordnung berühren. Die Betrachtung der zweiten Ableitungen zeigt nun, dass diese Curven in demselben Punkte sich in der zweiten Ordnung berühren. Denn für die singuläre Curve ist

$$y''=\frac{x^2}{4},\text{ für die particuläre }y''=\frac{x_0^2}{2}-\frac{x_0^3}{4x}.$$

Für $x=x_0$ erhält y'' den gemeinsamen Werth $\frac{x_0^2}{4}$.

Es ergiebt sich ferner

$$y'-\eta=y'-\frac{y}{x}-\frac{x^3}{16}=\frac{x_0^2}{4}(x-x_0)-\frac{1}{16}\frac{(x^4-x_0^2)}{x}=-\frac{1}{16}\frac{(x-x_0)^2(x^2+2x_0x-x_0^2)}{x}$$

$$=-\frac{x_0}{8}(x-x_0)^2+\alpha(x-x_0)^3+\cdots,$$

also der Exponent der niedrigsten Potenz von $x-x_0$ grösser als 1, woraus von neuem die Singularität des ersten Integrals $y'=\frac{y}{x}+\frac{x^3}{16}$ dargethan ist.

Ein bemerkenswerther Zusammenhang zwischen der Statik biegsamer unausdehnbarer Flächen und der Lehre von der Bewegung eines Körpers in einer Flüssigkeit.

(Von Herrn *Fritz Kötter* in Berlin.)

In meiner Dissertation „Ueber das Gleichgewicht biegsamer unausdehnbarer Flächen“ habe ich die Differentialgleichungen für die kegelförmige Gleichgewichtsfigur entwickelt, welche sich ergiebt, wenn eine aus einem biegsamen, unausdehnbaren Material gefertigte Sectorfläche so im Raume befestigt wird, dass die beiden geradlinigen Theile der Begrenzung auch geradlinig ausgespannt werden. Schon damals habe ich die fraglichen Gleichungen für die beiden einfachsten Fälle des Kreissectors und des Dreiecks vermittels elliptischer Functionen integrirt, später gelang es mir, die Lösung für den allgemeineren, die beiden genannten umfassenden Fall des aus der Mitte genommenen Kegelschnittsectors durch hyperelliptische Functionen darzustellen. Eine gewisse Aehnlichkeit der Formeln, durch welche man zu der Lösung gelangt, mit denjenigen Formeln, welche die allgemeine Lösung des Problems der Bewegung eines Körpers in einer Flüssigkeit in dem von *Clebsch* entdeckten Falle darstellen, führte mich auf die Vermuthung, dass zwischen beiden Problemen ein näherer Zusammenhang bestehen müsse. Diesen wirklich bestehenden Zusammenhang in Kürze darzulegen, ist der Zweck der nachstehenden Notiz.

Es sei gegeben ein aus einem biegsamen unausdehnbaren Material gefertigtes ebenes Flächenstück, welches begrenzt wird von zwei geraden Linien OA und OB und einer dritten Linie, über welche vorläufig keine besondere Annahme gemacht werden soll. Dieses Gebilde soll nun so im Raume aufgehängt werden, dass OA und OB in zwei geraden Linien ΩA und ΩB ausgespannt werden. Damit dies überhaupt möglich ist, darf der Winkel

$A\Omega B$ nicht grösser als der Winkel AOB sein. Sind beide Winkel gleich, so bleibt das Gebilde natürlich eben; ist der Winkel $A\Omega B$ kleiner als der Winkel AOB, so nimmt das Gebilde eine kegelförmige Gestalt an, bei welcher einer jeden von O nach der Begrenzung laufenden geraden Linie OP in der ursprünglichen Figur eine erzeugende Gerade $\Omega\Pi$ der Kegelfläche entspricht. Es sei nun φ der Winkel, welchen OP mit einer festen Richtung der Ebene AOB einschliesst, ϱ die Länge der Strecke $OP = \Omega\Pi$, welche natürlich eine von der Art der Begrenzung abhängende Function des Winkels φ ist. Die Gestalt der Fläche ist bestimmt, wenn wir den Cosinus ψ desjenigen Winkels, welchen $\Omega\Pi$ mit der Verticalen einschliesst, und ausserdem denjenigen Winkel ϑ kennen, welchen die Projection von $\Omega\Pi$ auf eine horizontale Ebene mit einer festen Richtung dieser Ebene einschliesst. Die Abhängigkeit dieser Grössen von φ wird durch die Differentialgleichungen

$$(1.) \qquad \frac{\psi+\psi''}{\sqrt{(1-\psi^2-\psi'^2)^3}} = \frac{\varrho^3}{A}, \qquad \frac{d\vartheta}{d\varphi} = \frac{\sqrt{1-\psi^2-\psi'^2}}{1-\psi^2}$$

vermittelt. Die Constante A, die beiden Constanten, welche die Integration der links stehenden Differentialgleichung mit sich bringt, und die additive Constante in ϑ sind dadurch bestimmt, dass für die beiden Grenzwerthe von φ, welche den beiden begrenzenden Geraden OA und OB entsprechen, die zugehörigen Werthe von ψ und ϑ durch die Lage der beiden Geraden ΩA und ΩB bestimmt sind.

Jetzt soll die ebene Figur AOB auf der kegelförmigen Gleichgewichtsfigur ohne Aenderung der Gestalt gleitungslos so rollen, dass in jedem Augenblick ein Radius OP des Sectors mit der dazu gehörigen Erzeugenden $\Omega\Pi$ des Kegels zusammenfällt. Geometrisch ist durch diese Beschreibung der Bewegungsvorgang genau bestimmt, und es fehlt zu einer vollständigen Definition nur noch eine Angabe über den zeitlichen Verlauf der Bewegung. Wir bestimmen denselben durch die Gleichung

$$(2.) \qquad dt = \frac{1}{A}\varrho^2(1-\psi^2)\,d\vartheta = \frac{1}{A}\varrho^2\sqrt{1-\psi^2-\psi'^2}\,d\varphi.$$

Die Grösse $\sqrt{1-\psi^2}$ ist die Projection der Berührungsstrecke ϱ auf die horizontale Ebene und $d\vartheta$ der Winkel, um welchen sich diese Projection im Zeitelement dt dreht. Es ist also $\frac{1}{2}\varrho^2(1-\psi^2)\,d\vartheta$ der Flächenraum, welchen die Projection der momentanen Berührungsstrecke des Kegels und der auf ihm rollenden Ebene im Zeitelemente dt durchläuft; die obige Festsetzung besagt

demnach, dass in gleichen Zeiten gleiche Flächenräume durchstrichen werden sollen, und zwar in der Zeiteinheit die Fläche $\frac{1}{2}A$.

Die gerade Linie, in welcher sich der Kegel und die auf ihm rollende Ebene zur Zeit berühren, ist zugleich momentane Drehaxe der letzteren, sodass es zur völligen Beschreibung des Bewegungszustandes nur noch der Angabe der Drehungsgeschwindigkeit bedarf. Wir denken uns in der Ebene AOB senkrecht zu OP nach der Seite der wachsenden φ eine gerade Linie OT gezogen und es möge $v = f(\varphi)$ der Cosinus des Winkels sein, welchen OT in dem Moment mit der Verticalen bildet, wo OP Berührungsgerade ist. Eine gerade Linie OK, welche in der Ebene AOB liegt und mit den beiden Linien OP und OT die Winkel α und $\frac{1}{2}\pi - \alpha$ einschliesst, bildet dann in dem hier fraglichen Zeitpunkt mit der Verticalen den Richtungscosinus

$$\psi\cos\alpha + v\sin\alpha,$$

welcher, während α um $d\alpha$ wächst, die Aenderung

$$(-\psi\sin\alpha + v\cos\alpha)\,d\alpha$$

erfährt, oder, wenn α zunächst gleich Null ist, $v\,d\alpha$. Andererseits ist der Lagenunterschied der Geraden OK, welche einem unendlich kleinen Winkel $d\alpha$ entspricht, und der Tangente $\Omega\Pi'$, welche zu dem Winkel $\varphi + d\alpha$ gehört unendlich klein von höherer Ordnung, sodass $v = \psi'$ sein muss. In dem Moment, wo OP Tangente ist, bildet die Normale ON der Ebene AOB mit der Verticalen den Richtungscosinus

$$\sqrt{1-\psi^2-\psi'^2}.$$

Würde nun OP während einer gewissen Zeit τ fest mit $\Omega\Pi$ zusammenfallen, und während dieser Zeit auch die Winkelgeschwindigkeit ω, mit welcher sich zur Zeit t die Ebene um OP dreht, unverändert bleiben, so würde die neue Lage von OT mit der ursprünglichen Lage der geraden Linien OP, OT und ON zur Zeit $t+\tau$ die Winkel $\frac{1}{2}\pi$, $\omega\tau$ und $\frac{1}{2}\pi - \omega\tau$ einschliessen und der Richtungscosinus zur Verticalen wäre

$$\psi'\cos(\omega\tau) + \sqrt{1-\psi^2-\psi'^2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \omega\tau).$$

Das Differential dieser Grösse

$$\{-\psi'\sin\omega\tau + \sqrt{1-\psi^2-\psi'^2}\cos\omega\tau\}\,\omega\,d\tau$$

für $\tau = 0$ und $d\tau = dt$, d. h. der Ausdruck

$$\omega\sqrt{1-\psi^2-\psi_0'^2}\,dt,$$

ist die Aenderung, welche der Richtungscosinus der geraden Linie OT zur Verticalen im Zeitelement dt erfährt, während die Scheibe AOB auf dem Kegel rollt, weil ja zur Zeit t beide Bewegungen übereinstimmen. Einen zweiten Ausdruck für die fragliche Grösse erhalten wir, indem wir die Frage beantworten, welchen Richtungscosinus hat OT erhalten, während die zu dem Winkel $\varphi+d\varphi$ gehörende Gerade OP' Berührungsgerade geworden ist. Fragen wir gleich allgemeiner: Welchen Richtungscosinus hat die Gerade OT, wenn die zum Winkel $\varphi+\sigma$ gehörende Gerade OP'' Drehungsaxe ist. Bei der Bestimmung der Richtungscosinus von OP'', OT'' ist dann für φ der Werth $\varphi+\sigma$ zu setzen, sodass dieselben gleich

$$\psi(\varphi+\sigma) \quad \text{und} \quad \psi'(\varphi+\sigma)$$

werden. In ihrer Ebene liegt OT und bildet mit OP'' den Winkel $\frac{1}{2}\pi-\sigma$ und mit OT'' den Winkel σ, sodass der Richtungscosinus zur Verticalen gleich

$$\psi(\varphi+\sigma)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)-\sigma)+\psi'(\varphi+\sigma)\cos\sigma$$

wird. Aus dem Differential dieser Grösse

$$\{\psi(\varphi+\sigma)+\psi''(\varphi+\sigma)\}\cos\sigma d\sigma$$

erhalten wir nun den zweiten Ausdruck der gesuchten Aenderung, indem wir $\sigma=0$ und $d\sigma=d\varphi$ setzen. Demnach haben wir zur Bestimmung der Drehungsgeschwindigkeit die Gleichung

$$(3^a.) \qquad \omega\sqrt{1-\psi^2-\psi'^2}\,dt=(\psi+\psi'')\,d\varphi.$$

Aus dieser allgemein gültigen Formel erhalten wir vermittelst der Gleichung (2.) für die Winkelgeschwindigkeit ω den Werth

$$(3^b.) \qquad \omega = A\frac{(\psi+\psi'')}{(1-\psi^2-\psi'^2)\varrho^2},$$

welcher unter Benutzung von (1.) übergeht in

$$(3^c.) \qquad \omega=\varrho\sqrt{1-\psi^2-\psi'^2}.$$

Wir betrachten nun die Bewegung, welche ein mit der Ebene AOB fest verbundenes Axenkreuz beschreibt, während jene Ebene auf dem Gleichgewichtskegel rollt. Dieses Axenkreuz besteht aus den beiden in der Ebene AOB gelegenen Linien OX und OY, welche durch die Gleichungen $\varphi=0$ und $\varphi=\frac{\pi}{2}$ bestimmt sind, sowie aus der zu AOB senkrecht stehenden Geraden OZ. Dann bildet mit den Richtungen

$$OP, \qquad OT, \qquad ON$$

OX die Winkel φ, $\frac{1}{2}\pi+\varphi$, $\frac{1}{2}\pi$ und
OY „ „ $\frac{1}{2}\pi-\varphi$, φ, $\frac{1}{2}\pi$,

sodass die drei Richtungscosinus der drei Axen zur Verticalen werden

$$\gamma_1 = \psi\cos\varphi - \psi'\sin\varphi, \qquad \gamma_2 = \psi\sin\varphi + \psi'\cos\varphi, \qquad \gamma_3 = \sqrt{1-\psi^2-\psi'^2}.$$

Die Componenten der Winkelgeschwindigkeit nach den drei Axen werden

$$p = \varrho\sqrt{1-\psi^2-\psi'^2}\cos\varphi, \qquad q = \varrho\sqrt{1-\psi^2-\psi'^2}\sin\varphi, \qquad r = 0,$$

und es gelten die Gleichungen

$$(4.) \qquad \frac{d\gamma_1}{dt} = -q\gamma_3, \qquad \frac{d\gamma_2}{dt} = p\gamma_3, \qquad \frac{d\gamma_3}{dt} = q\gamma_1 - p\gamma_2.$$

Wir wollen nun noch die Ableitungen der Geschwindigkeitscomponenten p und q bilden. Es ist

$$\frac{d(p+iq)}{dt} = \left\{\varrho' + i\varrho - \varrho\frac{\psi'(\psi+\psi'')}{1-\psi^2-\psi'^2}\right\}\sqrt{1-\psi^2-\psi'^2}\,\frac{d\varphi}{dt}\,e^{i\varphi}$$

$$= \left\{A\left(\frac{\varrho'}{\varrho^2}+\frac{i}{\varrho}\right) - \varrho^2\psi'\sqrt{1-\psi^2-\psi'^2}\right\}e^{i\varphi}.$$

In dem besonderen Falle, dass die begrenzende Linie des Sectors ein Kegelschnitt mit dem Mittelpunkt O ist, können wir, indem wir OX und OY mit den beiden Hauptaxen des Kegelschnittes zusammenfallen lassen, schreiben

$$\frac{1}{\varrho} = \sqrt{\varkappa\cos^2\varphi + \lambda\sin^2\varphi}, \qquad \frac{\varrho'}{\varrho^2} = \frac{(\varkappa-\lambda)\cos\varphi\sin\varphi}{\sqrt{\varkappa\cos^2\varphi+\lambda\sin\varphi^2}},$$

$$\frac{\varrho'}{\varrho^2}+\frac{i}{\varrho} = \frac{(i\varkappa\cos\varphi - \lambda\sin\varphi)}{\sqrt{\varkappa\cos^2\varphi+\lambda\sin^2\varphi}}e^{-i\varphi} = (i\varkappa\cos\varphi - \lambda\sin\varphi)\varrho e^{-i\varphi}.$$

Es wird also

$$\frac{d(p+iq)}{dt} = A\varrho\{i\varkappa\cos\varphi - \lambda\sin\varphi\} - \varrho^2\psi'\sqrt{1-\psi^2-\psi'^2}\,e^{i\varphi}.$$

Zerfällen wir diese Gleichung in ihren reellen und imaginären Bestandtheil, so erhalten wir

$$\frac{dp}{dt} = -A\lambda\varrho\sin\varphi - \varrho^2\psi'\sqrt{1-\psi^2-\psi'^2}\cos\varphi,$$

$$\frac{dq}{dt} = A\varkappa\varrho\cos\varphi - \varrho^2\psi'\sqrt{1-\psi^2-\psi'^2}\sin\varphi.$$

Nun können wir schreiben:

$$\frac{1}{\varrho^2} = \frac{1}{\varkappa} + \frac{(\varkappa-\lambda)\sin^2\varphi}{\varkappa(\varkappa\cos^2\varphi+\lambda\sin^2\varphi)} = \frac{1}{\lambda} - \frac{(\varkappa-\lambda)\cos^2\varphi}{\lambda(\varkappa\cos^2\varphi+\lambda\sin^2\varphi)},$$

und erhalten mit Hülfe dieser Gleichung

$$\frac{dp}{dt} = -A\lambda\varrho\sin\varphi + \frac{\dot\psi\sin\varphi}{\varkappa}\sqrt{1-\psi^2-\psi'^2} - \frac{(\varkappa-\lambda)\sin^2\varphi\cos\varphi\,\psi'\sqrt{1-\psi^2-\psi'^2}}{(\varkappa\cos^2\varphi+\lambda\sin^2\varphi)\varkappa}$$
$$-\frac{1}{\varkappa}(\psi\sin\varphi+\psi'\cos\varphi)\sqrt{1-\psi^2-\psi'^2},$$

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\varrho\sqrt{1-\psi^2-\psi'^2}\sin\varphi}{\varkappa}\left\{\frac{A\varkappa\lambda}{\sqrt{1-\psi^2-\psi'^2}} - \frac{\psi}{\varrho} + \psi'\frac{\varrho'}{\varrho^2}\right\} - \frac{1}{\varkappa}\gamma_2\gamma_3,$$

$$(5^{\text{a}}.) \qquad \varkappa\frac{dp}{dt} = -q\left\{A\frac{\varkappa\lambda}{\sqrt{1-\psi^2-\psi'^2}} - \frac{\psi}{\varrho} + \psi'\frac{\varrho'}{\varrho^2}\right\} - \gamma_2\gamma_3.$$

Ebenso ist

$$(5^{\text{b}}.) \qquad \lambda\frac{dq}{dt} = p\left\{A\frac{\varkappa\lambda}{\sqrt{1-\psi^2-\psi'^2}} - \frac{\psi}{\varrho} + \psi'\frac{\varrho'}{\varrho^2}\right\} + \gamma_3\gamma_1.$$

Jetzt bilden wir endlich noch die Ableitung des Ausdrucks

$$\left\{A\frac{\varkappa\lambda}{\sqrt{1-\psi^2-\psi'^2}} - \frac{\psi}{\varrho} - \psi'\frac{\varrho'}{\varrho^2}\right\}.$$

Das erste Glied giebt

$$\frac{d}{dt}A\frac{\varkappa\lambda}{\sqrt{1-\psi^2-\psi'^2}} = A\varkappa\lambda\frac{\psi'(\psi+\psi'')}{\sqrt{(1-\psi^2-\psi'^2)^3}}\frac{A}{\varrho^2\sqrt{1-\psi^2-\psi'^2}} = A\frac{\varkappa\lambda\varrho\psi'}{\sqrt{1-\psi^2-\psi'^2}},$$

während die beiden andern liefern

$$\frac{d}{dt}\left\{-\frac{\psi}{\varrho}+\psi'\frac{\varrho'}{\varrho^2}\right\} = \psi'\left\{-\frac{1}{\varrho}+\frac{d}{d\varphi}\frac{\varrho'}{\varrho^2}\right\}\frac{A}{\varrho^2\sqrt{1-\psi^2-\psi'^2}} + A\frac{\varrho'(\psi+\psi'')}{\varrho^4\sqrt{1-\psi^2-\psi'^2}}$$
$$= \frac{A\psi'(\varkappa\cos^2\varphi+\lambda\sin^2\varphi)}{\sqrt{1-\psi^2-\psi'^2}}\left\{-\sqrt{\varkappa\cos^2\varphi+\lambda\sin^2\varphi} - \frac{(\varkappa-\lambda)(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)(\varkappa\cos^2\varphi+\lambda\sin^2\varphi)}{(\varkappa\cos^2\varphi+\lambda\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}\right.$$
$$\left. + \frac{(\varkappa-\lambda)^2\cos^2\varphi\sin^2\varphi}{(\varkappa\cos^2\varphi+\lambda\sin^2\varphi)^2}\right\}$$
$$+\frac{\varrho'}{\varrho}(1-\psi^2-\psi'^2)$$
$$= \frac{A\psi'\varrho}{\sqrt{1-\psi^2-\psi'^2}}\left\{-(\varkappa\cos^2\varphi+\lambda\sin^2\varphi)^2+(\varkappa\cos^2\varphi+\lambda\sin^2\varphi)(\varkappa-\lambda)(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)\right.$$
$$\left. +(\varkappa-\lambda)^2\cos^2\varphi\sin^2\varphi\right\}$$
$$+\frac{\varrho'}{\varrho}(1-\psi^2-\psi'^2)$$
$$= A\frac{\psi'\varrho}{\sqrt{1-\psi^2-\psi'^2}}\left\{-(\varkappa\cos^2\varphi+\lambda\sin^2\varphi)(\varkappa\sin^2\varphi+\lambda\cos^2\varphi)+(\varkappa-\lambda)^2\cos^2\varphi\sin^2\varphi\right\}$$
$$+\frac{(\varkappa-\lambda)\cos\varphi\sin\varphi}{\varkappa\cos^2\varphi+\lambda\sin^2\varphi}(1-\psi^2-\psi'^2)$$
$$= -A\frac{\psi'\varrho\varkappa\lambda}{\sqrt{1-\psi^2-\psi'^2}} + (\varkappa-\lambda)pq.$$

Im ganzen ergiebt sich also

$$\frac{d}{dt}\left\{A\frac{\varkappa\lambda}{\sqrt{1-\psi^2-\psi'^2}}-\frac{\psi}{\varrho}+\frac{\psi'\varrho'}{\varrho^2}\right\}=(\varkappa-\lambda)pq. \tag{6.}$$

Indem wir nun

$$\gamma_1=x_1,\quad \gamma_2=x_2,\quad \gamma_3=x_3,\quad \varkappa p=y_1,\quad \lambda q=y_2$$

und

$$A\frac{\varkappa\lambda}{\sqrt{1-\psi^2-\psi'^2}}-\frac{\psi}{\varrho}+\psi'\frac{\varrho'}{\varrho^2}=y_3$$

setzen, nehmen die Gleichungen (4.), (5ª.), (5ᵇ.), (6.) folgende Form an:

$$\frac{dx_1}{dt}=-\frac{y_2}{\lambda}x_3,\quad \frac{dx_2}{dt}=\frac{y_1}{\varkappa}x_3,\quad \frac{dx_3}{dt}=\frac{y_2}{\lambda}x_1-\frac{y_2}{\varkappa}x_2,$$

$$\frac{dy_1}{dt}=-\frac{y_2}{\lambda}y_3-x_2x_3,\quad \frac{dy_2}{dt}=\frac{y_1}{\varkappa}y_3+x_1x_3,\quad \frac{dy_3}{dt}=\frac{y_2}{\lambda}y_1-\frac{y_3}{\varkappa}y_2$$

oder, wenn wir noch schreiben

$$2F\equiv\frac{y_1^2}{\varkappa}+\frac{y_2^2}{\lambda}-x_3^2, \tag{7.}$$

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt}&=x_2\frac{\partial F}{\partial y_3}-x_3\frac{\partial F}{\partial y_2}, & \frac{dy_1}{dt}&=y_2\frac{\partial F}{\partial y_3}-y_3\frac{\partial F}{\partial y_2}+x_2\frac{\partial F}{\partial x_3}-x_3\frac{\partial F}{\partial x_2},\\
\frac{dx_2}{dt}&=x_3\frac{\partial F}{\partial y_1}-x_1\frac{\partial F}{\partial y_3}, & \frac{dy_2}{dt}&=y_3\frac{\partial F}{\partial y_1}-y_1\frac{\partial F}{\partial y_3}+x_3\frac{\partial F}{\partial x_1}-x_1\frac{\partial F}{\partial x_3},\\
\frac{dx_3}{dt}&=x_1\frac{\partial F}{\partial y_2}-x_2\frac{\partial F}{\partial y_1}, & \frac{dy_3}{dt}&=y_1\frac{\partial F}{\partial y_2}-y_2\frac{\partial F}{\partial y_1}+x_1\frac{\partial F}{\partial x_2}-x_2\frac{\partial F}{\partial x_1}.
\end{aligned}\right. \tag{8.}$$

Dieses sind aber Gleichungen von derselben Form, wie sie für die Bewegung eines Körpers in einer Flüssigkeit gelten; an die Stelle des Ausdrucks für die lebendige Kraft T bei dem hydrodynamischen Problem ist hier die Function F getreten. T sowohl wie F sind ganze homogene Functionen zweiten Grades, und der einzige Unterschied beider besteht darin, dass T eine wesentlich positive quadratische Form ist, welche nur verschwindet, wenn die sechs Argumente sämmtlich den Werth Null annehmen, während F nur die drei Argumente x_3, y_1, y_2 enthält. Die schon an und für sich recht nahe Verwandtschaft beider Probleme tritt noch mehr hervor, wenn wir einen besonderen Fall des hydrodynamischen Problems betrachten.

Wir setzen in die Gleichung (8.) an Stelle von F die Function

$$\mathfrak{T}=\frac{1}{2}A\sum_{i=1}^{i=3}\left(x_i\frac{\sqrt{(s'-c_1)(s'-c_2)(s'-c_3)}}{\sqrt{s'-c_i}}+y_i\sqrt{s'-c_i}\right)^2, \tag{9.}$$

in welcher A, c_1, c_2, c_3 feste Grössen sind und s' irgend einen von der Zeit

unabhängigen Werth bezeichnen soll. Man überzeugt sich durch blosse Ausrechnung, dass in diesem Falle der mit dem beliebigen Werthe s gebildete Ausdruck

$$(10.) \qquad F(s) = \sum_{i=1}^{i=3} \left(x_i \frac{\sqrt{(s-c_1)(s-c_2)(s-c_3)}}{\sqrt{s-c_i}} + y_i \sqrt{s-c_i} \right)^2$$

ein Integral der Differentialgleichungen ist, und also gleich einer Function der Grösse s mit constanten Coefficienten von der Form

$$(11.) \qquad f(s) = As^2+2Bs+C+2D\sqrt{(s-c_1)(s-c_2)(s-c_3)}$$

sein muss. Fügt man nun dem Ausdruck $\mathfrak{T}$ aus Gleichung (9.) noch einen Ausdruck von der Form

$$\mathfrak{B}(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+\mathfrak{C}(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3)$$

hinzu, so werden nach *Clebsch* die Differentialgleichungen nicht beeinflusst und es bleibt also (10.) ein Integral derselben. Setzen wir nun $A(s'-c_i) = b_i$ und

$$(10^a.) \qquad A^2(s'-c_1)(s'-c_2)(s'-c_3) = l,$$

so reducirt sich der Ausdruck

$$\mathfrak{T}+m(x_1^2+x_2^2+x_3^2)-2A\sqrt{(s'-c_1)(s'-c_2)(s'-c_3)}(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3)$$

auf

$$b_1y_1^2+b_2y_2^2+b_3y_3^2+x_1^2\left(\frac{l}{b_1}+m\right)+x_2^2\left(\frac{l}{b_2}+m\right)+x_3^2\left(\frac{l}{b_3}+m\right).$$

Das ist aber die Form, welche die lebendige Kraft in dem von *Clebsch* entdeckten integrablen Falle hat.

In meiner Abhandlung „Ueber die Bewegung eines Körpers in einer Flüssigkeit“ habe ich gezeigt, wie sich die Lösung dieses Problems durch Thetafunctionen zweier Argumente gestaltet, deren Argumente lineare Functionen der Zeit sind. Die Darstellung der Bewegung durch Thetafunctionen zweier Argumente ist lediglich eine Folge der in vier Integralgleichungen zerfallenden Identität bezüglich s

$$F(s) \equiv f(s);$$

da nun in $F(s)$ die Grösse s' nicht vorkommt, so ist diese Darstellung dieselbe für alle diejenigen Probleme, bei denen sich die Functionen $\mathfrak{T}$ nur durch den Werth von s' unterscheiden; es kommt nur auf die Werthe c_1, c_2, c_3 an. Setzen wir aber in (9.) und (10.) statt $s, s', c_1, c_2, c_3, x_a, y_a$ die Grössen

$$S = \lambda s+a, \quad S' = \lambda s'+a, \quad C_i = \lambda c_i+a, \quad Y_a = \frac{y_a}{\sqrt{\lambda}}, \quad X_a = \frac{x_a}{\lambda},$$

so bleiben die Ausdrücke für f und $F(s)$ ungeändert. Man erkennt also, dass die Darstellung der Bewegung äquivalent ist in allen denjenigen Fällen, wo der Ausdruck

$$\frac{c_2 - c_3}{c_1 - c_3}$$

denselben Werth k hat. Es muss jedoch bemerkt werden, dass die Coefficienten der ganzen linearen Functionen der Zeit, welche die beiden Argumente der Thetafunctionen bilden, nicht unabhängig von s' sind.

Richten wir es so ein, dass A und die sämmtlichen Differenzen $s' - c_i$ in dem unter (9.) angegebenen Ausdruck dasselbe Zeichen haben, so gelangen wir, wie schon ausgeführt, zu dem von *Clebsch* entdeckten integrablen Falle der Bewegung eines festen Körpers in einer Flüssigkeit. Aus (10ª.) folgt für den Modul k sofort der Werth $\frac{b_2 - b_3}{b_1 - b_3}$. Setzen wir aber $s = c_3$ und

$$A = -\frac{1}{(c_3 - c_1)(c_3 - c_2)},$$

so erhalten wir

$$\frac{y_1^2}{c_2 - c_3} + \frac{y_2^2}{c_1 - c_3} - x_3^2,$$

und das ist, wenn $c_2 - c_3 = \varkappa$ und $c_1 - c_3 = \lambda$ gesetzt wird, identisch mit der Function, welche in den Differentialgleichungen für das Rollen der Ebene auf der Gleichgewichtsfigur auftritt.

So gelangen wir zu folgendem Ergebnisse unserer Betrachtungen:

Die Bewegung eines festen Körpers in einer Flüssigkeit lässt sich für den Fall

$$2T = b_1 y_1^2 + b_2 y_2^2 + b_3 y_3^2 + \left(\frac{l}{b_1} + m\right) x_1^2 + \left(\frac{l}{b_2} + m\right) x_2^2 + \left(\frac{l}{b_3} + m\right) x_3^2$$

durch Thetafunctionen zweier Argumente ausdrücken. Die Darstellung der drehenden Bewegung ist äquivalent mit der Darstellung des Rollens einer Ebene auf der kegelförmigen Gleichgewichtsfigur eines homogenen, aus einem biegsamen, unausdehnbarem Material gefertigten Flächenstückes, welches sich auf einem Kegelschnittsector abwickeln lässt, vorausgesetzt, dass der Scheitel des Sectors im Mittelpunkt des Kegelschnitts liegt und dass die in der Polargleichung

$$\frac{1}{\varrho^2} = \varkappa \cos^2\varphi + \lambda \sin^2\varphi$$

auftretenden Constanten $\varkappa$ und λ in dem Verhältniss

$$\frac{\varkappa}{\lambda} = \frac{b_2 - b_3}{b_1 - b_3}$$

stehen.

Lässt man den Kegelschnittsector auf der Gleichgewichtsfigur rollen, so entsprechen den drei Hauptaxen des Körpers die beiden Axen des Kegelschnitts und die Normale. Beim hydrodynamischen Problem sind die beiden Argumente der Thetafunctionen ganze lineare Functionen der Zeit. Das gilt auch von der rollenden Bewegung der Ebene auf der Gleichgewichtsfigur, wenn über den zeitlichen Verlauf der Bewegung die Festsetzung getroffen wird, dass die horizontale Projection des in der Gleichgewichtsfigur enthaltenen Stückes der momentanen Drehaxe in gleichen Zeiten gleiche Flächenräume durchstreicht.

Sur une forme générale des équations de la dynamique.

(Par M. *Paul Appell* à St. Germain-en-Laye.)

1.

Les équations de *Lagrange* ne sont pas applicables quand certaines liaisons s'expriment par des relations différentielles non intégrables, ou quand on introduit des paramètres liés aux coordonnées par des relations différentielles non intégrables. Cette difficulté a fait l'objet de recherches diverses dont on trouvera une bibliographie détaillée dans un opuscule intitulé *„Les mouvements de roulement en dynamique“* que nous venons de publier dans la collection *Scientia* (Carré et Naud, Editeurs).

Nous nous proposons d'indiquer ici une forme générale des équations du mouvement non soumise aux exceptions que nous venons d'énoncer. Pour écrire les équations sous cette nouvelle forme, il suffit de calculer la fonction

$$S = \tfrac{1}{2}\Sigma m J^2,$$

où m désigne la masse d'un quelconque des points du système et J l'accélération absolue de ce point: on voit que cette fonction S est composée avec les accélérations comme la demi-force vive l'est avec les vitesses.

Nous avons indiqué le principe de la méthode que nous suivons ici dans une Note insérée aux Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences de Paris le 7. août 1899.

2.

Imaginons un système assujetti à des liaisons telles que pour obtenir le déplacement virtuel le plus général compatible avec les liaisons à l'instant t, il suffise de faire subir à n paramètres $q_1, q_2, \ldots, q_n$ des variations arbitraires $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_n$. Si nous appelons alors x, y, z les coordonnées d'un quelconque des points du système par rapport à des axes fixes, le déplacement virtuel de ce point a pour projections sur les axes:

$$(1.) \qquad \begin{cases} \delta x = a_1\delta q_1 + a_2\delta q_2 + \cdots + a_n\delta q_n, \\ \delta y = b_1\delta q_1 + b_2\delta q_2 + \cdots + b_n\delta q_n, \\ \delta z = c_1\delta q_1 + c_2\delta q_2 + \cdots + c_n\delta q_n, \end{cases}$$

où $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_n$ sont arbitraires: dans ces formules, les coefficients a_1, $a_2, \ldots, c_n$ peuvent dépendre du temps t, des paramètres $q_1, q_2, \ldots, q_n$ et *d'autres paramètres* $q_{n+1}, q_{n+2}, \ldots, q_{n+p}$ dont les variations sont liées à celles de $q_1, q_2, \ldots, q_n$ par des relations de la forme

$$(2.)\qquad \begin{cases} \delta q_{n+1} = \alpha_1\ \delta q_1 + \alpha_2\ \delta q_2 + \cdots + \alpha_n \delta q_n, \\ \delta q_{n+2} = \beta_1\ \delta q_1 + \beta_2\ \delta q_2 + \cdots + \beta_n \delta q_n, \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \delta q_{n+p} = \lambda_1\ \delta q_1 + \lambda_2\ \delta q_2 + \cdots + \lambda_n \delta q_n, \end{cases}$$

les coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \lambda_n$ dépendant également de t et de l'ensemble des paramètres $q_1, q_2, \ldots, q_n, q_{n+1}, \ldots, q_{n+p}$. Dans ces conditions, le déplacement réel du système pendant le temps dt est défini par des relations de la forme

$$(3.)\qquad \begin{cases} dx = a_1 dq_1 + a_2 dq_2 + \cdots + a_n dq_n + a\,dt, \\ dy = b_1 dq_1 + b_2 dq_2 + \cdots + b_n dq_n + b\,dt, \\ dz = c_1 dq_1 + c_2 dq_2 + \cdots + c_n dq_n + c\,dt, \end{cases}$$

avec

$$(4.)\qquad \begin{cases} dq_{n+1} = \alpha_1 dq_1 + \alpha_2 dq_2 + \cdots + \alpha_n dq_n + \alpha\,dt, \\ dq_{n+2} = \beta_1 dq_1 + \beta_2 dq_2 + \cdots + \beta_n dq_n + \beta\,dt, \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ dq_{n+p} = \lambda_1 dq_1 + \lambda_2 dq_2 + \cdots + \lambda_n dq_n + \lambda\,dt, \end{cases}$$

où les coefficients $a, b, c, \alpha, \beta, \ldots, \lambda$, peuvent dépendre de $t, q_1, q_2, \ldots, q_{n+p}$.

„On peut alors obtenir les équations du mouvement comme il suit.

„L'équation générale de la Dynamique déduite du principe de *d'Alembert* et du principe du travail virtuel, est

$$(5.)\qquad \Sigma m(x''\delta x + y''\delta y + z''\delta z) = \Sigma(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)$$

où x'', y'', z'' sont les dérivées deuxièmes des coordonnées par rapport au temps, et X, Y, Z les projections d'une quelconque des forces.

„Cette équation doit avoir lieu pour tous les déplacements (1.) compatibles avec les liaisons: elle se décompose donc dans les n équations suivantes:

$$(6.)\qquad \begin{cases} \Sigma m(x''a_1 + y''b_1 + z''c_1) = \Sigma(Xa_1 + Yb_1 + Zc_1), \\ \Sigma m(x''a_2 + y''b_2 + z''c_2) = \Sigma(Xa_2 + Yb_2 + Zc_2), \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Sigma m(x''a_n + y''b_n + z''c_n) = \Sigma(Xa_n + Yb_n + Zc_n). \end{cases}$$

Dans ces équations les deuxièmes membres se calculent comme dans les équations de *Lagrange.* En remplaçant δx, δy, δz par leurs valeurs (1.) on a, pour la somme des travaux virtuels des forces appliquées:

$$\Sigma(X\delta x+Y\delta y+Z\delta z) = Q_1\delta q_1+Q_2\delta q_2+\cdots+Q_n\delta q_n.$$

Les quantités $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ sont les deuxièmes membres des équations (6.):

$$Q_1 = \Sigma(Xa_1+Yb_1+Zc_1),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Pour calculer les premiers membres, divisons par dt les relations (3.) définissant le déplacement réel et désignons par $x', y', z', q_1', q_2', \ldots, q_n'$ les dérivées totales $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}, \frac{dq_1}{dt}, \frac{dq_2}{dt}, \ldots, \frac{dq_n}{dt}$. Nous aurons

$$\begin{aligned} x' &= a_1q_1'+a_2q_2'+\cdots+a_nq_n'+a,\\ y' &= b_1q_1'+b_2q_2'+\cdots+b_nq_n'+b,\\ z' &= c_1q_1'+c_2q_2'+\cdots+c_nq_n'+c. \end{aligned}$$

Prenant encore une fois les dérivées totales des deux membres par rapport à t, on a

$$(7.)\qquad \begin{cases} x'' = a_1q_1''+a_2q_2''+\cdots+a_nq_n''+\cdots,\\ y'' = b_1q_1''+b_2q_2''+\cdots+b_nq_n''+\cdots,\\ z'' = c_1q_1''+c_2q_2''+\cdots+c_nq_n''+\cdots, \end{cases}$$

où les termes non écrits ne contiennent pas $q_1'', q_2'', \ldots, q_n''$. Mais alors on a évidemment

$$a_1 = \frac{\partial x''}{\partial q_1''}, \quad b_1 = \frac{\partial y''}{\partial q_1''}, \quad c_1 = \frac{\partial z''}{\partial q_1''},$$
$$a_2 = \frac{\partial x''}{\partial q_2''}, \quad b_2 = \frac{\partial y''}{\partial q_2''}, \quad c_2 = \frac{\partial z''}{\partial q_2''},$$
$$\cdots\cdots\cdots \text{ etc.}$$

Les équations du mouvement s'écrivent donc

$$(8.)\qquad \begin{cases} \Sigma m\left(x''\frac{\partial x''}{\partial q_1''}+y''\frac{\partial y''}{\partial q_1''}+z''\frac{\partial z''}{\partial q_1''}\right) = Q_1,\\ \Sigma m\left(x''\frac{\partial x''}{\partial q_2''}+y''\frac{\partial y''}{\partial q_2''}+z''\frac{\partial z''}{\partial q_2''}\right) = Q_2,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Considérons maintenant la fonction

$$S = \frac{1}{2}\Sigma m(x''^2+y''^2+z''^2) = \frac{1}{2}\Sigma mJ^2,$$

où J est l'accélération absolue du point m: les équations (8.) du mouvement prennent la forme

$$(9.) \qquad \frac{\partial S}{\partial q_1''} = Q_1, \quad \frac{\partial S}{\partial q_2''} = Q_2, \ldots, \frac{\partial S}{\partial q_n''} = Q_n.$$

On voit que, pour les écrire, il suffit de calculer la seule fonction S, et l'exprimer de façon qu'elle ne contienne plus d'autres dérivées deuxièmes que celles des paramètres $q_1, q_2, \ldots, q_n$ dont les variations sont regardées comme arbitraires. Il peut arriver que cette fonction S, calculée en fonction de $q_1, q_2, \ldots, q_{n+p}$, contienne leurs dérivées premières $q_1', q_2', \ldots, q_{n+p}'$ et leurs dérivées deuxièmes $q_1'', q_2'', \ldots, q_{n+p}''$; les relations (4.) divisées par dt donnent $q_{n+1}', q_{n+2}', \ldots, q_{n+p}'$ en fonction linéaire de $q_1', q_2', \ldots, q_n'$, et, en les dérivant par rapport au temps, on obtient de même $q_{n+1}'', q_{n+2}'', q_{n+p}''$ en fonction linéaire de $q_1'', q_2'', \ldots, q_n''$; on peut donc toujours faire en sorte que la fonction S ne contienne plus d'autres dérivées deuxièmes que $q_1'', q_2'', \ldots, q_n''$: elle contient d'ailleurs ces quantités au deuxième degré. Une fois la fonction S ainsi préparée, on peut écrire les équations (9.). Ces équations jointes aux conditions (4.) forment un système de $n+p$ équations définissant $q_1, q_2, \ldots, q_{n+p}$ en fonction du temps.

3.

Prenons, par exemple, un corps solide mobile autour d'un point fixe O et calculons la fonction S en rapportant le mouvement à un système d'axes O, x, y, z mobiles à la fois dans le corps et dans l'espace. Appelons Ω la rotation instantanée du trièdre $Oxyz$ et P, Q, R ses composantes suivant les axes, ω la rotation du corps et p, q, r ses composantes. Une molécule m du corps de coordonnées x, y, z possède une vitesse absolue v de projections

$$v_x = qz - ry, \ldots.$$

Cette molécule possède une accélération absolue J ayant pour projections

$$(10.) \qquad J_x = \frac{d}{dt} v_x + Qv_z - Rv_y, \ldots,$$

comme il résulte de ce que J est la vitesse absolue du point de coordonnées v_x, v_y, v_z. Or on a, en appelant p', q', r' les dérivées de p, q, r par rapport au temps

$$\frac{dv_x}{dt} = q\frac{dz}{dt} - r\frac{dy}{dt} + zq' - yr', \ldots$$

où $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$, projections de la vitesse relative de la molécule, par rapport

aux axes $O, x, y, z,$ sont

$$(11.) \qquad \frac{dx}{dt} = qz - ry - (Qz - Ry), \ldots;$$

en effet la vitesse relative est la différence géométrique entre la vitesse absolue et la vitesse d'entrainement. D'après cela, on a l'expression suivante de J que nous ordonnons par rapport à x, y, z:

$$(12.) \quad J_x = -x(q^2+r^2)+y[q(p-P)+pQ-r']+z[r(p-P)+pR+q'].$$

On a de même J_y et J_z et enfin

$$2S = \Sigma m(J_x^2+J_y^2+J_z^2).$$

Pour simplifier nous écrirons ici cette somme en supposant que les axes O, x, y, z sont des axes principaux d'inertie au point O, et appelant A, B, C les moments d'inertie par rapport à ces axes; nous avons, en nous bornant aux termes en p', q', r':

$$(13.) \begin{cases} 2S = Ap'^2+Bq'^2+Cr'^2+2[(C-B)qr+A(rQ-qR)]p' \\ \quad +2[(A-C)rp+B(pR-rP)]q'+2[(B-A)pq+C(qP-pQ)]r'+\ldots. \end{cases}$$

4.

Équations d'Euler. Prenons comme axes mobiles trois axes *invariablement liés* au corps et coïncidant avec trois axes principaux d'inertie. Nous aurons alors

$$P = p, \quad Q = q, \quad R = r,$$

$$2S = Ap'^2 + Bq'^2+Cr'^2+2(C-B)qrp'+2(A-C)rpq'+2(B-A)pqr'+\cdots.$$

Appelons L, M, N les sommes des moments des forces appliquées par rapport aux axes, et

$$\delta\lambda, \quad \delta\mu, \quad \delta\nu$$

les angles élémentaires dont il faut faire tourner le corps autour des axes pour l'amener d'une position à une position infiniment voisine. Nous ferons jouer à λ, μ, ν le rôle des paramètres $q_1, q_2, \ldots, q_n$. On a, d'une part,

$$\Sigma(X\delta x+Y\delta y+Z\delta z) = L\delta\lambda+M\delta\mu+N\delta\nu;$$

et, d'autre part, les composantes p, q, r de la rotation instantanée du corps sont

$$p = \frac{d\lambda}{dt} = \lambda', \quad q = \frac{d\mu}{dt} = \mu', \quad r = \frac{d\nu}{dt} = \nu'.$$

La fonction S est alors

$$S=\frac{1}{2}(A\lambda''^2+B\mu''^2+C\nu''^2)+(C-B)\mu'\nu'\lambda''+(A-C)\nu'\lambda'\mu''+(B-A)\lambda'\mu'\nu''+\cdots$$

où les termes non écrits ne contiennent pas λ'', μ'', ν''. Les équations du mouvement sont donc

$$\frac{\partial S}{\partial \lambda''}=L, \quad \frac{\partial S}{\partial \mu''}=M, \quad \frac{\partial S}{\partial \nu''}=N.$$

La première par exemple, s'écrit

$$A\lambda''+(C-B)\mu'\nu'=L;$$

d'après les valeurs de p, q, r, c'est précisément une des équations d'*Euler*.

5.

Corps de révolution suspendu par un point O de son axe. Menons par O un axe fixe $O\alpha$ et prenons pour axe Oz l'axe de révolution, pour axe Oy la perpendiculaire au plan αOz, et pour axe Ox la perpendiculaire au plan yOz. Quand la position du trièdre $Oxyz$ est connue, pour avoir celle du corps, il suffit de connaître l'angle φ que fait avec Oy, un rayon issu de O et invariablement lié au corps dans le plan des xy: la dérivée φ' de cet angle, par rapport au temps, représente la rotation propre du corps autour de Oz. La rotation ω du corps est alors la résultante de la rotation Ω du trièdre et de la rotation φ'. On a donc

$$p=P, \quad q=Q, \quad r=R+\varphi'.$$

La fonction S, définie par l'expression (13.) devient alors, puisque $A=B$:

(14.) $$2S=A(p'^2+q'^2)+Cr'^2+2(AR-Cr)(pq'-qp')+\cdots.$$

Soient encore, $\delta\lambda, \delta\mu, \delta\nu$ les angles élémentaires dont il faut faire tourner le corps autour des axes Ox, Oy, Oz pour l'amener d'une position à une position voisine, et L, M, N les moments des forces par rapport aux axes, on a comme plus haut

$$p'=\lambda'', \quad q'=\mu'', \quad r'=\nu''$$

et les équations du mouvement sont

$$\frac{\partial S}{\partial \lambda''}=L, \quad \frac{\partial S}{\partial \mu''}=M, \quad \frac{\partial S}{\partial \nu''}=N;$$

c'est-à-dire, puisque la composante R de la rotation Ω ne dépend pas de λ'', μ'', ν'',

$$\begin{aligned} Ap'-(AR-Cr)q &= L, \\ Aq'+(AR-Cr)p &= M, \\ Cr' &= N. \end{aligned}$$

6.

Cerceau. Pour calculer la fonction S relative à un système quelconque, on peut employer un théorème analogue à celui de ***Koenig*** pour le calcul de la force vive. Prenons par exemple un cerceau ou un disque homogène d'épaisseur négligeable assujetti à rouler sur un plan horizontal. Appelons a le rayon du cerceau, G son centre: soit $G\alpha$ la verticale ascendante menée par G, Gz la normale au plan du cerceau, c'est-à-dire l'axe de révolution du corps: nous désignerons par Θ l'angle αGz.

Prenons ensuite, comme dans l'exemple précédent, pour axe Gy la perpendiculaire au plan αGz et pour axe Gx la perpendiculaire au plan yGz. De cette façon Gy est une horizontale du plan du cerceau et Gx une ligne de plus grande pente de ce plan aboutissant au point H par lequel le cerceau touche le plan fixe.

Prenons la masse du cerceau pour unité; appelons J_0 l'accélération du point G et J' l'accélération relative d'un point m du cerceau par rapport à des axes de directions fixes passant par G. En appliquant un théorème analogue au théorème de ***Koenig***, on a

$$\frac{1}{2}\Sigma m J^2 = \frac{1}{2}J_0^2 + \frac{1}{2}\Sigma m J'^2,$$

formule que nous écrirons

$$S = \frac{1}{2}J_0^2 + S'.$$

Le mouvement relatif du cerceau autour du point G est le mouvement d'un corps de révolution suspendu par un point de son axe. En appliquant à ce mouvement les notations du numéro précédent on a, d'après (14.):

$$2S' = A(p'^2+q'^2) + Cr'^2 + 2(AR-Cr)(pq'-qp') + \cdots.$$

Il reste donc à calculer J_0^2. Pour cela appelons u, v, w les projections de la vitesse absolue du point G sur les axes Gx, Gy, Gz: pour exprimer que le cerceau roule, il faut écrire que le point matériel du cerceau qui se trouve au contact avec le sol, au point H, a une vitesse nulle. On a donc puisque la vitesse de ce point est la résultante de sa vitesse relative autour de G et de la vitesse d'entrainement de G

$$(15.) \qquad u = 0, \quad v + ra = 0, \quad w - qa = 0;$$

les coordonnées du point H, par rapport aux axes $Gxyz$, sont en effet a, 0, 0.

Comme la rotation instantanée du trièdre $Gxyz$ est Ω, l'accélération absolue du point G a pour projections sur les axes Gx, Gy, Gz:

$$\frac{du}{dt}+Qw-Rv,$$
$$\frac{dv}{dt}+Ru-Pw,$$
$$\frac{dw}{dt}+Pv-Qu,$$

c'est-à-dire d'après (15.)

$$a(Qq+Rr),\quad -ar'-aPq,\quad aq'-aPr;$$

et on a, en faisant la somme des carrés et remarquant que $P=p$, $Q=q$,

$$J_0^2=a^2(q'^2+r'^2)+2a^2p(qr'-rq')+\cdots$$

où nous n'écrivons pas les termes ne contenant pas p', q', r'. On a donc enfin

$$2S=Ap'^2+(A+a^2)q'^2+(C+a^2)r'^2+2(AR-Cr)(pq'-qp')+2a^2p(qr'-rq')+\cdots$$

Appelons encore

$$\delta\lambda,\quad \delta\mu,\quad \delta\nu$$

les angles infiniment petits dont il faut faire tourner le cerceau autour des axes Gx, Gy, Gz pour l'amener d'une position à une position infiniment voisine. Ces quantités sont arbitraires et déterminent complètement le déplacement du cerceau. Nous prendrons λ, μ, ν comme paramètres $q_1, q_2, \ldots, q_n$ et nous aurons encore

$$p'=\lambda'',\quad q'=\mu'',\quad r'=\nu''.$$

Nous pouvons alors écrire les premiers membres des équations du mouvement telles que (9.). Il reste à calculer les deuxièmes membres. Pour cela il faut calculer la somme des travaux des forces appliquées:

$$\Sigma(X\delta x+Y\delta y+Z\delta z)$$

et la mettre sous la forme

$$L_1\delta\lambda+M_1\delta\mu+N_1\delta\nu;$$

L_1, M_1, N_1 seront les deuxièmes membres des équations. Ces quantités ont une signification simple. Menons par le point de contact H avec le sol trois axes Hx_1, Hy_1, Hz_1 parallèles aux axes Gx, Gy, Gz: L_1, M_1, N_1 sont respectivement les sommes des moments des forces appliquées par rapport à ces nouveaux axes. En effet, la vitesse de la molécule placée en H étant nulle dans un déplacement compatible avec les liaisons, le déplacement infiniment petit du cerceau est le déplacement résultant de trois rotations

élémentaires $\delta\lambda, \delta\mu, \delta\nu$ autour des axes Hx_1, Hy_1, Hz_1, sans déplacement de H; ce qui démontre la proposition.

Si la seule force appliquée est le poids g appliqué en G, on a évidemment

$$L_1 = 0, \quad N_1 = 0,$$
$$M_1 = -ga\cos\Theta.$$

Les équations du mouvement sont alors

$$\frac{\partial S}{\partial \lambda''} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial \mu''} = -ga\cos\Theta, \quad \frac{\partial S}{\partial \nu''} = 0,$$

c'est-à-dire, d'après la valeur de S

$$Ap' - (AR - Cr)q = 0,$$
$$(A + a^2)q' + (AR - Cr)p - a^2pr = -ga\cos\Theta,$$
$$(C + a^2)r' + a^2pq = 0.$$

M. *Korteweg* et moi avons remarqué, à peu près en même temps, que l'intégration de ces équations se ramène à l'intégration de l'équation hypergéométrique de *Gauss* suivie d'une quadrature. (Voyez un article des Rendi conti del Circolo Matematico di Palermo, suivi d'une lettre de M. *Korteweg*, premier fascicule 1900.)

7.

Dans ce qui précède nous avons déduit les équations (9.) du principe de *d'Alembert* associé au principe du travail virtuel. On peut aussi les rattacher au principe de la moindre contrainte de *Gauss* (Journal de *Crelle*, t. IV). Il ne pouvait du reste pas en être autrement, puisque, comme le remarque *Gauss*, tous les principes de l'équilibre et du mouvement devant se ramener au principe des vitesses virtuelles et au principe de *d'Alembert*, se ramènent nécessairement les uns aux autres.

Si l'on forme la fonction

$$R = S - (Q_1 q_1'' + Q_2 q_2'' + \cdots + Q_n q_n'')$$

qui contient les lettres q'' au deuxième degré, on voit que les équations du mouvement (9.) peuvent s'écrire

$$(16.) \qquad \frac{\partial R}{\partial q_1''} = 0, \quad \frac{\partial R}{\partial q_2''} = 0, \cdots, \frac{\partial R}{\partial q_n''} = 0.$$

Ce sont les équations que l'on aurait à écrire pour trouver les valeurs de

$q_1'', q_2'', \cdots, q_n''$ rendant R ***minimum***. Inversement les valeurs des q'' tirées de ces équations rendent R minimum, car les termes homogènes du deuxième degré de R proviennent de S et constituent une forme quadratique définie positive. Comme les valeurs des q'' déterminent les accélérations, on peut interpréter ce résultat en disant que ***les valeurs des accélérations à chaque instant rendent R minimum.***

Dans cet énoncé, on peut remplacer la fonction R par toute autre fonction qui en diffère seulement par des termes indépendants des accélérations, par exemple par les deux fonctions suivantes:

$$\frac{1}{2}\Sigma m(x''^2+y''^2+z''^2)-\Sigma(Xx''+Yy''+Zz''),$$

$$\frac{1}{2}\Sigma\frac{1}{m}[(mx''-X)^2+(my''-Y)^2+(mz''-Z)^2].$$

Le fait que les accélérations rendent cette dernière fonction minimum est une conséquence immédiate du principe de la moindre contrainte de *Gauss* comme l'a montré M. *A. Mayer* dans un intéressant article intitulé: „Ueber die Aufstellung der Differentialgleichungen der Bewegung für reibungslose Punktsysteme, die Bedingungsungleichungen unterworfen sind“ und „Zur Regulirung der Stösse in reibungslosen Punktsystemen, die dem Zwange von Bedingungsungleichungen unterliegen“. Abdruck aus den Berichten der mathematisch-physikalischen Klasse der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Sitzung vom 3. Juli 1899. Cet enoncé du principe de *Gauss* que j'ai donné, de mon côté, après M. *Mayer,* dans les Comptes Rendus du 11. septembre 1899, se trouve déjà dans le Tome III des Oeuvres de *Hertz,* page 224 (Leipzig, 1894.)

Ueber die Entwickelungsform algebraischer Functionen und die Irreductibilät algebraischer Gleichungen.

(Von Herrn *Leo Koenigsberger* in Heidelberg.)

In meiner Arbeit „Ueber den *Eisenstein*schen Satz von der Irreductibilität algebraischer Gleichungen“*) habe ich gezeigt, wie man aus der speciellen Entwickelungsform algebraischer Functionen in der Umgebung eines Verzweigungspunktes und der dadurch bedingten Gestalt der sie definirenden algebraischen Functionalgleichungen Irreductibilitätskriterien für algebraische Gleichungen herleiten kann; die folgende Untersuchung soll das dort angeregte Problem ganz allgemein erledigen.

Sei die algebraische Gleichung

$$(1.) \qquad F_0(x)y^n+F_1(x)y^{n-1}+\cdots+F_{n-1}(x)y+F_n(x)=0$$

gegeben, in welcher $F_0, F_1, \ldots, F_n$ ganze Functionen von x bedeuten und welche mit Adjungirung rationaler Functionen von x als irreductibel vorausgesetzt werden darf, so kann die Untersuchung derselben bekanntlich mit Hülfe der Substitution

$$y=\frac{z}{F_0(x)}$$

auf eine Gleichung n-ten Grades in z von der Form

$$z^n+\varphi_1(x)z^{n-1}+\cdots+\varphi_{n-1}(x)z+\varphi_n(x)=0$$

reducirt werden, in welcher $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}, \varphi_n$ ganze Functionen von x darstellen, und man darf somit die ursprüngliche Gleichung in der Form

$$(2.) \qquad y^n+f_1(x)y^{n-1}+f_2(x)y^{n-2}+\cdots+f_{n-1}(x)y+f_n(x)=0$$

annehmen, worin $f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}, f_n$ ganze Functionen von x sind, und welche

*) Bd. CXV dieses Journals.

somit eine algebraische Function von x definirt, welche für keinen endlichen Werth von x unendlich wird.

Um die Entwickelung dieser algebraischen Function in der Umgebung der im Endlichen gelegenen vielfachen Punkte zu finden, seien die sämmtlichen verschiedenen Lösungen der gleich Null gesetzten Discriminante

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\varrho,$$

denen die resp. verschiedenen Functionalwerthe

$$\text{(A.)} \quad \begin{cases} y_{11}, y_{12}, \ldots, y_{1\lambda_1} \\ y_{21}, y_{22}, \ldots, y_{2\lambda_2} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ y_{\varrho 1}, y_{\varrho 2}, \ldots, y_{\varrho\lambda_\varrho} \end{cases}$$

entsprechen mögen, worin jedoch Elemente der verschiedenen Horizontalreihen einander gleich sein können, und die unter einander verschiedenen dieser $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_\varrho$ Functionalwerthe mit

$$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_\mu$$

bezeichnet werden sollen. Bildet man nun eine ganze Function t vom μ-ten Grade in y

$$\text{(3.)} \qquad t = a_0+a_1y+a_2y^2+\cdots+a_{\mu-1}y^{\mu-1}+y^\mu,$$

und bestimmt die μ constanten Coefficienten so, dass t für $y = \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_\mu$ verschwindet, bildet also

$$\text{(4.)} \quad \begin{cases} t = (-1)^\mu \eta_1\eta_2\ldots\eta_\mu+(-1)^{\mu-1}(\eta_1\eta_2\ldots\eta_{\mu-1}+\cdots)y+\cdots \\ \qquad\qquad -(\eta_1+\eta_2+\cdots+\eta_\mu)y^{\mu-1}+y^\mu, \end{cases}$$

so wird nach bekannten Principien die Elimination von y zwischen (2.) und (4.) t als die Lösung einer Gleichung n-ten Grades liefern

$$\text{(5.)} \qquad t^n+\Phi_1(x)t^{n-1}+\cdots+\Phi_{n-1}(x)t+\Phi_n(x) = 0,$$

in welcher $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$ ganze Functionen von x sind. Da sich nun für $x = \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\varrho$ gleiche Werthe für y ergaben, so werden eben diesen Werthen von x nach (4.) auch gleiche, und zwar verschwindende Werthe von t entsprechen, so dass

$$\Phi_n(x) = (x-\alpha_1)^{\sigma_1}(x-\alpha_2)^{\sigma_2}\ldots(x-\alpha_\varrho)^{\sigma_\varrho}\Psi_n(x)$$

sein und $\Phi_{n-1}(x)$ ebenfalls für $x = \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\varrho$ verschwinden muss, wobei t in der Umgebung dieser Punkte eindeutig oder auch verzweigt sein kann. Andere Werthe von x, gleichgültig ob dieselben den letzten Coefficienten

$\Phi_n(x)$ der Gleichung (5.) zu Null machen oder nicht, können zwar vielfache aber nicht Verzweigungspunkte der algebraischen Function t sein, da für diese der Annahme nach y nicht verzweigt ist, und daher nach (3.) auch t nicht verzweigt sein kann. Kennt man andererseits die Entwickelungen von t in der Umgebung eines der Punkte α, für welchen t verschwinden soll, ist also eine derselben

$$= A_0(x-\alpha)^{\frac{\lambda}{\nu}} + A_1(x-\alpha)^{\frac{\lambda+1}{\nu}} + \cdots = (y-\eta_1)(y-\eta_2)\ldots(y-\eta_\mu),$$

und entsprechen dem Werthe $x=\alpha$ die Functionalwerthe $\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \ldots, \eta^{(\delta)}$, welche eine Horizontalreihe des Systems (A.) bilden, so ist, wenn

$$(x-\alpha)^{\frac{1}{\nu}} = z$$

gesetzt wird,

$$(y-\eta_1)(y-\eta_2)\ldots(y-\eta_\mu) - A_0 z^\lambda - A_1 z^{\lambda+1} - \cdots = F(y,z) = 0;$$

da nun für $x=\alpha$, $y=\eta^{(\varepsilon)}$, worin ε eine der Zahlen $1, 2, \ldots, \delta$ bedeutet, auf deren Bestimmung, da es sich hier nur um die Feststellung der Verzweigungsart handelt, ich nicht näher eingehe,

$$\left(\frac{\partial F(y,z)}{\partial y}\right)_{0,\eta^{(\varepsilon)}} \neq 0, \quad \left(\frac{\partial F(y,z)}{\partial z}\right)_{0,\eta^{(\varepsilon)}} = \left(\frac{\partial^2 F(y,z)}{\partial z^2}\right)_{0,\eta^{(\varepsilon)}} = \cdots = \left(\frac{\partial^{\lambda-1} F(y,z)}{\partial z^{\lambda-1}}\right)_{0,\eta^{(\varepsilon)}} = 0$$

ist, also

$$y = \eta^{(\varepsilon)} + B_\lambda z^\lambda + B_{\lambda+1} z^{\lambda+1} + \cdots = \eta^{(\varepsilon)} + B_\lambda (x-\alpha)^{\frac{\lambda}{\nu}} + B_{\lambda+1}(x-\alpha)^{\frac{\lambda+1}{\nu}} + \cdots$$

wird, so hat y dieselbe Verzweigung wie t und die Entwickelung beginnt mit demselben Anfangsexponenten.

So wird z. B. die quadratische Gleichung

$$y^2 - 2x^2 y + x^3 = 0,$$

deren Lösungen durch

$$y = x^2 + x\sqrt{x(x-1)}$$

dargestellt sind, für $x=0$ und $x=1$ die doppelten Wurzeln $y=0$ und $y=1$ haben, und die Transformation

$$t = -y + y^2$$

dieselbe in die quadratische Gleichung

$$t^2 + t(2x^2 + 2x^3 - 4x^4) = x^3(x-1)(-x^2+x+1)$$

überführen, deren Lösungen

$$t = 2x^4 - x^3 - x^2 + (2x^2-1)x\sqrt{x(x-1)}$$

sind; es liefern also die Lösungen $x=0, x=1$ des letzten Coefficienten der quadratischen Gleichung in t Verzweigungspunkte der Function, während sowohl in der Umgebung der Lösungen des Factors $-x^2+x+1$ als auch irgend welcher anderen Werthe von x t eine eindeutige Function dieser Variabeln ist.

Um somit die Verzweigungsart einer beliebigen algebraischen Function für die im Endlichen gelegenen Punkte der Variabeln zu untersuchen, transformire man zunächst dieselbe, nachdem sie in bekannter Weise von dem höchsten Coefficienten befreit worden, durch die mit constanten Coefficienten versehene oben näher charakterisirte Tschirnhausensche Transformation, welche durch alle die verschiedenen Werthe der abhängigen Variabeln, die allen vielfachen Punkten entsprechen, eindeutig definirt ist; es erübrigt dann nur, die Verzweigungsart der transformirten algebraischen Function für eben jene in den letzten Coefficienten der sie definirenden algebraischen Gleichung eintretenden vielfachen Punkte festzustellen und zwar nur für verschwindende Werthe der algebraischen Function.

Es mag zur Ergänzung des Vorigen hier noch eine Bemerkung allgemeinerer Natur gestattet sein, welche die Anwendung einer beliebigen *Tschirnhausen*schen Transformation mit variabelen Coefficienten auf eine algebraische Functionalgleichung betrifft. Sei die algebraische Gleichung (2.) wieder mit Adjungirung rationaler Functionen von x als irreductibel vorausgesetzt, und werde eine *Tschirnhausen*sche Transformation von der Form

$$(6.) \qquad t=\varphi_0(x)+\varphi_1(x)y+\varphi_2(x)y^2+\cdots+\varphi_{n-1}(x)y^{n-1}=\omega(y)$$

auf diese angewandt, in welcher $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$ wiederum rationale Functionen von x bedeuten und deren Grad in y allgemein mit Hülfe von (2.) als der $(n-1)$-te vorausgesetzt werden darf, so werden für die Eliminationsgleichung von y zwischen (2.) und (6.)

$$(7.) \qquad t^n+\Phi_1(x)t^{n-1}+\cdots+\Phi_n(x)=0,$$

in welcher $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ rationale Functionen von x bedeuten, die n Lösungen $t_1, t_2, \ldots, t_n$, welche vermöge (6.) den n verschiedenen Lösungen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ der irreductibeln Gleichung (2.) entsprechen, im allgemeinen verschieden sein, und es wird sich dann, wie bekannt, auch y als rationale Function von x und t darstellen lassen. Liefern jedoch die verschiedenen y-Werthe zum Theil gleiche Werthe von t, dann kann man y nur als Gleichung 2-ten, 3-ten etc.

Grades darstellen, deren Coefficienten rationale Functionen von x und t sind. Werde nun angenommen, dass

$$\omega(y_1) = \omega(y_k)$$

ist, worin k eine der Zahlen $2, 3, \ldots, n$ bedeutet, sei ferner n eine Primzahl, und bestehe für einen der Verzweigungspunkte der Function y ein Cyklus

$$\begin{pmatrix} y_1, y_2, \cdots, y_k, & y_{k+1}, \cdots, y_n \\ y_2, y_3, & y_{k+1}, y_{k+2}, \cdots, y_1 \end{pmatrix}$$

von n Elementen, welche Annahme schon die Irreductibilität der Gleichung (2.) nach sich zieht, so werden sich durch wiederholte Umkreisung des Verzweigungspunktes die Gleichungen ergeben

$$\omega(y_1) = \omega(y_k) = \omega(y_{2k-1}) = \omega(y_{3k-2}) = \omega(y_{4k-3}) = \cdots - \omega(y_{pk-(p-1)}) = \cdots$$
$$\cdots = \omega(y_{qk-(q-1)}) = \cdots,$$

worin die Indices nach dem Modul n zu nehmen sind. Sind nun zwei der Indices von y nach n congruent, so müsste, wenn p und q aus der Zahlenreihe $0, 1, 2, \ldots, n-1$ genommen werden,

$$pk-(p-1) \equiv qk-(q-1) \pmod{n} \quad \text{oder} \quad (p-q)(k-1) \equiv 0 \pmod{n}$$

sein, was, da n als Primzahl vorausgesetzt worden, ausgeschlossen ist, und es werden somit die in den Gleichungen

$$\omega(y_1) = \omega(y_k) = \omega(y_{2k-1}) = \cdots = \omega(y_{(n-1)k-(n-2)})$$

enthaltenen Indices der y nach n incongruent und somit die sämmtlichen Zahlen $1, 2, \ldots, n$ sein, so dass

$$\omega(y_1) = \frac{1}{n} \sum_1^n{}_a \omega(y_a)$$

gesetzt werden darf, und somit $\omega(y_1)$ sich vermöge (2.) als rationale Function von x darstellen lässt, die mit $R(x)$ bezeichnet werden mag. Daraus würde aber nach (6.) folgen, dass die Gleichung

$$\varphi_0(x)+\varphi_1(x)y+\cdots+\varphi_{n-1}(x)y^{n-1} = R(x)$$

mit der irreductibeln Gleichung (2.) die Lösung y_1 gemein hat, also eine in y identische sein müsste, und wir erhalten somit den folgenden Satz:

Drückt man aus den beiden Gleichungen

$$y^n+f_1(x)y^{n-1}+f_2(x)y^{n-2}+\cdots+f_n(x) = 0,$$
$$t = \varphi_0(x)+\varphi_1(x)y+\varphi_2(x)y^2+\cdots+\varphi_{n-1}(x)y^{n-1},$$

worin n eine Primzahl, und die erstere um einen ihrer Verzweigungspunkte

einen Cyklus von n Elementen besitzt, y als Function von x und t aus, so lässt sich diese stets als rationale Function von x und t darstellen.

Nach den Resultaten meiner oben angeführten Arbeit würde dieser Satz also für alle Gleichungen der Form gelten

$$y^n+(x-\alpha)^{\delta_1}F_1(x)y^{n-1}+(x-\alpha)^{\delta_2}F_2(x)y^{n-2}+\cdots$$
$$\cdots+(x-\alpha)^{\delta_{n-1}}F_{n-1}(x)y+(x-\alpha)^{r}F_n(x)=0,$$

worin n eine Primzahl, r kein Multiplum von n,

$$\delta_\lambda = e\left(\frac{\lambda r}{n}\right)+1,$$

und $F_n(\alpha)$ von Null verschieden ist.

Auf eine weitere Ausführung der dahin gehörigen Sätze will ich hier nicht weiter eingehen.

Es soll nunmehr festgestellt werden, in welchen Fällen man unmittelbar aus der Form der oben transformirten Gleichung die Art der Verzweigung ersehen kann.

Sei die Verzweigung einer durch die Gleichung

$$y^n+f_1(x)y^{n-1}+\cdots+f_{n-1}(x)y+f_n(x)=0 \qquad (8.)$$

definirten algebraischen Function festzustellen für diejenigen vielfachen Punkte, welche Lösungen der Gleichung $f_n(x)=0$ sind und y verschwinden machen, so wird zunächst, wenn $x=\alpha$ eine solche Lösung für ν in Null zusammenfallende Werthe der algebraischen Function bezeichnet, die Gleichung (8.) die Form haben

$$(9.)\quad \begin{cases} y^n+f_1(x)y^{n-1}+\cdots+f_{n-\nu}(x)y^{\nu}+(x-\alpha)\varphi_{n-\nu+1}(x)y^{\nu-1}+\cdots \\ \qquad\qquad \cdots+(x-\alpha)\varphi_{n-1}(x)y+(x-\alpha)\varphi_n(x)=0, \end{cases}$$

worin $f_1,\ldots,f_{n-\nu},\varphi_{n-\nu+1},\ldots,\varphi_n$ ganze Functionen von x darstellen. Bestehen nun in $x=\alpha$ k Cyklen von je $\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_k$ Blättern, worin die $\mu\geqq 1$ sind, so dass $\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_k=\nu$ ist, und sind die Entwickelungen der Functionalwerthe in der Form dargestellt

$$y_{11}=A_1(x-\alpha)^{\frac{\varrho_1}{\mu_1}}+B_1(x-\alpha)^{\frac{\varrho_1+1}{\mu_1}}+\cdots,\quad y_{12}=A_2(x-\alpha)^{\frac{\varrho_2}{\mu_2}}+\cdots,\quad \cdots y_{1k}=A_k(x-\alpha)^{\frac{\varrho_k}{\mu_k}}+\cdots$$

$$y_{21}=\varepsilon_1^{\varrho_1}A_1(x-\alpha)^{\frac{\varrho_1}{\mu_1}}+\varepsilon_1^{\varrho_1+1}B_1(x-\alpha)^{\frac{\varrho_1+1}{\mu_1}}+\cdots,\quad y_{22}=\varepsilon_2^{\varrho_2}A_2(x-\alpha)^{\frac{\varrho_2}{\mu_2}}+\cdots,\quad \cdots y_{2k}=\varepsilon_k^{\varrho_k}A_k(x-\alpha)^{\frac{\varrho_k}{\mu_k}}+\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y_{\mu_1 1}=\varepsilon^{(\mu_1-1)\varrho_1}A_1(x-\alpha)^{\frac{\varrho_1}{\mu_1}}+\cdots,\quad y_{\mu_2 2}=\varepsilon_2^{(\mu_2-1)\varrho_2}A_2(x-\alpha)^{\frac{\varrho_2}{\mu_2}}+\cdots,\quad \cdots y_{\mu_k k}=\varepsilon_k^{(\mu_k-1)\varrho_k}A_k(x-\alpha)^{\frac{\varrho_k}{\mu_k}}+\cdots,$$

worin $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k$ resp. μ_1-te, μ_2-te, ..., μ_k-te primitive Einheitswurzeln, die $\varrho \geqq 1$, und die Coefficienten $A_1, A_2, \ldots, A_k$ von Null verschieden sind; seien ferner die für $x = \alpha$ von Null verschiedenen Lösungen der Gleichung (9.), also die Wurzeln der Gleichung

$$y^{n-\nu} + f_1(\alpha) y^{n-\nu-1} + \cdots + f_{n-\nu}(\alpha) = 0$$

$a_1, a_2, \ldots, a_{n-\nu}$, die auch zum Theil oder sämmtlich einander gleich sein können, so werden der Voraussetzung gemäss die Entwickelungen der zugehörigen Zweige durch die *Taylor*schen Reihen

$y_1 = a_1 + b_1(x-\alpha) + \cdots$, $y_2 = a_2 + b_2(x-\alpha) + \cdots$, $\cdots y_{n-\nu} = a_{n-\nu} + b_{n-\nu}(x-\alpha) + \cdots$

gegeben sein, und hieraus sowie aus den oben aufgestellten Entwickelungen um den Verzweigungspunkt α folgt zunächst, dass, weil

$$\varepsilon^{\varrho + 2\varrho + \cdots + (\mu-1)\varrho} = (-1)^{(\mu-1)\varrho}$$

ist,

$$y_1 y_2 \cdots y_{n-\nu} y_{11} y_{21} \cdots y_{\mu_1 1} \cdots y_{1k} y_{2k} \cdots y_{\mu_k k} = a_1 a_2 \ldots a_{n-\nu} A_1^{\mu_1} \ldots A_k^{\mu_k} (-1)^{\Sigma \mu \varrho - \Sigma \varrho} (x-\alpha)^{\varrho_1 + \varrho_2 + \cdots + \varrho_k} + \cdots$$

wird, worin die weiteren Glieder höhere Potenzen von $x-\alpha$ enthalten, und dass somit, wenn

$$\varrho_1 + \varrho_2 + \cdots + \varrho_k = \delta$$

gesetzt wird, das letzte Glied der Gleichung (9.) die Form hat

$$(x-\alpha)^\delta \Omega(x),$$

worin $\Omega(x)$ eine ganze Function von x ist, welche für $x = \alpha$ nicht verschwindet.

Bildet man die Summe der Combinationen der Lösungen der Gleichung (9.) zur $(n-1)$-ten Klasse, so wird die allen Summanden gemeinsame Potenz von $x-\alpha$ erhalten, wenn man diejenige der Potenzen

$$(x-\alpha)^{\frac{\varrho_1}{\mu_1}}, \quad (x-\alpha)^{\frac{\varrho_2}{\mu_2}}, \quad \ldots, (x-\alpha)^{\frac{\varrho_k}{\mu_k}}$$

ausschaltet, welche den höchsten Exponenten besitzt; nehmen wir also diese Brüche der Grösse nach geordnet

$$\frac{\varrho_1}{\mu_1} \geqq \frac{\varrho_2}{\mu_2} \geqq \cdots \geqq \frac{\varrho_k}{\mu_k}$$

an, und beachtet man, dass die im vorletzten Posten der Gleichung (9.) enthaltene Potenz von $x-\alpha$ eine ganze sein muss, so wird, wenn $e(a)$ die grösste in a enthaltene ganze Zahl bedeutet, und je nachdem $\frac{\varrho_1}{\mu_1}$ eine ganze

Zahl ist oder nicht,

$$e\left((\mu_1-1)\frac{\varrho_1}{\mu_1}+\varrho_2+\cdots+\varrho_k\right) \text{ oder } e\left((\mu_1-1)\frac{\varrho_1}{\mu_1}+\varrho_2+\cdots+\varrho_k\right)+1$$

mit $\delta_1^{(1)}$ bezeichnet wird, der vorletzte Coefficient der Gleichung die Form haben

$$(x-\alpha)^{\delta_1^{(1)}}\Omega_1(x).$$

Für die Combinationen zur $(n-2)$-ten Klasse werden die beiden höchsten Anfangspotenzen der Wurzelentwickelungen auszuschalten sein, um zu sehen, welche Potenz von $x-\alpha$ mindestens in dem drittletzten Coefficienten enthalten ist, und wir erhalten somit für die Form desselben, wenn, je nachdem $2\frac{\varrho_1}{\mu_1}$ eine ganze Zahl ist oder nicht,

$$e\left((\mu_1-2)\frac{\varrho_1}{\mu_1}+\varrho_2+\cdots+\varrho_k\right) \text{ oder } e\left((\mu_1-2)\frac{\varrho_1}{\mu_1}+\varrho_2+\cdots+\varrho_k\right)+1$$

mit $\delta_2^{(1)}$ bezeichnet wird,

$$(x-\alpha)^{\delta_2^{(1)}}\Omega_2(x),$$

u. s. w. worin, unmittelbar zu sehen, dass, wenn ϱ_1 zu μ_1 relativ prim ist,

$$\delta_{\gamma_1}^{(1)} = e\left((\mu_1-\gamma_1)\frac{\varrho_1}{\mu_1}+\varrho_2+\cdots+\varrho_k\right)+1 \quad (\text{für } \gamma_1 = 1, 2, \ldots, \mu_1-1)$$

ist, und wenn der grösste gemeinschaftliche Theiler von ϱ_1 und μ_1 mit d_1 bezeichnet und $\varrho_1 = d_1 p_1$, $\mu_1 = d_1 q_1$ gesetzt wird, $\delta_{\gamma_1}^{(1)}$ für alle nicht durch q_1 theilbaren Werthe von γ_1 eben diesen Werth hat, während für $\gamma_1 = q_1$, $2q_1, \ldots, (d_1-1)q_1$:

$$\delta_{\gamma_1}^{(1)} = e\left((\mu_1-\gamma_1)\frac{\varrho_1}{\mu_1}+\varrho_2+\cdots+\varrho_k\right) = \varrho_1+\varrho_2+\cdots+\varrho_k-\gamma_1\frac{\varrho_1}{\mu_1}$$

ist. Und diese Form behalten die Coefficienten der Gleichung (9.) bei bis zu den Combinationen der $(n-\mu_1+1)$-ten Klasse, während die Combination $(n-\mu_1)$-ter Klasse die Form annimmt

$$(x-\alpha)^{\delta_{\mu_1}^{(1)}}\Omega_{\mu_1}(x),$$

worin

$$\delta_{\mu_1}^{(1)} = e(\varrho_2+\varrho_3+\cdots+\varrho_k) = \varrho_2+\varrho_3+\cdots+\varrho_k$$

ist, und $\Omega_{\mu_1}(x)$ eine ganze Function von x bedeutet, welche, wie aus der Form der Wurzelentwickelungen wieder unmittelbar zu sehen, für $x=\alpha$ nicht verschwindet. Bildet man nun die Summe der Combinationen $(n-\mu_1-1)$-ter Klasse und schliesst genau in derselben Weise weiter, so erhält man zunächst den folgenden Satz:

Wenn eine algebraische Gleichung

$$(10.)\qquad y^n+f_1(x)y^{n-1}+f_2(x)y^{n-2}+\cdots+f_{n-1}(x)y+f_n(x) = 0$$

für einen Nullwerth $x=\alpha$ des letzten Coefficienten eine ν-fach verschwindende Lösung besitzt, während die übrigen dem $x=\alpha$ entsprechenden $n-\nu$ Functionalwerthe sämmtlich verschieden sind), und die ν Functionalwerthe gruppiren sich zu Cyklen von $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_k$ Elementen mit den Exponenten $\frac{\varrho_1}{\mu_1}, \frac{\varrho_2}{\mu_2}, \ldots, \frac{\varrho_k}{\mu_k}$ ihrer Anfangsglieder in den Entwickelungen um $x=\alpha$ herum, wobei*

$$\frac{\varrho_1}{\mu_1} \geqq \frac{\varrho_2}{\mu_2} \geqq \cdots \geqq \frac{\varrho_k}{\mu_k}$$

sein soll, so hat dieselbe stets die Form

$$(11.)\left\{\begin{array}{l}
(x-\alpha)^{\delta}\varphi_0+(x-\alpha)^{\delta_1^{(1)}}\varphi_{11}y+(x-\alpha)^{\delta_2^{(1)}}\varphi_{12}y^2+\cdots+(x-\alpha)^{\delta_{\mu_1}^{(1)}}\varphi_{1\mu_1}y^{\mu_1}\\
\qquad +(x-\alpha)^{\delta_1^{(2)}}\varphi_{21}y^{\mu_1+1}+(x-\alpha)^{\delta_2^{(2)}}\varphi_{22}y^{\mu_1+2}+\cdots\\
\qquad\qquad \cdots+(x-\alpha)^{\delta_{\mu_2}^{(2)}}\varphi_{2\mu_2}y^{\mu_1+\mu_2}\\
+\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\\
+(x-\alpha)^{\delta_1^{(k)}}\varphi_{k1}y^{\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_{k-1}+1}+(x-\alpha)^{\delta_2^{(k)}}\varphi_{k2}y^{\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_{k-1}+2}+\cdots\\
\qquad \cdots+(x-\alpha)^{\delta_{\mu_k-1}^{(k)}}\varphi_{k\mu_k-1}y^{\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_k-1}\\
\qquad\qquad +\psi_0y^{\nu}+\psi_1y^{\nu+1}+\cdots+\psi_{n-\nu-1}y^{n-1}+y^n = 0,
\end{array}\right.$$

worin die Functionen φ und ψ ganze Functionen von x bedeuten,

$$\delta = \varrho_1+\varrho_2+\cdots+\varrho_k$$

und

$$(12.)\left\{\begin{array}{l}
\delta_{\gamma\lambda}^{(\lambda)} = e\Big((\mu_\lambda-\gamma_\lambda)\frac{\varrho_\lambda}{\mu_\lambda}+\varrho_{\lambda+1}+\cdots+\varrho_k\Big) \text{ oder}\\
\qquad = e\Big((\mu_\lambda-\gamma_\lambda)\frac{\varrho_\lambda}{\mu_\lambda}+\varrho_{\lambda+1}+\cdots+\varrho_k\Big)+1 \qquad (\lambda=1,2,\cdots,k)
\end{array}\right.$$

ist, je nachdem das Argument der e-Function eine ganze Zahl ist oder nicht, und

$$\varphi_0(\alpha),\ \varphi_{1\mu_1}(\alpha),\ \varphi_{2\mu_2}(\alpha),\ \ldots,\ \varphi_{k-1\mu_{k-1}}(\alpha),\ \psi_0(\alpha)$$

von Null verschieden sind.

---

*) Diese letztere Annahme wird nur in Rücksicht auf das ursprünglich vorgelegte Problem gemacht — dass dieselbe für den obigen Satz unwesentlich ist, sieht man daraus, dass die früheren Schlüsse davon unabhängig sind, ob die Entwickelung der Functionszweige $y_1, y_2, \cdots, y_{n-\nu}$ ganze oder gebrochene Potenzen von $x-\alpha$ enthalten, wenn nur die Anfangsglieder $a_1, a_2, \cdots, a_{n-\nu}$ von Null verschieden sind.

So wird z. B. eine algebraische Function 11-ten Grades, welche für $x = 0$ die 10-fache Lösung Null annimmt und sich zu 3 Cyklen von 1, 3 und 6 Elementen gruppirt, welche zu Anfangsgliedern ihrer Entwickelung in der Umgebung des Nullpunktes $x^1, x^{\frac{1}{3}}, x^{\frac{1}{3}}$ haben, nothwendig durch eine Gleichung von der Form definirt sein

$$x^4\varphi_0+x^3\varphi_1 y+x^3\varphi_2 y^2+x^3\varphi_3 y^3+x^2\varphi_4 y^4+x^2\varphi_5 y^5+x^2\varphi_6 y^6+x\varphi_7 y^7 + x\varphi_8 y^8+x\varphi_9 y^9+\varphi_{10} y^{10}+y^{11} = 0,$$

worin $\varphi_0(0), \varphi_1(0), \varphi_4(0), \varphi_{10}(0)$ von Null verschieden sind.

Wir wollen nun untersuchen, wann die Form der Gleichung (11.) auch hinreichend ist für die oben angenommene Verzweigungsart, und zu dem Zwecke der kürzeren Darstellung wegen voraussetzen, dass $k = 2$ ist, also die Gleichung zu Grunde legen

$$(13.)\quad \left\{\begin{aligned} &(x-\alpha)^{\delta}\varphi_0+(x-\alpha)^{\delta_1^{(1)}}\varphi_{11}y+(x-\alpha)^{\delta_2^{(1)}}\varphi_{12}y^2+\cdots+(x-\alpha)^{\delta_{\mu_1}^{(1)}}\varphi_{1\mu_1}y^{\mu_1}\\ &\quad+(x-\alpha)^{\delta_1^{(2)}}\varphi_{21}y^{\mu_1+1}+(x-\alpha)^{\delta_2^{(2)}}\varphi_{22}y^{\mu_1+2}+\cdots\\ &\qquad\cdots+(x-\alpha)^{\delta_{\mu_2-1}^{(2)}}\varphi_{2\mu_2-1}y^{\mu_1+\mu_2-1}\\ &\quad+\psi_0 y^{\nu}+\psi_1 y^{\nu+1}+\cdots+\psi_{n-\nu-1}y^{n-1}+y^n = 0, \end{aligned}\right.$$

in welcher

$$(14.)\quad \left\{\begin{aligned} &\mu_1+\mu_2=\nu,\quad \delta=\varrho_1+\varrho_2,\quad \delta_{\gamma_1}^{(1)} = e\Big((\mu_1-\gamma_1)\frac{\varrho_1}{\mu_1}+\varrho_2\Big) \text{ oder}\\ &\qquad = e\Big((\mu_1-\gamma_1)\frac{\varrho_1}{\mu_1}+\varrho_2\Big)+1,\\ &\delta_{\gamma_2}^{(2)} = e\Big((\mu_2-\gamma_2)\frac{\varrho_2}{\mu_2}\Big) \text{ oder } = e\Big((\mu_2-\gamma_2)\frac{\varrho_2}{\mu_2}\Big)+1 \end{aligned}\right.$$

ist, je nachdem das Argument der e-Function eine ganze Zahl ist oder nicht, $\frac{\varrho_1}{\mu_1} \gtreqless \frac{\varrho_2}{\mu_2}$, und $\varphi_0(\alpha), \varphi_{1\mu_1}(\alpha), \psi_0(\alpha)$ von Null verschieden sind.

Setzt man in (13.)

$$(15.)\qquad x-\alpha = t^{\mu_1} \quad \text{und} \quad y = t^{\varrho_1}v,$$

so wird v als algebraische Function von t durch die Gleichung definirt sein

$$(16.)\quad \left\{\begin{aligned} &t^{\mu_1\delta}\varphi_0+t^{\mu_1\delta_1^{(1)}+\varrho_1}\varphi_{11}v+\cdots+t^{\mu_1\delta_{\mu_1}^{(1)}+\mu_1\varrho_1}\varphi_{1\mu_1}v^{\mu_1}\\ &\quad+t^{\mu_1\delta_1^{(2)}+(\mu_1+1)\varrho_1}\varphi_{21}v^{\mu_1+1}+\cdots+t^{\mu_1\delta_{\mu_2-1}^{(2)}+(\mu_1+\mu_2-1)\varrho_1}\varphi_{2\mu_2-1}v^{\mu_1+\mu_2-1}\\ &\qquad+\psi_0 t^{\nu\varrho_1}v^{\nu}+\cdots+\psi_{n-\nu-1}t^{(n-1)\varrho_1}v^{n-1}+t^{n\varrho_1}v^n = 0, \end{aligned}\right.$$

wobei in den φ- und ψ-Functionen das Argument x durch $t^{\mu_1}+\alpha$ zu ersetzen ist; dividirt man nun diese Gleichung durch $t^{\mu_1\delta}$, so werden die Exponenten

$$\mu_1\delta_{\gamma_1}^{(1)}+\gamma_1\varrho_1-\mu_1\delta$$

nach (14), *wenn* ϱ_1 *zu* μ_1 *relativ prim,*

$$\text{für } \gamma_1<\mu_1 \quad \mu_1\left\{e\left((\mu_1-\gamma_1)\frac{\varrho_1}{\mu_1}\right)+1-(\mu_1-\gamma_1)\frac{\varrho_1}{\mu_1}\right\}>0$$

$$\text{für } \gamma_1=\mu_1 \quad \mu_1\left\{e(\varrho_2)+\varrho_1\right\}-\mu_1(\varrho_1+\varrho_2)=0,$$

während, *wenn* ϱ_1 *und* μ_1 *den grössten gemeinsamen Theiler* d_1 *haben, und* $\varrho_1=p_1d_1$, $\mu_1=q_1d_1$ gesetzt wird, diese Exponenten

$$\text{für } \gamma_1=q_1, 2q_1,\ldots,d_1q_1 \quad \mu_1\left\{e\left((\mu_1-\gamma_1)\frac{\varrho_1}{\mu_1}\right)-(\mu_1-\gamma_1)\frac{\varrho_1}{\mu_1}\right\}=0,$$

für alle anderen γ_1 wieder >0 werden.

Bemerkt man ferner, dass die weiteren in der Gleichung (16.) vorkommenden Exponenten von t nach der Division durch $t^{\mu_1\delta}$ von der Form

$$\mu_1\delta_{\gamma_2}^{(2)}+(\mu_1+\gamma_2)\varrho_1-\mu_1\delta$$

nach (14.), *wenn* ϱ_2 *zu* μ_2 *relativ prim,*

$$\text{für } \gamma_2<\mu_2 \quad \mu_1\left\{e\left((\mu_2-\gamma_2)\frac{\varrho_2}{\mu_2}\right)+1-(\mu_2-\gamma_2)\frac{\varrho_2}{\mu_2}\right\}+\gamma_2\mu_1\left(\frac{\varrho_1}{\mu_1}-\frac{\varrho_2}{\mu_2}\right)>0,$$

während, *wenn* ϱ_2 *und* μ_2 *wieder den grössten gemeinsamen Theiler* d_2 *haben,* und $\varrho_2=p_2d_2$, $\mu_2=q_2d_2$ gesetzt wird, diese Exponenten

$$\text{für } \gamma_2=q_2, 2q_2,\ldots,(d_2-1)q_2 \quad \gamma_2\mu_1\left(\frac{\varrho_1}{\mu_1}-\frac{\varrho_2}{\mu_2}\right)\gtreqless 0 \text{ je nachdem } \frac{\varrho_1}{\mu_1}\gtreqless\frac{\varrho_2}{\mu_2},$$

für alle anderen γ_2 wieder >0 werden,

dass endlich von den Exponenten von t in den mit den ψ-Functionen behafteten Posten nach Division durch $t^{\mu_1\delta}$ der erste

$$\nu\varrho_1-\mu_1\delta=(\mu_1+\mu_2)\varrho_1-\mu_1(\varrho_1+\varrho_2)=\varrho_1\mu_2-\varrho_2\mu_1\gtreqless 0$$

ist, je nachdem $\frac{\varrho_1}{\mu_1}\gtreqless\frac{\varrho_2}{\mu_2}$ ist, während die übrigen sämmtlich positiv sind, so wird sich, wenn nach Division der Gleichung (16.) durch $t^{\mu_1\delta}$ $t=0$ gesetzt wird, für die zugehörigen Werthe von v die Bestimmungsgleichung ergeben

I. *wenn* $\frac{\varrho_1}{\mu_1}$ *und* $\frac{\varrho_2}{\mu_2}$ *irreductible Brüche und* $\frac{\varrho_1}{\mu_1}>\frac{\varrho_2}{\mu_2}$,

$$\text{(17.)} \qquad \varphi_0(\alpha)+\varphi_{1\mu_1}(\alpha)v^{\mu_1\nu}=0;$$

II. *wenn* $\frac{\varrho_1}{\mu_1}$ *und* $\frac{\varrho_2}{\mu_2}$ *irreductible Brüche und* $\frac{\varrho_1}{\mu_1}=\frac{\varrho_2}{\mu_2}$ also $\varrho_1=\varrho_2, \mu_1=\mu_2$,

$$\varphi_0(\alpha)+\varphi_{1\mu_1}(\alpha)\,v^{\mu_1}+\psi_0(\alpha)\,v^{\mu_1+\mu_2}=0; \tag{18.}$$

III. *wenn* $\frac{\varrho_1}{\mu_1}$ *reductibel,* $\frac{\varrho_2}{\mu_2}$ *irreductibel und* $\frac{\varrho_1}{\mu_1}>\frac{\varrho_2}{\mu_2}$ *ist,*

$$\varphi_0(\alpha)+\varphi_{1q_1}(\alpha)\,v^{q_1}+\varphi_{12q_1}(\alpha)\,v^{2q_1}+\cdots\varphi_{1\mu_1}(\alpha)\,v^{\mu_1}=0; \tag{19.}$$

IV. *wenn* $\frac{\varrho_1}{\mu_1}$ *reductibel,* $\frac{\varrho_2}{\mu_2}$ *irreductibel und* $\frac{\varrho_1}{\mu_1}=\frac{\varrho_2}{\mu_2}$ *ist,*

$$\varphi_0(\alpha)+\varphi_{1q_1}(\alpha)\,v^{q_1}+\varphi_{12q_1}(\alpha)\,v^{2q_1}+\cdots+\varphi_{1\mu_1}(\alpha)\,v^{\mu_1}+\psi_0(\alpha)\,v^{\mu_1+\mu_2}=0; \tag{20.}$$

V. *wenn* $\frac{\varrho_1}{\mu_1}$ *irreductibel,* $\frac{\varrho_2}{\mu_2}$ *reductibel und* $\frac{\varrho_1}{\mu_1}>\frac{\varrho_2}{\mu_2}$ *ist,*

$$\varphi_0(\alpha)+\varphi_{1\mu_1}(\alpha)\,v^{\mu_1}=0; \tag{21.}$$

VI. *wenn* $\frac{\varrho_1}{\mu_1}$ *irreductibel,* $\frac{\varrho_2}{\mu_2}$ *reductibel und* $\frac{\varrho_1}{\mu_1}=\frac{\varrho_2}{\mu_2}$ *ist,*

$$\left\{\begin{array}{l}\varphi_0(\alpha)+\varphi_{1\mu_1}(\alpha)\,v^{\mu_1}+\varphi_{2q_2}(\alpha)\,v^{\mu_1+q_2}+\varphi_{22q_2}(\alpha)\,v^{\mu_1+2q_2}+\cdots\\ \qquad\cdots+\psi_0(\alpha)\,v^{\mu_1+\mu_2}=0;\end{array}\right. \tag{22.}$$

VII. *wenn* $\frac{\varrho_1}{\mu_1}$ *reductibel,* $\frac{\varrho_2}{\mu_2}$ *reductibel und* $\frac{\varrho_1}{\mu_1}>\frac{\varrho_2}{\mu_2}$ *ist,*

$$\varphi_0(\alpha)+\varphi_{1q_1}(\alpha)\,v^{q_1}+\varphi_{12q_1}(\alpha)\,v^{2q_1}+\cdots+\varphi_{1\mu_1}(\alpha)\,v^{\mu_1}=0; \tag{23.}$$

VIII. *wenn* $\frac{\varrho_1}{\mu_1}$ *reductibel,* $\frac{\varrho_2}{\mu_2}$ *reductibel und* $\frac{\varrho_1}{\mu_1}=\frac{\varrho_2}{\mu_2}$ *ist,*

$$\left\{\begin{array}{l}\varphi_0(\alpha)+\varphi_{1q_1}(\alpha)\,v^{q_1}+\cdots+\varphi_{1\mu_1}(\alpha)\,v^{\mu_1}+\varphi_{2q_2}(\alpha)\,v^{\mu_1+q_2}+\varphi_{22q_2}(\alpha)\,v^{\mu_1+2q_2}+\cdots\\ \qquad\cdots+\psi_0(\alpha)\,v^{\mu_1+\mu_2}=0.\end{array}\right. \tag{24.}$$

Setzt man ebenso in (13.)

$$x-\alpha=u^{\mu_2},\quad y=u^{\varrho_2}w,$$

so folgt

$$\left\{\begin{array}{l}u^{\mu_2\delta}\varphi_0+u^{\mu_2\delta_1^{(1)}+\varrho_2}\varphi_{11}w+u^{\mu_2\delta_2^{(1)}+2\varrho_2}\varphi_{12}w^2+\cdots+u^{\mu_2\delta_{\mu_1}^{(1)}+\mu_1\varrho_2}\varphi_{1\mu_2}w^{\mu_1}\\ \quad+u^{\mu_2\delta_1^{(2)}+(\mu_1+1)\varrho_2}\varphi_{21}w^{\mu_1+1}+\cdots+u^{\mu_2\delta_{\mu_2-1}^{(2)}+(\mu_1+\mu_2-1)\varrho_2}\varphi_{2\mu_2-1}w^{\mu_1+\mu_2-1}\\ \quad+\psi_0u^{\nu\varrho_2}w^{\nu}+\cdots+\psi_{n-\nu-1}u^{(n-1)\varrho_2}w^{n-1}+u^{n\varrho_2}w^n=0,\end{array}\right. \tag{25.}$$

wobei in den φ- und ψ-Functionen das Argument x durch $u^{\mu_2}+\alpha$ zu ersetzen ist; dividirt man nun diese Gleichung durch $u^{\nu\varrho_2}$, so wird der erste Exponent

$$\mu_2\delta-\nu\varrho_2=\mu_2(\varrho_1+\varrho_2)-(\mu_1+\mu_2)\varrho_2=\mu_2\varrho_1-\mu_1\varrho_2\gtreqless 0,$$

je nachdem $\frac{\varrho_1}{\mu_1} \gtreqless \frac{\varrho_2}{\mu_2}$ ist, die folgenden Exponenten

$$\mu_2 \delta_{\gamma_1}^{(1)} + \gamma_1 \varrho_2 - \nu \varrho_2$$

nach (14.), *wenn* ϱ_1 *zu* μ_1 *relativ prim*

für $\gamma_1 < \mu_1 \quad \mu_2 \left\{ e\left((\mu_1 - \gamma_1)\frac{\varrho_1}{\mu_1}\right) + 1 - (\mu_1 - \gamma_1)\frac{\varrho_1}{\mu_1} \right\} + (\varrho_1 \mu_2 - \mu_1 \varrho_2)\frac{\mu_1 - \gamma_1}{\mu_1} > 0$

für $\gamma_1 = \mu_1 \quad \mu_2 e(\varrho_2) + \mu_1 \varrho_2 - (\mu_1 + \mu_2)\varrho_2 = 0,$

während, *wenn* ϱ_1 *und* μ_1 *den grössten Theiler* d_1 *haben,*

für $\gamma_1 = q_1, 2q_1, \ldots, d_1 q_1 \quad \mu_2 e\left(\varrho_1 + \varrho_2 - \gamma_1 \frac{p_1}{q_1}\right) + \gamma_1 \varrho_2 - (\mu_1 + \mu_2)\varrho_2$

$= (\mu_2 \varrho_1 - \mu_1 \varrho_2)\frac{\mu_1 - \gamma_1}{\mu_1} > 0,$ wenn $\frac{\varrho_1}{\mu_1} > \frac{\varrho_2}{\mu_2}$ und $\gamma_1 < \mu_1$

$= 0,$ wenn $\frac{\varrho_1}{\mu_1} = \frac{\varrho_2}{\mu_2}$ oder $\gamma_1 = \mu_1,$

für alle anderen γ_1 aber > 0 werden.

Bemerkt man ferner, dass die weiteren in der Gleichung (25.) vorkommenden Exponenten von u nach der Division durch $u^{\nu\varrho_2}$ von der Form

$$\mu_2 \delta_{\gamma_2}^{(2)} + (\mu_1 + \gamma_2)\varrho_2 - \nu \varrho_2$$

nach (14.), *wenn* ϱ_2 *zu* μ_2 *relativ prim,*

$$\text{für } \gamma_2 < \mu_2 \quad \mu_2 \left\{ e(\mu_2 - \gamma_2)\frac{\varrho_2}{\mu_2} + 1 - (\mu_2 - \gamma_2)\frac{\varrho_2}{\mu_2} \right\} > 0,$$

während, *wenn* ϱ_2 *und* μ_2 *wieder den grössten gemeinsamen Theiler* d_2 *haben,* diese Exponenten

für $\gamma_2 = q_2, 2q_2, \ldots, (d_2 - 1)q_2$ $= 0$

für alle anderen γ_2 wieder > 0 werden,

dass endlich von den Exponenten von u in den mit den ψ-Functionen behafteten Posten nach Division mit $u^{\nu\varrho_2}$ der erste $= 0$, alle anderen > 0 werden, so wird sich, wenn nach Division der Gleichung (25.) durch $u^{\nu\varrho_2}$ $u = 0$ gesetzt wird, für die zugehörigen Werthe von v den obigen acht Fällen entsprechend die Bestimmungsgleichung ergeben

I. (26.) $$\varphi_{1\mu_1}(\alpha) w^{\mu_1} + \psi_0(\alpha) w^{\mu_1 + \mu_2} = 0,$$

II. (27.) $$\varphi_0(\alpha) + \varphi_{1\mu_1}(\alpha) w^{\mu_1} + \psi_0(\alpha) w^{\mu_1 + \mu_2} = 0,$$

III. (28.) $$\varphi_{1\mu_1}(\alpha) w^{\mu_1} + \psi_0(\alpha) w^{\mu_1 + \mu_2} = 0,$$

IV. (29.) $$\varphi_0(\alpha) + \varphi_{1q_1}(\alpha) w^{q_1} + \varphi_{12q_1}(\alpha) w^{2q_1} + \cdots + \varphi_{1\mu_1}(\alpha) w^{\mu_1} + \psi_0(\alpha) w^{\mu_1 + \mu_2} = 0$$

V. (30.) $$\varphi_{1\mu_1}(\alpha)w^{\mu_1}+\varphi_{2q_2}(\alpha)w^{\mu_1+q_2}+\varphi_{22q_2}(\alpha)w^{\mu_1+2q_2}+\cdots+\psi_0(\alpha)w^{\mu_1+\mu_2}=0,$$

VI. (31.) $$\varphi_0(\alpha)+\varphi_{1\mu_1}(\alpha)w^{\mu_1}+\varphi_{2q_2}(\alpha)w^{\mu_1+q_2}+\varphi_{22q_2}(\alpha)w^{\mu_1+2q_2}+\cdots$$
$$\cdots+\psi_0(\alpha)w^{\mu_1+\mu_2}=0,$$

VII. (32.) $$\varphi_{1\mu_1}(\alpha)w^{\mu_1}+\varphi_{2q_2}(\alpha)w^{\mu_1+q_2}+\varphi_{22q_2}(\alpha)w^{\mu_1+2q_2}+\cdots+\psi_0(\alpha)w^{\mu_1+\mu_2}=0,$$

VIII. (33.) $$\varphi_0(\alpha)+\varphi_{1q_1}(\alpha)w^{q_1}+\cdots+\varphi_{1\mu_1}(\alpha)w^{\mu_1}+\varphi_{2q_2}(\alpha)w^{\mu_1+q_2}+\cdots+\psi_0(\alpha)w^{\mu_1+\mu_2}=0.$$

Gehen wir zunächst zur Untersuchung der Gleichungen (17.)—(24.) über, so sehen wir, da (17.) mit (21.), (19.) mit (23.) und diese unter einander zusammenfallen, wenn

(a.) $$\varphi_{1q_1}(\alpha)=\varphi_{12q_1}(\alpha)=\cdots=\varphi_{1(d_1-1)q_1}(\alpha)=0,$$

da ferner (18.) mit (22.) und (20.) mit (24.) zusammenfällt, wenn

(b.) $$\varphi_{2q_2}(\alpha)=\varphi_{22q_2}(\alpha)=\cdots=\varphi_{2(d_2-1)q_2}(\alpha)=0,$$

und diese wieder unter einander zusammenfallen, wenn die Gleichungen (a.) und (b.) zu gleicher Zeit erfüllt sind, dass,

wenn d_1 *der grösste gemeinschaftliche Theiler von* ϱ_1 *und* μ_1, d_2 *der grösste gemeinschaftliche Theiler von* ϱ_2 *und* μ_2 *ist, sodass* $\mu_1=d_1q_1$, $\mu_2=d_2q_2$, *und wenn die Coefficienten der Potenzen von*

$$y^{q_1}, y^{2q_1}, \ldots, y^{(d_1-1)q_1}, y^{\mu_1+q_2}, y^{\mu_1+2q_2}, \ldots, y^{\mu_1+(d_2-1)q_2}$$

in der Gleichung (13.) *für* $x=\alpha$ *verschwinden — was auch stets der Fall ist, wenn* $\frac{\varrho_1}{\mu_1}$ *und* $\frac{\varrho_2}{\mu_2}$ *irreductible Brüche sind —, die Bestimmungsgleichung für* v

$$\text{wenn } \frac{\varrho_1}{\mu_1}>\frac{\varrho_2}{\mu_2},\quad \varphi_0(\alpha)+\varphi_{1\mu_1}(\alpha)v^{\mu_1}=0,$$

$$\text{wenn } \frac{\varrho_1}{\mu_1}=\frac{\varrho_2}{\mu_2},\quad \varphi_0(\alpha)+\varphi_{1\mu_1}(\alpha)v^{\mu_1}+\psi_0(\alpha)v^{\mu_1+\mu_2}=0$$

*ist.**)

---

*) Es ist wesentlich zu bemerken, dass ohne die obige Voraussetzung der für $x=\alpha$ verschwindenden Coefficienten der y-Potenzen sich, wenn $\frac{\varrho_1}{\mu_1}>\frac{\varrho_2}{\mu_2}$ ist, unabhängig von der Beschaffenheit des Bruches $\frac{\varrho_2}{\mu_2}$,

falls $\frac{\varrho_1}{\mu_1}$ irreductibel ist, die Gleichung

$$\varphi_0(\alpha)+\varphi_{1\mu_1}(\alpha)v^{\mu_1}=0,$$

und falls $\frac{\varrho_1}{\mu_1}$ reductibel, die Gleichung

In Betreff der Gleichungen (26.)—(33.) werde ebenso bemerkt, dass (26.) mit (28.), (30.) mit (32.) und diese unter einander zusammenfallen, wenn

$$(a_1.) \qquad \varphi_{2q_2}(\alpha) = \varphi_{22q_2}(\alpha) = \cdots = \varphi_{2(d_2-1)q_2}(\alpha) = 0,$$

dass ferner (27.) mit (29.) und (31.) mit (33.) zusammenfällt, wenn

$$(b_1.) \qquad \varphi_{1q_1}(\alpha) = \varphi_{12q_1}(\alpha) = \cdots = \varphi_{1(d_1-1)q_1}(\alpha) = 0,$$

und diese wieder unter einander zusammenfallen, wenn die Gleichungen $(a_1.)$ und $(b_1.)$ zu gleicher Zeit erfüllt sind, und wir sehen demnach, dass mit Beibehaltung der obigen Bezeichnungen,

wenn die Coefficienten der Potenzen von

$$y^{q_1}, y^{2q_1}, \ldots, y^{(d_1-1)q_1}, y^{\mu_1+q_2}, y^{\mu_1+2q_2}, \ldots, y^{\mu_1+(d_2-1)q_2}$$

in der Gleichung (13.) *für* $x = \alpha$ ***verschwinden — also jedenfalls wieder, wenn*** $\frac{\varrho_1}{\mu_1}$ ***und*** $\frac{\varrho_2}{\mu_2}$ ***irreductible Brüche sind — die Bestimmungsgleichung für*** w,

$$\text{wenn } \frac{\varrho_1}{\mu_1} > \frac{\varrho_2}{\mu_2}, \quad \varphi_{1\mu_1}(\alpha)w^{\mu_1} + \psi_0(\alpha)w^{\mu_1+\mu_2} = 0,$$

$$\text{wenn } \frac{\varrho_1}{\mu_1} = \frac{\varrho_2}{\mu_2}, \quad \varphi_0(\alpha) + \varphi_{1\mu_1}(\alpha)w^{\mu_1} + \psi_0(\alpha)w^{\mu_1+\mu_2} = 0$$

*ist.**)

$$\varphi_0(\alpha) + \varphi_{1q_1}(\alpha)v^{q_1} + \varphi_{12q_1}(\alpha)v^{2q_1} + \cdots + \varphi_{1\mu_1}(\alpha)v^{\mu_1} = 0$$

ergiebt. Ist jedoch $\frac{\varrho_1}{\mu_1} = \frac{\varrho_2}{\mu_2}$, so wird, wenn

$$\varphi_{2q_2}(\alpha) = \varphi_{22q_2}(\alpha) = \cdots = \varphi_{2(d_2-1)q_2}(\alpha) = 0$$

ist, wieder unabhängig von der Beschaffenheit des Bruches $\frac{\varrho_2}{\mu_2}$,

falls $\frac{\varrho_1}{\mu_1}$ irreductibel, die Gleichung

$$\varphi_0(\alpha) + \varphi_{1\mu_1}(\alpha)v^{\mu_1} + \psi_0(\alpha)v^{2\mu_1} = 0,$$

und falls $\frac{\varrho_1}{\mu_1}$ reductibel, die Gleichung

$$\varphi_0(\alpha) + \varphi_{1q_1}(\alpha)v^{q_1} + \varphi_{12q_1}(\alpha)v^{2q_1} + \cdots + \varphi_{1\mu_1}(\alpha)v^{\mu_1} + \psi_0(\alpha)v^{\mu_1+\mu_2} = 0$$

lauten.

*) Es mag auch hier wieder bemerkt werden, dass ohne Voraussetzung der für $x = \alpha$ verschwindenden Coefficienten der y-Potenzen, wenn $\frac{\varrho_1}{\mu_1} > \frac{\varrho_2}{\mu_2}$ ist, unabhängig von der Beschaffenheit des Bruches $\frac{\varrho_1}{\mu_1}$,

falls $\frac{\varrho_2}{\mu_2}$ irreductibel ist, sich die Gleichung

$$\varphi_{1\mu_1}(\alpha)w^{\mu_1} + \psi_0(\alpha)w^{\mu_1+\mu_2} = 0,$$

und falls $\frac{\varrho_2}{\mu_2}$ reductibel, die Gleichung

Fassen wir die beiden Fälle zusammen, so ergiebt sich,

dass, wenn die Coefficienten der Potenzen von

$$y^{q_1}, y^{2q_1}, \ldots, y^{(d_1-1)q_1}, y^{\mu_1+q_2}, y^{\mu_1+2q_2}, \ldots, y^{\mu_1+(d_2-1)q_2}$$

in der Gleichung (13.) ***für*** $x=\alpha$ ***verschwinden — also auch, wenn*** $\frac{\varrho_1}{\mu_1}$ ***und*** $\frac{\varrho_2}{\mu_2}$ ***irreductible Brüche sind — die Bestimmungsgleichungen von*** v ***und*** w ***für*** $x=\alpha$,

$$\textit{wenn } \frac{\varrho_1}{\mu_1} > \frac{\varrho_2}{\mu_2}, \quad \varphi_0(\alpha)+\varphi_{1\mu_1}(\alpha)v^{\mu_1}=0, \quad \varphi_{1\mu_1}(\alpha)w^{\mu_1}+\psi_0(\alpha)w^{\mu_1+\mu_2}=0,$$

$$\textit{wenn } \frac{\varrho_1}{\mu_1} = \frac{\varrho_2}{\mu_2}, \quad \varphi_0(\alpha)+\varphi_{1\mu_1}(\alpha)v^{\mu_1}+\psi_0(\alpha)v^{\mu_1+\mu_2}=0,$$

$$\varphi_0(\alpha)+\varphi_{1\mu_1}(\alpha)w^{\mu_1}+\psi_0(\alpha)w^{\mu_1+\mu_2}=0$$

lauten, worin der oben für die Gleichung (13.) ***gemachten Voraussetzung gemäss*** $\varphi_0(\alpha), \varphi_{1\mu_1}(\alpha), \psi_0(\alpha)$ ***von Null verschieden sind.***

Da nun unter der gemachten Annahme für $\frac{\varrho_1}{\mu_1} > \frac{\varrho_2}{\mu_2}$ die Gleichung

$$\varphi_0(\alpha)+\varphi_{1\mu_1}(\alpha)v^{\mu_1}=0$$

μ_1 verschiedene Lösungen hat, so werden sich die dazu gehörigen μ_1 Lösungen der Gleichung (16.) um $t=0$ herum nach der *Taylor*schen Reihe entwickeln lassen, und daher, wenn die Wurzeln der obigen Gleichung mit

$$A, \varepsilon A, \varepsilon^2 A, \ldots, \varepsilon^{\mu_1-1}A$$

bezeichnet werden, worin ε eine μ_1-te primitive Einheitswurzel bedeutet, vermöge der Substitutionen (15.) sich um $x=\alpha$ ein Cyklus von μ_1 Elementen mit den Entwickelungen

$$y = A(x-\alpha)^{\frac{\varrho_1}{\mu_1}} + A_1(x-\alpha)^{\frac{\varrho_1+1}{\mu_1}} + \cdots$$

$$\varphi_{1\mu_1}(\alpha)w^{\mu_1}+\varphi_{2q_2}(\alpha)w^{\mu_1+q_2}+\varphi_{22q_2}(\alpha)w^{\mu_1+2q_2}+\cdots+\psi_0(\alpha)w^{\mu_1+\mu_2}=0$$

ergiebt. Ist jedoch $\frac{\varrho_1}{\mu_1} = \frac{\varrho_2}{\mu_2}$, so wird, wenn

$$\varphi_{1q_1}(\alpha) = \varphi_{12q_1}(\alpha) = \cdots = \varphi_{1(d_1-1)q_1}(\alpha) = 0$$

ist, wieder unabhängig von der Beschaffenheit des Bruches $\frac{\varrho_1}{\mu_1}$,

falls $\frac{\varrho_2}{\mu_2}$ irreductibel, die Gleichung

$$\varphi_0(\alpha)+\varphi_{1\mu_1}(\alpha)w^{\mu_1}+\psi_0(\alpha)w^{\mu_1+\mu_2}=0,$$

und falls $\frac{\varrho_2}{\mu_2}$ reductibel, die Gleichung

$$\varphi_0(\alpha)+\varphi_{1\mu_1}(\alpha)w^{\mu_1}+\varphi_{2q_2}(\alpha)w^{\mu_1+q_2}+\varphi_{22q_2}(\alpha)w^{\mu_1+2q_2}+\cdots+\psi_0(\alpha)w^{\mu_1+\mu_2}=0$$

lauten.

und den durch (μ_1-1)-malige Umkreisung des Punktes α hieraus erhaltenen Functionalreihen ergeben. Die unter derselben Annahme für die $u=0$ entsprechenden Werthe von w gefundene Gleichung

$$\varphi_{1\mu_1}(\alpha)w^{\mu_1}+\psi_0(\alpha)w^{\mu_1+\mu_2}=0$$

liefert zunächst μ_1 verschwindende Werthe von w, welche, da

$$w=\frac{y}{(x-\alpha)^{\frac{\varrho_2}{\mu_2}}}$$

ist, für $x=\alpha$ den oben gefundenen Werthen $y_1, y_2, \ldots, y_{\mu_1}$ entsprechen, da $\frac{\varrho_1}{\mu_1}>\frac{\varrho_2}{\mu_2}$ vorausgesetzt wurde, und da die übrigen μ_2 Lösungen wieder verschieden und in der Form sich ergeben

$$B, \eta B, \eta^2 B, \ldots, \eta^{\mu_2-1}B,$$

worin η eine primitive μ_2-te Einheitswurzel ist, so werden die weiteren $\mu_2 y$-Werthe um $x=\alpha$ einen Cyclus von μ_2 Elementen bilden mit den Entwickelungen

$$y=B(x-\alpha)^{\frac{\varrho_2}{\mu_2}}+B_1(x-\alpha)^{\frac{\varrho_2+1}{\mu_2}}+\cdots$$

und den hieraus durch μ_2-1-malige Umkreisung des Punktes α erhaltenen Functionalreihen.

Ist jedoch $\frac{\varrho_1}{\mu_1}=\frac{\varrho_2}{\mu_2}$, so sind die μ_1 v-Werthe und die μ_2 w-Werthe nach dem Obigen die Lösungen der gemeinsamen Gleichung

$$\varphi_0(\alpha)+\varphi_{1\mu_1}(\alpha)z^{\mu_1}+\psi_0(\alpha)z^{\mu_1+\mu_2}=0,$$

deren drei Coefficienten der Voraussetzung nach von Null verschieden sind, oder unter der Annahme der Irreductibilität der beiden Brüche die Lösungen der Gleichung

$$\varphi_0(\alpha)+\varphi_{1\mu_1}(\alpha)z^{\mu_1}+\psi_0(\alpha)z^{2\mu_1}=0.$$

Sind nun die Lösungen dieser Gleichungen sämmtlich verschieden, also auch, wenn mit Benutzung der früheren Bezeichnungen

$$\varrho_1=d_1p_1,\quad \mu_1=d_1q_1,\quad \varrho_2=d_2p_2,\quad \mu_2=d_2q_2,\ \text{also}\ p_1=p_2,\ q_1=q_2$$

gesetzt wird, die Lösungen der Gleichung

$$\varphi_0(\alpha)+\varphi_{1\mu_1}(\alpha)z^{d_1q_1}+\psi_0(\alpha)z^{(d_1+d_2)q_1}=0$$

oder für $z^{q_1}=\xi$ der Gleichung

$$\varphi_0(\alpha)+\varphi_{1\mu_1}(\alpha)\xi^{d_1}+\psi_0(\alpha)\xi^{d_1+d_2}=0,$$

und der andern entsprechend auch die der Gleichung

$$\varphi_0(\alpha)+\varphi_{1\mu_1}(\alpha)\xi+\psi_0(\alpha)\xi^2=0$$

sämmtlich verschieden, so folgen d_1+d_2 resp. zwei Cyklen von je q_1 resp. μ_1 Elementen; enthalten jedoch jene Gleichungen gleiche Lösungen, so können sich — und dies ist nach bekannten Methoden festzustellen — Cyklen von $q_1, 2q_1, 3q_1, \ldots$ Elementen resp. ein Cyklus von $2\mu_1$ Elementen ergeben.

Fassen wir die oben gefundenen Resultate zusammen, so ergiebt sich zunächst der folgende Satz:

Hat eine algebraische Gleichung die Form

$$(x-\alpha)^{\delta}\varphi_0+(x-\alpha)^{\delta_1^{(1)}}\varphi_{11}y+(x-\alpha)^{\delta_2^{(1)}}\varphi_{12}y^2+\cdots+(x-\alpha)^{\delta_{\mu_1}^{(1)}}\varphi_{1\mu_1}y^{\mu_1}$$
$$+(x-\alpha)^{\delta_1^{(2)}}\varphi_{21}y^{\mu_1+1}+(x-\alpha)^{\delta_2^{(2)}}\varphi_{22}y^{\mu_1+2}+\cdots+(x-\alpha)^{\delta_{\mu_2-1}^{(2)}}\varphi_{2\mu_2-1}y^{\mu_1+\mu_2-1}$$
$$+\psi_0y^{\nu}+\psi_1y^{\nu+1}+\cdots+\psi_{n-\nu-1}y^{n-1}+y^n=0,$$

in welcher für $x=\alpha$ $y=0$ eine ν-fache Lösung ist, ferner

$$\mu_1+\mu_2=\nu, \qquad \delta=\varrho_1+\varrho_2,$$

$$\delta_{\gamma_1}^{(1)}=e\Big((\mu_1-\gamma_1)\frac{\varrho_1}{\mu_1}+\varrho_2\Big) \text{ oder } =e\Big((\mu_1-\gamma_1)\frac{\varrho_1}{\mu_1}+\varrho_2\Big)+1,$$

$$\delta_{\gamma_2}^{(2)}=e\Big((\mu_2-\gamma_2)\frac{\varrho_2}{\mu_2}\Big) \text{ oder } =e\Big((\mu_2-\gamma_2)\frac{\varrho_2}{\mu_2}\Big)+1$$

ist, je nachdem das Argument der e-Function eine ganze Zahl ist oder nicht, $\frac{\varrho_1}{\mu_1}\gtrless\frac{\varrho_2}{\mu_2}$, und $\varphi_0(\alpha)$, $\varphi_{1\mu_1}(\alpha)$, $\psi_0(\alpha)$ von Null verschieden ist, so ist diese Form nicht nur nothwendig dafür, dass die in $x=\alpha$ verschwindenden ν Functionszweige sich zu zwei Cyklen von μ_1 und μ_2 Elementen gruppiren, und die Entwickelungen in der Umgebung von $x=\alpha$ die Anfangsglieder

$$(x-\alpha)^{\frac{\varrho_1}{\mu_1}} \text{ und } (x-\alpha)^{\frac{\varrho_2}{\mu_2}}$$

besitzen, worin die Brüche $\frac{\varrho_1}{\mu_1}$ und $\frac{\varrho_2}{\mu_2}$ irreductibel oder reductibel sein dürfen, sondern es werden auch umgekehrt für jede solche Gleichung, wenn entweder $\frac{\varrho_1}{\mu_1}$ und $\frac{\varrho_2}{\mu_2}$ irreductible Brüche sind, oder wenn sie reductibel sind und d_1 der grösste gemeinschaftliche Theiler von ϱ_1 und μ_1, also $\varrho_1=d_1p_1$, $\mu_1=d_1q_1$, und d_2 der grösste gemeinschaftliche Theiler von ϱ_2 und μ_2, also $\varrho_2=d_2p_2$, $\mu_2=d_2q_2$, ferner die für $x=\alpha$ genommenen Werthe der Coefficienten von

$$y^{q_1}, y^{2q_1}, \ldots, y^{(d_1-1)q_1}, y^{\mu_1+q_2}, y^{\mu_1+2q_2}, \ldots, y^{\mu_1+(d_2-1)q_2},$$

also

$$\varphi_{1q_1}(\alpha),\ \varphi_{12q_1}(\alpha),\ \ldots,\ \varphi_{1(d_1-1)q_1}(\alpha),\ \varphi_{2q_2}(\alpha),\ \varphi_{22q_2}(\alpha),\ \ldots,\ \varphi_{2(d_2-1)q_2}(\alpha)$$

verschwinden,

1. *wenn* $\frac{\varrho_1}{\mu_1} > \frac{\varrho_2}{\mu_2}$ *ist, sich die Lösungen derselben um* $x=\alpha$ *herum zu zwei Cyklen von* μ_1 *und* μ_2 *Blättern gruppiren und die Entwickelungen der Functionalwerthe mit* $(x-\alpha)^{\frac{\varrho_1}{\mu_1}}$ *und* $(x-\alpha)^{\frac{\varrho_2}{\mu_2}}$ *beginnen, während*

2. *wenn* $\frac{\varrho_1}{\mu_1} = \frac{\varrho_2}{\mu_2}$ *ist — was, falls beide Brüche irreductibel sind,* $\varrho_1=\varrho_2$, $\mu_1=\mu_2$ *nach sich zieht — die Verschiedenheit sämmtlicher Lösungen der Gleichung*

$$\varphi_0(\alpha)+\varphi_{1\mu_1}(\alpha)z^{\mu_1}+\psi_0(\alpha)z^{\mu_1+\mu_2}=0$$

um $x=\alpha$ *herum* d_1+d_2 *Cyklen von je* q_1 *Elementen (da* $q_1=q_2$ *ist), und, für den Fall der Irreductibilität beider Brüche, die Verschiedenheit der Lösungen der Gleichung*

$$\varphi_0(\alpha)+\varphi_{1\mu_1}(\alpha)z^{\mu_1}+\psi_0(\alpha)z^{2\mu_1}=0$$

zwei Cyklen von je μ_1 *Elementen nach sich zieht, für welche die Entwickelungen in der Umgebung von* $x=\alpha$ *das Anfangsglied*

$$(x-\alpha)^{\frac{\varrho_1}{\mu_1}}$$

besitzen.

Man sieht nun unmittelbar, dass, nachdem oben *für eine beliebige Anzahl von Cyklen mit Anfangsgliedern ihrer Entwickelungen, die gar keiner Beschränkung unterworfen waren,* die *nothwendige* Form (11.) der algebraischen Gleichung festgestellt war, sich nunmehr auf Grund analoger Schlüsse der folgende Satz aussprechen lässt:

Die nothwendige Bedingung dafür, dass eine algebraische Function n-ten Grades, die wir ohne Einschränkung für endliche Werthe der unabhängigen Variabeln als endlich annehmen dürfen, für einen Nullwerth α *des letzten Coefficienten* ν *verschwindende Lösungen besitzt, die sich zu k Cyklen von je* $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$ *Elementen gruppiren und deren Entwickelungen die Anfangsglieder*

$$(x-\alpha)^{\frac{\varrho_1}{\mu_1}},\ (x-\alpha)^{\frac{\varrho_2}{\mu_2}},\ \ldots,\ (x-\alpha)^{\frac{\varrho_k}{\mu_k}}$$

besitzen, worin

$$\frac{\varrho_1}{\mu_1} > \frac{\varrho_2}{\mu_2} > \cdots > \frac{\varrho_k}{\mu_k},$$

ist die, dass die sie definirende algebraische Gleichung die Form habe

$$(x-\alpha)^{\delta}\varphi_0+(x-\alpha)^{\delta_1^{(1)}}\varphi_{11}y+(x-\alpha)^{\delta_2^{(1)}}\varphi_{12}y^2+\cdots+(x-\alpha)^{\delta_{\mu_1}^{(1)}}\varphi_{1\mu_1}y^{\mu_1}$$
$$+(x-\alpha)^{\delta_1^{(2)}}\varphi_{21}y^{\mu_1+1}+(x-\alpha)^{\delta_2^{(2)}}\varphi_{22}y^{\mu_1+2}+\cdots+(x-\alpha)^{\delta_{\mu_2}^{(2)}}\varphi_{2\mu_2}y^{\mu_1+\mu_2}$$
$$+\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$
$$+(x-\alpha)^{\delta_1^{(k)}}\varphi_{k1}y^{\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_{k-1}+1}+\cdots+(x-\alpha)^{\delta_{\mu_k-1}^{(k)}}\varphi_{k\mu_k-1}y^{\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_k-1}$$
$$+\psi_0y^{\nu}+\psi_1y^{\nu+1}+\cdots+\psi_{n-\nu-1}y^{n-1}+y^n=0,$$

worin die φ- und ψ-Functionen ganze Functionen von x sind, für welche

$$\varphi_0(\alpha),\ \varphi_{1\mu_1}(\alpha),\ \varphi_{2\mu_2}(\alpha),\ \ldots,\ \varphi_{k-1\mu_{k-1}}(\alpha),\ \psi_0(\alpha)$$

von Null verschieden sind,

$$\nu=\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_k,\qquad \delta=\varrho_1+\varrho_2+\cdots+\varrho_k,$$

$$\delta_{\gamma_\lambda}^{(\lambda)}=e\Big((\mu_\lambda-\gamma_\lambda)\frac{\varrho_\lambda}{\mu_\lambda}+\varrho_{\lambda+1}+\cdots+\varrho_k\Big)\ \text{oder}\ =e\Big((\mu_\lambda-\gamma_\lambda)\frac{\varrho_\lambda}{\mu_\lambda}+\varrho_{\lambda+1}+\cdots+\varrho_k\Big)+1,$$
$$(\lambda=1,2,\ldots,k)$$

je nachdem das Argument der e-Function eine ganze Zahl ist oder nicht; aber es werden auch umgekehrt, wenn d_ε der grösste gemeinschaftliche Theiler von ϱ_ε und μ_ε ist,

$$\varrho_\varepsilon=d_\varepsilon p_\varepsilon,\qquad \mu_\varepsilon=d_\varepsilon q_\varepsilon$$

gesetzt wird und die Grössen

$$\varphi_{1q_1}(\alpha),\ \varphi_{12q_1}(\alpha),\ \ldots,\ \varphi_{1(d_1-1)q_1}(\alpha),\ \varphi_{2q_2}(\alpha),$$
$$\varphi_{22q_2}(\alpha),\ \ldots,\ \varphi_{2(d_2-1)q_2}(\alpha),\ \ldots,\ \varphi_{kq_k}(\alpha),\ \varphi_{k2q_k}(\alpha),\ \ldots,\ \varphi_{k(d_k-1)q_k}$$

sämmtlich verschwinden — eine Bedingung, die, wenn die Brüche $\frac{\varrho_1}{\mu_1},\frac{\varrho_2}{\mu_2},\ldots,\frac{\varrho_k}{\mu_k}$ sämmtlich irreductibel sind, als erfüllt betrachtet werden darf — die Lösungen dieser algebraischen Gleichung die bezeichneten Entwickelungen besitzen.

Sind jedoch die Brüche $\frac{\varrho_1}{\mu_1},\frac{\varrho_2}{\mu_2},\ldots,\frac{\varrho_k}{\mu_k}$ nicht sämmtlich unter einander verschieden, sondern der Grösse nach geordnet

$$\frac{\varrho_1}{\mu_1}>\frac{\varrho_2}{\mu_2}>\cdots>\frac{\varrho_{a_1+1}}{\mu_{a_1+1}}=\frac{\varrho_{a_1+2}}{\mu_{a_1+2}}=\cdots=\frac{\varrho_{a_1+b_1+1}}{\mu_{a_1+b_1+1}}>\frac{\varrho_{a_1+b_1+2}}{\mu_{a_1+b_1+2}}>\cdots>\frac{\varrho_{a_2+1}}{\mu_{a_2+1}}=\frac{\varrho_{a_2+2}}{\mu_{a_2+2}}=\cdots$$
$$\cdots=\frac{\varrho_{a_2+b_2+1}}{\mu_{a_2+b_2+1}}>\frac{\varrho_{a_2+b_2+2}}{\mu_{a_2+b_2+2}}>\cdots>\frac{\varrho_{a_\delta+1}}{\mu_{a_\delta+1}}=\frac{\varrho_{a_\delta+2}}{\mu_{a_\delta+2}}=\cdots$$
$$\cdots=\frac{\varrho_{a_\delta+b_\delta+1}}{\mu_{a_\delta+b_\delta+1}}>\frac{\varrho_{a_\delta+b_\delta+2}}{\mu_{a_\delta+b_\delta+2}}>\cdots\frac{\varrho_k}{\mu_k},$$

und sind die Lösungen der Gleichungen

$$\varphi_{a_1\mu_{a_1}}(\alpha)+\varphi_{a_1+1\mu_{a_1+1}}(\alpha)z^{\mu_{a_1+1}}+\varphi_{a_1+2\mu_{a_1+2}}(\alpha)z^{\mu_{a_1+1}+\mu_{a_1+2}}+\cdots$$
$$\cdots\varphi_{a_1+b_1+1\mu_{a_1+b_1+1}}(\alpha)z^{\mu_{a_1+1}+\mu_{a_1+2}+\cdots+\mu_{a_1+b_1+1}}=0$$

$$\varphi_{a_2\mu_{a_2}}(\alpha)+\varphi_{a_2+1\mu_{a_2+1}}(\alpha)z^{\mu_{a_2+1}}+\varphi_{a_2+2\mu_{a_2+2}}(\alpha)z^{\mu_{a_2+1}+\mu_{a_2+2}}+\cdots$$
$$\cdots+\varphi_{a_2+b_2+1\mu_{a_2+b_2+1}}(\alpha)z^{\mu_{a_2+1}+\mu_{a_2+2}+\cdots+\mu_{a_2+b_2+1}}=0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\varphi_{a_\delta\mu_{a_\delta}}(\alpha)+\varphi_{a_\delta\mu_{a_\delta+1}}(\alpha)z^{\mu_{a_\delta+1}}+\varphi_{a_\delta+2\mu_{a_\delta+2}}(\alpha)z^{\mu_{a_\delta+1}+\mu_{a_\delta+2}}+\cdots$$
$$\cdots+\varphi_{a_\delta+b_\delta+1\mu_{a_\delta+b_\delta+1}}(\alpha)z^{\mu_{a_\delta+1}+\mu_{a_\delta+2}+\cdots+\mu_{a_\delta+b_\delta+1}}=0,$$

sämmtlich verschieden, so erhält man für die ν Zweige der algebraischen Function in der Umgebung von $x=\alpha$ je einen Cyklus von $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_{a_1}$ Elementen, $d_{a_1+1}+d_{a_1+2}+\cdots+d_{a_1+b_1+1}$ Cyklen von je q_{a_1+1} Elementen, je einen Cyklus von $\mu_{a_1+b_1+2}, \mu_{a_1+b_1+3}, \ldots, \mu_{a_2}$ Elementen, $d_{a_2+1}+d_{a_2+2}+\cdots+d_{a_2+b_2+1}$ Cyklen von je q_{a_2+1} Elementen, u. s. w. endlich je einen Cyklus von $\mu_{a_\delta+b_\delta+2}, \mu_{a_\delta+b_\delta+3}, \ldots, \mu_k$ Elementen, deren Entwickelungen in der Umgebung von α die vorgeschriebenen Anfangsglieder besitzen.

Für den Fall, dass die Brüche $\frac{\varrho_1}{\mu_1}, \ldots, \frac{\varrho_k}{\mu_k}$ sämmtlich irreductibel sind, werden die d gleich der Einheit, die q den resp. μ gleichzusetzen sein.

Es wird sich nun ohne Schwierigkeit aus dem oben bewiesenen Satze ***die Form aller algebraischen Gleichungen aufstellen lassen, welche nothwendig und hinreichend ist dafür, dass dieselbe in den Lösungen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\sigma$ des letzten Coefficienten der Gleichung resp. $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_\sigma$ zusammenfallende verschwindende Werthe annimmt, welche sich im Punkte α_τ zu k_τ Cyklen von $\mu_{\tau 1}, \mu_{\tau 2}, \ldots, \mu_{\tau x_\tau}$ Elementen gruppiren, für welche die Anfangsglieder der Entwickelung durch***

$$(x-\alpha_\tau)^{\frac{\varrho_{\tau 1}}{\mu_{\tau 1}}}, (x-\alpha_\tau)^{\frac{\varrho_{\tau 2}}{\mu_{\tau 2}}}, \ldots, (x-\alpha_\tau)^{\frac{\varrho_{\tau k_\tau}}{\mu_{\tau k_\tau}}}$$

dargestellt sein sollen, worin

$$\frac{\varrho_{\tau 1}}{\mu_{\tau 1}}>\frac{\varrho_{\tau 2}}{\mu_{\tau 2}}>\cdots>\frac{\varrho_{\tau k_\tau}}{\mu_{\tau k_\tau}}$$

ist und diese Brüche sämmtlich irreductibel sind.

So wird z. B. die nothwendige und hinreichende Form einer algebraischen Gleichung 5-ten Grades, welche im Punkte α 5 verschwindende Werthe haben soll, die einen Cyklus von je 2 nnd 3 Elementen mit den Anfangsgliedern

$$(x-\alpha)^{\frac{1}{2}} \text{ und } (x-\alpha)^{\frac{2}{3}}$$

haben, und ferner im Punkte β 4 verschwindende Werthe, welche einen Cyklus von 4 Elementen mit dem Anfangsgliede

$$(x-\beta)^{\frac{3}{4}}$$

besitzen, durch

$$(x-\alpha)^3(x-\beta)^3\varphi_0+(x-\alpha)^3(x-\beta)^3\varphi_{11}y+(x-\alpha)^2(x-\beta)^2\varphi_{12}y^2 \\ +(x-\alpha)(x-\beta)\varphi_{13}y^3+(x-\alpha)\varphi_{21}y^4+y^5=0$$

dargestellt sein, worin $\varphi_0(\alpha)$, $\varphi_0(\beta)$, $\varphi_{13}(\alpha)$, $\varphi_{21}(\beta)$ von Null verschieden sind.

Nachdem aber unter den angegebenen Bedingungen die nothwendigen und hinreichenden algebraischen Gleichungsformen für Functionen mit gegebener Verzweigung aufgestellt worden, wird es leicht sein, viel allgemeinere Irreductibilitätskriterien, als die in der oben bezeichneten Arbeit von mir angegebenen, für algebraische Gleichungen mit rationalzahligen Coefficienten herzuleiten, indem man nach dem dort angegebenen Princip nur solche Verzweigungen für die algebraische Function zu wählen braucht, welche ein Durchlaufen aller Blätter der zugehörigen *Riemann*schen Fläche gestatten, ohne durch einen Verzweigungspunkt zu gehen, und in der so erhaltenen algebraischen Functionalgleichung nur die rationalen Functionen durch rationale Zahlen, die zu den Verzweigungspunkten gehörigen linearen Theiler durch Primzahlen ersetzt, und der Bedingung des Nichtverschwindens einzelner Coefficienten für die Verzweigungspunkte die Nichttheilbarkeit der ganzzahligen Coefficienten durch die Primzahlen substituirt.

So wird z. B. eine algebraische Function n-ten Grades, welche in dem Verzweigungspunkte α n verschwindende Functionalwerthe besitzt, welche sich zu zwei Cyklen von je μ_1 und μ_2 Elementen mit den Anfangsgliedern

$$(x-\alpha)^{\frac{\varrho_1}{\mu_1}} \text{ und } (x-\alpha)^{\frac{\varrho_2}{\mu_2}}$$

gruppiren, worin $\mu_1+\mu_2=n$, $\frac{\varrho_1}{\mu_1}>\frac{\varrho_2}{\mu_2}$ und beide Brüche irreductibel sind, ferner einen Verzweigungspunkt β, in welchem ν verschwindende Functionalwerthe, worin ν der bequemeren Schreibweise wegen grösser als μ_1 und zwar gleich $\mu_1+\varkappa$ gesetzt werden soll, eine einzige Gruppe mit dem Anfangsglied

$$(x-\beta)^{\frac{\sigma}{\nu}}$$

bilden, worin $\frac{\sigma}{\nu}$ wiederum irreductibel sein soll, durch die in ihrer Form

nothwendige und hinreichende algebraische Functionalgleichung

$$(x-\alpha)^{\varrho_1+\varrho_2}(x-\beta)^{\sigma}\varphi_0+(x-\alpha)^{\delta_1^{(1)}}(x-\beta)^{\varepsilon_1}\varphi_{11}y+(x-\alpha)^{\delta_2^{(1)}}(x-\beta)^{\varepsilon_2}\varphi_{12}y^2+\cdots+(x-\alpha)^{\delta_{\mu_1}^{(1)}}(x-\beta)^{\varepsilon_{\mu_1}}\varphi_{1\mu_1}y^{\mu_1}$$
$$+(x-\alpha)^{\delta_1^{(2)}}(x-\beta)^{\varepsilon_{\mu_1}+1}\varphi_{21}y^{\mu_1+1}+(x-\alpha)^{\delta_2^{(2)}}(x-\beta)^{\varepsilon_{\mu_1}+2}\varphi_{22}y^{\mu_1+2}+\cdots+(x-\alpha)^{\delta_{\varkappa-1}^{(2)}}(x-\beta)^{\varepsilon_{\nu-1}}\varphi_{2\varkappa-1}y^{\nu-1}$$
$$+(x-\alpha)^{\delta_{\varkappa}^{(2)}}\varphi_{2\varkappa}y^{\nu}+\cdots+(x-\alpha)^{\delta_{\mu_2-1}^{(2)}}\varphi_{2\mu_2-1}y^{n-1}+y^n=0$$

definirt sein, in welcher

$$\varphi_0(\alpha),\quad \varphi_0(\beta),\quad \varphi_{1\mu_1}(\alpha),\quad \varphi_{2\varkappa}(\beta)$$

von Null verschieden, und die δ und ε durch die Ausdrücke gegeben sind

$$(\omega)\quad\begin{cases}\delta_{\gamma_1}^{(1)}=e\left((\mu_1-\gamma_1)\dfrac{\varrho_1}{\mu_1}+\varrho_2\right)\text{ oder }=e\left((\mu_1-\gamma_1)\dfrac{\varrho_1}{\mu_1}+\varrho_2\right)+1,\\ \delta_{\gamma_2}^{(2)}=e\left((\mu_2-\gamma_2)\dfrac{\varrho_2}{\mu_2}\right)\quad\text{oder }=e\left((\mu_2-\gamma_2)\dfrac{\varrho_2}{\mu_2}\right)+1,\\ \varepsilon_\gamma=e\left((\nu-\gamma)\dfrac{\sigma}{\nu}\right)\quad\text{oder }=e\left((\nu-\gamma)\dfrac{\sigma}{\nu}\right)+1,\end{cases}$$

je nachdem das Argument der e-Function eine ganze Zahl ist oder nicht. Da man nun unter der Annahme, dass ν nicht nur grösser als μ_1, sondern auch grösser als μ_2 ist, wegen $\mu_1+\mu_2=n$ durch geschlossene Umläufe, ohne durch Verzweigungspunkte zu gehen, in alle Blätter der zugehörigen n-blättrigen *Riemann*schen Fläche gelangen kann, so wird die oben aufgestellte algebraische Gleichung irreductibel sein, und es wird sich somit durch die angegebene Uebertragung der folgende Satz ergeben:

Jede algebraische Gleichung von der Form

$$p^{\varrho_1+\varrho_2}q^{\sigma}a_0+p^{\delta_1^{(1)}}q^{\varepsilon_1}a_1x+p^{\delta_2^{(1)}}q^{\varepsilon_2}a_2x^2+\cdots+p^{\delta_{\mu_1}^{(1)}}q^{\varepsilon_{\mu_1}}a_{\mu_1}x^{\mu_1}$$
$$+p^{\delta_1^{(2)}}q^{\varepsilon_{\mu_1}+1}a_{\mu_1+1}x^{\mu_1+1}+p^{\delta_2^{(2)}}q^{\varepsilon_{\mu_1}+2}a_{\mu_1+2}x^{\mu_1+2}+\cdots+p^{\delta_{\varkappa-1}^{(2)}}q^{\varepsilon_{\nu-1}}a_{\nu-1}x^{\nu-1}$$
$$+p^{\delta_{\varkappa}^{(2)}}a_\nu x^\nu+\cdots+p^{\delta_{\mu_2-1}^{(2)}}a_{n-1}x^{n-1}+x^n=0,$$

in welcher p und q zwei beliebige Primzahlen, die Grössen δ und ε durch die Ausdrücke (ω) bestimmt sind, in welchen $\mu_1+\mu_2=n$, $\nu=\mu_1+\varkappa$ grösser als μ_1 und μ_2 sein soll, $\frac{\varrho_1}{\mu_1}>\frac{\varrho_2}{\mu_2}$, die Brüche $\frac{\varrho_1}{\mu_1}$, $\frac{\varrho_2}{\mu_2}$ und $\frac{\sigma}{\nu}$ irreductibel, und die Coefficienten a_0 weder durch p noch durch q, a_{μ_1} nicht durch p, a_ν nicht durch q theilbar sind, ist mit Adjungirung nur rationaler Zahlen irreductibel.

Es wird also z. B. für $n=5$, $\mu_1=3$, $\mu_2=2$, $\nu=4$, $\varrho_1=2$, $\varrho_2=1$, $\sigma=3$ die Gleichung

$$x^5+pa_4x^4+pqa_3x^3+p^2q^2a_2x^2+p^3q^3a_1x+p^3q^3a_0=0,$$

in welcher a_0 weder durch p noch durch q, a_3 nicht durch p, a_4 nicht durch q theilbar ist, irreductibel sein. Um dies direct in diesem Falle nachzuweisen, werde zunächst die Zerlegung in

$$(x-\alpha)(x^4+Ax^3+Bx^2+Cx+D)$$

angenommen, welche verlangt, dass

$$A-\alpha=pa_4,\ B-\alpha A=pqa_3,\ C-\alpha B=p^2q^2a_2,\ D-\alpha C=p^3q^3a_1,\ -\alpha D=p^3q^3a_0$$

sei, und es müsste, da die Lösung α, wie aus der Gleichung unmittelbar zu ersehen, weder durch p noch durch q theilbar sein kann, D also auch C durch p^3 und B also auch A durch p theilbar sein, was, da α es nicht ist, unmöglich. Sei ferner die Zerlegung in einen Factor zweiten und dritten Grades möglich, das Polynom also

$$(x^2+\alpha x+\beta)(x^3+\gamma x^2+\delta x+\varepsilon),$$

so müsste

$$\alpha+\gamma=pa_4,\quad \beta+\alpha\gamma+\delta=pqa_3,\quad \beta\gamma+\alpha\delta+\varepsilon=p^2q^2a_2,$$
$$\beta\delta+\alpha\varepsilon=p^3q^3a_1,\quad \beta\varepsilon=p^3q^3a_0$$

sein. Ist β durch q^3, also ε durch q nicht theilbar, so muss α durch q^3 theilbar sein, und dies widerspricht der dritten Gleichung; ist β durch q^2, ε durch q theilbar, so ist α, also auch δ durch q theilbar, also müsste ε nach der dritten Gleichung gegen die Annahme durch q^2 theilbar sein; ist endlich β durch q, also ε durch q^2 theilbar, so ist auch δ durch q theilbar, und somit nach der zweiten Gleichung auch $\alpha\gamma$, welches für die Annahme, dass α durch q theilbar ist, δ durch q^2 also γ durch q theilbar machte, was der ersten Gleichung widerspricht, während, wenn γ durch q theilbar ist und α es nicht sein soll, nach der dritten Gleichung δ durch q^2 theilbar wäre, was wieder nach der vierten Gleichung nicht angeht. Enthält aber β q garnicht, ist also ε durch q^3 theilbar, so enthält auch δ q^3, also γ den Factor q^2, was wieder der zweiten Gleichung widersprechen würde — es ist somit die oben aufgestellte Gleichung fünften Grades in der That irreductibel.

Es mögen an die früheren Sätze noch einige Folgerungen geknüpft werden. Sei die algebraische Functionalgleichung gegeben

$$y^m+(x-\alpha)F_1(x)y^{m-1}+(x-\alpha)F_2(x)y^{m-2}+\cdots+(x-\alpha)F_{m-1}(x)y+(x-\alpha)^\varkappa F_m(x)=0,$$

in welcher alle Glieder mit Ausnahme des ersten den Factor $x-\alpha$ besitzen, $\varkappa>1$ und $F_m(\alpha)$ von Null verschieden ist, sei ferner dieselbe durch eine andere Gleichung von der Form

$$y^\mu+(x-\alpha)f_1(x)y^{\mu-1}+(x-\alpha)f_2(x)y^{\mu-2}+\cdots+(x-\alpha)f_{\mu-1}(x)y+(x-\alpha)^{\varkappa-1}f_\mu(x)=0,$$

in welcher $f_\mu(\alpha)$ von Null verschieden ist, theilbar, so ist ersichtlich, dass der Quotient gleich Null gesetzt die Form hat

$$y^{m-\mu}+(x-\alpha)\varphi_1(x)y^{m-\mu-1}+(x-\alpha)\varphi_2(x)y^{m-\mu-2}+\cdots$$
$$\cdots+(x-\alpha)\varphi_{m-\mu-1}(x)y+(x-\alpha)\varphi_{m-\mu}(x)=0,$$

worin

$$F_m(x)=f_\mu(x)\cdot\varphi_{m-\mu}(x),$$

und daher $\varphi_{m-\mu}(x)$ der Annahme gemäss für $x=\alpha$ nicht verschwinden kann; da nun eine solche Gleichung nach dem von mir bewiesenen Satze irreductibel ist, so ergiebt sich,

dass wenn in einer algebraischen Functionalgleichung sämmtliche Coefficienten mit Ausnahme des ersten durch einen gemeinsamen linearen Factor theilbar sind und diese Gleichung als Factor ein ebenso beschaffenes Polynom enthält, in welchem die in seinem letzten Coefficienten enthaltene Potenz dieses Linearfactors einen um die Einheit kleineren Exponenten besitzt als im letzten Coefficienten der gegebenen Gleichung, der Quotient beider Polynome irreductibel ist.

Und dieser Satz auf algebraische Gleichungen übertragen, würde lauten:

Ist eine ganzzahlige algebraische Gleichung, deren Coefficienten mit Ausnahme des ersten durch eine Primzahl theilbar sind, durch ein ganzes Polynom, dessen Coefficienten wiederum dieselbe Primzahl als Factor enthalten, theilbar, so wird, wenn der letzte Coefficient dieses Polynoms die Primzahl nur einmal weniger enthält als der letzte Coefficient der Gleichung, der Quotient ein mit Adjungirung rationaler Zahlen irreductibles Polynom sein.

Als ganz specieller Fall folgt daraus offenbar der Satz von der Irreductibilität der zu einer Primzahlpotenz gehörigen, von den nicht primitiven Einheitswurzeln befreiten Kreistheilungsgleichung.

Es mag endlich noch ein ganz allgemeiner Satz, welcher die Irreductibilität algebraischer Functionalgleichungen betrifft, erwähnt werden, welcher den Beweis von der Irreductibilität der zu einer beliebig zusammengesetzten Zahl gehörigen und von den nicht primitiven Einheitswurzeln befreiten Kreistheilungsgleichung in sich schliesst oder den Satz, welcher bekanntlich damit zusammenfällt, dass, wenn a und b zwei ganze relativ prime Zahlen bedeuten, und die von den nicht primitiven Einheitswurzeln befreiten zugehörigen Kreistheilungspolynome $f_a(x)$ und $f_b(x)$ irreductibel sind, auch

das nur primitive Einheitswurzeln enthaltende zu dem Producte ab gehörige Kreistheilungspolynom $f_{ab}(x)$ irreductibel sein muss.

Seien zwei algebraische Functionalgleichungen m-ten und n-ten Grades

$$(34.)\quad \begin{cases} y^m+(x-\alpha)f_1(x)y^{m-1}+(x-\alpha)f_2(x)y^{m-2}+\cdots+(x-\alpha)f_{m-1}(x)y \\ \qquad\qquad +(x-\alpha)f_m(x)=0 \end{cases}$$

und

$$(35.)\quad \begin{cases} y^n+(x-\beta)\varphi_1(x)y^{n-1}+(x-\beta)\varphi_2(x)y^{n-2}+\cdots+(x-\beta)\varphi_{n-1}(x)y \\ \qquad\qquad +(x-\beta)\varphi_n(x)=0 \end{cases}$$

vorgelegt, worin α und β willkürliche Grössen, $f_1(x), f_2(x), \ldots\ \varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots$, ganze Functionen von x bedeuten, von denen $f_m(x)$ nicht durch $x-\alpha$, $\varphi_n(x)$ nicht durch $x-\beta$ theilbar sind, so sind diese Gleichungen, wie früher hervorgehoben worden, mit Adjungirung rationaler Functionen von x irreductibel, und die Entwickelung der m Lösungen der Gleichung (34.) in der Umgebung des Punktes α, welche dort einen Cyklus von m Elementen bilden, beginnt mit dem Gliede $(x-\alpha)^{\frac{1}{m}}$, die der n Lösungen der Gleichung (35.) um β herum mit $(x-\beta)^{\frac{1}{n}}$. Nimmt man nun an, dass die Gleichungen (34.) im Punkte β, (35.) im Punkte α garnicht verzweigt sind, so wird offenbar (34.) auch nicht mit Adjungirung einer Lösung η_1 der zweiten Gleichung, (35.) nicht mit Adjungirung einer der Lösungen y_1 der ersten Gleichung reductibel sein; denn besässe z. B. die erste Gleichung einen in x, y, η_1 rationalen Factor, so dass eine Gleichung von der Form

$$(36.)\qquad \omega(y, x, \eta_1)=0,$$

welche in y von niedrigerem Grade als dem m-ten ist, existirt, welche eine Lösung mit (34.) gemein hat, so würde die m-malige Umkreisung von α η_1 der Voraussetzung nach unverändert lassen, während y_1 der Reihe nach alle Lösungen der Gleichung (34.) durchläuft, und somit die Gleichung (36.) mehr Lösungen haben, als ihr Grad beträgt.

Seien nun die Lösungen der Gleichungen (34.) und (35.)

$$y_1, y_2, \ldots, y_m \quad \text{und} \quad \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n,$$

und bildet man eine neue algebraische Gleichung mn-ten Grades, deren Lösungen durch die bilineare Function der Wurzeln der Gleichungen (34.) und (35.)

$$(37.)\qquad Y_{\lambda\mu}=\psi_0(x)y_\lambda\eta_\mu+\psi_1(x)y_\lambda+\psi_2(x)\eta_\mu+\psi(x) \qquad (\lambda=1,2,\ldots m, \mu=1,2,\ldots n)$$

dargestellt sein mögen, worin $\psi_0(x)$, $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, $\psi(x)$ beliebige ganze Functionen von x bedeuten sollen, so wird, wenn die k-ten Potenzsummen dieser mit S_k, die der Gleichungen (34.) und (35.) mit s_k und σ_k bezeichnet werden, wie unmittelbar zu sehen,

$$S_k = \sum_{\substack{\varrho_1,\varrho_2,\varrho_3,\varrho_4 \\ \varrho_1+\varrho_2+\varrho_3+\varrho_4=k}} \frac{k!}{\varrho_1!\varrho_2!\varrho_3!\varrho_4!} \psi_0^{\varrho_1}\psi_1^{\varrho_2}\psi_2^{\varrho_3}\psi^{\varrho_4} s_{\varrho_1+\varrho_2}\sigma_{\varrho_1+\varrho_3}$$

sein, und sich somit die Coefficienten der Gleichung des mn-ten Grades

$$(38.)\quad Y^{mn} + F_1(x)Y^{mn-1} + F_2(x)Y^{mn-2} + \cdots + F_{mn-1}(x)Y + F_{mn}(x) = 0,$$

deren Lösungen durch (37.) dargestellt sind, als ganze Functionen von x ergeben. Bemerkt man nun, dass die Lösungen der Gleichung (34.) in $x = \alpha$ einen m-fachen Verzweigungspunkt, die der Gleichung (35.) in $x = \beta$ einen n-fachen Verzweigungspunkt besitzen, während β resp. α der Annahme zufolge nicht Verzweigungspunkte von (34.) resp. (35.) sind, so folgt aus (37.), dass die Lösungen der Gleichung (38.) sich um α herum in n Cyklen zu je m Elementen, um β herum in m Cyklen zu je n Elementen gruppiren. Gehen wir nun von einem bestimmten Werthe von Y aus, und umkreisen mit demselben den Verzweigungspunkt α m-mal, ebenso den Verzweigungspunkt β n-mal, so wird Y in beiden Fällen zu seinem Werthe zurückkommen; nehmen wir nun an, es möge Y einen gemeinsamen Werth erreichen, wenn x m_1-mal α oder wenn x n_1-mal β umkreist, worin $m_1 < m$, $n_1 < n$ ist, dann wird, wie aus der Form von (37.) ersichtlich, dasselbe auch geschehen, wenn α $2m_1$-mal oder β $2n_1$-mal, α $3m_1$-mal oder β $3n_1$-mal etc. umkreist wird, es würde also Y von demselben Werthe ausgehend zu einem gemeinsamen Y-Werthe gelangen, wenn x den Verzweigungspunkt α mm_1-mal oder den Verzweigungspunkt β mn_1-mal umkreist; da aber die mm_1-malige Umkreisung von α Y zu seinem Ausgangswerthe zurückführt, so müsste dies auch die mn_1-malige Umkreisung von β leisten, also $mn_1 = k.n$ sein, oder da $n_1 < n$ ist, m mit n einen Theiler gemein haben. Nehmen wir also an, dass die Gradzahlen m und n der beiden gegebenen Gleichungen (34.) und (35.) zu einander relativ prim sind, so wird, wenn man von demselben Y-Werthe ausgeht, eine Anzahl von Umkreisungen des Punktes α, welche kleiner als m ist, nicht zu einem gemeinsamen Functionalwerthe führen können, wie eine Anzahl von Umkreisungen des Punktes β, welche kleiner als n ist. Daraus ist aber klar, dass man, ohne Verzweigungspunkte zu durchlaufen, auf continuirlichem Wege zu allen mn-Zweigen der Function Y wird gelangen können, indem man successive erst α m-mal, dann β einmal,

wiederum α m-mal, β einmal etc. umkreisen wird, dass also die Gleichung (38.) irreductibel ist, und da diese Schlüsse nur auf der Verzweigungsart der irreductiblen Gleichungen (34.) und (35.) beruhten, so ergiebt sich vermöge des früher bewiesenen Satzes das folgende Theorem:

Wird aus den Lösungen $y_1, y_2, \ldots, y_m, \eta_1, \eta_2, \ldots \eta_n$ ***der beiden algebraischen Functionalgleichungen***

$$(39.)\quad \begin{cases} y^m + (x-\alpha)^{e\left(\frac{r}{m}\right)+1} f_1(x) y^{m-1} + (x-\alpha)^{e\left(\frac{2r}{m}\right)+1} f_2(x) y^{m-2} + \cdots \\ \qquad \cdots + (x-\alpha)^{e\left((m-1)\frac{r}{m}\right)+1} f_{m-1}(x) y + (x-\alpha)^r f_m(x) = 0 \end{cases}$$

und

$$(40.)\quad \begin{cases} y^n + (x-\beta)^{e\left(\frac{\varrho}{n}\right)+1} \varphi_1(x) y^{n-1} + (x-\beta)^{e\left(\frac{2\varrho}{n}\right)+1} \varphi_2(x) y^{n-2} + \cdots \\ \qquad \cdots + (x-\beta)^{e\left((n-1)\frac{\varrho}{n}\right)+1} \varphi_{n-1}(x) y + (x-\alpha)^\varrho \varphi_n(x) = 0, \end{cases}$$

worin $f_1(x), f_2(x), \ldots, \varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots$ ***ganze Functionen von*** x ***bedeuten, für welche*** $f_m(\alpha)$ ***und*** $\varphi_n(\beta)$ ***von Null verschieden, ferner*** r ***zu*** m, ϱ ***zu*** n ***relativ prim sind, und hat die Gleichung*** (39.) ***in*** $x = \beta$, ***die Gleichung*** (40.) ***in*** $x = \alpha$ ***keine Verzweigung — was als nothwendige Folge nach sich zieht, dass die Gleichungen nicht bloss, wie aus ihrer Form erkennbar, mit Adjungirung rationaler Functionen irreductibel sind, sondern dass auch jede der Gleichungen selbst mit Adjungirung der Lösungen der andern Gleichung irreductibel bleibt — so wird die Gleichung*** mn-ten ***Grades, deren Lösungen durch die bilineare Function der Lösungen der Gleichungen*** (39.) ***und*** (40.)

$$Y_{\lambda\mu} = \psi_0(x) y_\lambda \eta_\mu + \psi_1(x) y_\lambda + \psi_2(x) \eta_\mu + \psi(x),$$

worin die $\psi(x)$ ***ganze Functionen bedeuten, dargestellt werden, und welche somit die Form hat***

$$Y^{mn} + F_1(x) Y^{mn-1} + F_2(x) Y^{mn-2} + \cdots + F_{mn}(x) = 0,$$

in welcher $F_1(x), \ldots, F_{mn}(x)$ ***wiederum ganze Functionen von*** x ***sind, selbst wieder irreductibel sein, wenn*** m ***und*** n ***zu einander relativ prim sind,***

und ähnliche von der Form (37.) unabhängige Sätze.

Man sieht unmittelbar, dass dieser Satz auf Zahlengleichungen übertragen, den Satz von der Irreductibilität der zu einer beliebigen zusammengesetzten Zahl gehörigen, von den nicht primitiven Einheitswurzeln befreiten Kreistheilungsgleichung in sich schliesst.

Das oben angegebene Princip kann auch verwendet werden, um die Reductibilität algebraischer Gleichungen bei Adjungirung gewisser Grössen

festzustellen, wenn die Untersuchung für algebraische Functionalgleichungen durchgeführt ist; ich will an dieser Stelle das Problem nicht allgemein behandeln, sondern mich mit einigen Bemerkungen für bestimmte Klassen solcher Gleichungen begnügen.

Wir wissen aus den früheren Auseinandersetzungen, dass jede algebraische Functionalgleichung von der Form

$$(41.)\quad \begin{cases} y^{2n}+(x-\alpha)^{\delta_1}F_1(x)y^{2n-1}+(x-\alpha)^{\delta_2}F_2(x)y^{2n-2}+\cdots \\ \qquad\qquad \cdots+(x-\alpha)^{\delta_{2n-1}}F_{2n-1}(x)y+(x-\alpha)^{r}F_{2n}(x)=0, \end{cases}$$

worin r eine ungerade zu n relativ prime Zahl bedeutet,

$$\delta_\lambda = e\left(\frac{\lambda r}{2n}\right)+1$$

ist, $F_1(x), F_2(x), \ldots, F_{2n}(x)$ ganze Functionen von x bedeuten, und $F_{2n}(\alpha)$ von Null verschieden ist, da sie um α herum einen $2n$-fachen Verzweigungspunkt hat, für den das Anfangsglied der Entwickelung $(x-\alpha)^{\frac{r}{2n}}$ lautet, mit Adjungirung nur rationaler Functionen von x irreductibel ist. Werfen wir nun die Frage auf, wann eine solche Gleichung mit Adjungirung von $\sqrt{x-\alpha}$ reductibel ist, so wird, wenn

$$\sqrt{x-\alpha} = t$$

gesetzt wird, die Gleichung (41.) identisch sein müssen mit

$$[y^n+(f_{11}(t^2)+tf_{12}(t^2))y^{n-1}+(f_{21}(t^2)+tf_{22}(t^2))y^{n-2}+\cdots+f_{n1}(t^2)+tf_{n2}(t^2)]$$
$$\cdot[y^n+(f_{11}(t^2)-tf_{12}(t^2))y^{n-1}+(f_{21}(t^2)-tf_{22}(t^2))y^{n-2}+\cdots+f_{n1}(t^2)-tf_{n2}(t^2)] = 0,^*)$$

---

*) Da die Entwickelung der Lösungen der Gleichung (41.) die Form hat

$$y = a_0(x-\alpha)^{\frac{r}{2n}}+a_1(x-\alpha)^{\frac{r+1}{2n}}+a_2(x-\alpha)^{\frac{r+2}{2n}}+\cdots,$$

worin $a_0, a_1, a_2, \ldots$ Constanten bedeuten, und, wenn $\sqrt{x-\alpha}=t$ gesetzt wird, die um $t=0$ herum gültige Entwickelung der Lösung eines Factors der der Voraussetzung nach in zwei Factoren zerlegbaren Gleichung

$$y = a_0t^{\frac{r}{n}}+a_1t^{\frac{r+1}{n}}+a_2t^{\frac{r+2}{n}}+\cdots$$

lautet, so folgt wiederum nach bekannten Sätzen, dass dieser Factor die Form hat

$$y^n+t^{\varepsilon_1}f_1(t)y^{n-1}+t^{\varepsilon_2}f_2(t)y^{n-2}+\cdots+t^{\varepsilon_{n-1}}f_{n-1}(t)y+t^rf_n(t),$$

worin $f_n(0)$ von Null verschieden, und

$$\varepsilon_\lambda = e\left(\frac{\lambda r}{n}\right)+1$$

ist.

und somit zunächst

$$f_{n1}^2(t^2) - t^2 f_{n2}^2(t^2) = t^{2r} F_{2n}(t^2+\alpha),$$

oder wenn

$$f_{n1}(t^2) = t^2 \omega_{n1}(t^2),\ f_{n2}(t^2) = \omega_{n2}(t^2)$$

gesetzt wird, worin ω_{n1} und ω_{n2} wiederum ganze Functionen von t^2 sein müssen, die Gleichung

$$t^2 \omega_{n1}^2(t^2) - \omega_{n2}^2(t^2) = t^{2r-2} F_{2n}(t^2+\alpha), \tag{42.}$$

in welcher der oben für $F_{2n}(x)$ gemachten Voraussetzung zufolge für $r=1$ $\omega_{n2}(0)$ von Null verschieden ist; es muss sich also $t^{2r-2} F_{2n}(t^2+\alpha)$ in ein Product der beiden in t rationalen Factoren

$$[t\omega_{n1}(t^2)+\omega_{n2}(t^2)]\,[t\omega_{n1}(t^2)-\omega_{n2}(t^2)]$$

zerlegen lassen, und ähnlich sind die weiteren Bedingungen für die Zerlegung aufzustellen. Ist also z. B. die Gleichung vierten Grades gegeben

$$y^4+(x-\alpha)F_1(x)y^3+(x-\alpha)F_2(x)y^2+(x-\alpha)F_3(x)y+(x-\alpha)F_4(x) = 0,$$

worin $F_4(\alpha)$ von Null verschieden ist, so verlangt die Zerlegung in

$$[y^2+(f_{11}(t^2)+tf_{12}(t^2))y+f_{21}(t^2)+tf_{22}(t^2)]\,[y^2+(f_{11}(t^2)-tf_{12}(t^2))y + f_{21}(t^2)-tf_{22}(t^2)] = 0,$$

wenn wieder, wie sich als nothwendig ergiebt,

$$f_{11}(t^2) = t^2\omega_{11}(t^2),\ f_{12}(t^2) = \omega_{12}(t^2),\ f_{21}(t^2) = t^2\omega_{21}(t^2),\ f_{22}(t^2) = \omega_{22}(t^2)$$

gesetzt wird und $\omega_{11}(t^2)$, $\omega_{12}(t^2)$, $\omega_{21}(t^2)$, $\omega_{22}(t^2)$ ganze Functionen von t^2 darstellen, ausser der der Gleichung (42.) entsprechenden Beziehung

$$t^2\omega_{21}^2(t^2) - \omega_{22}^2(t^2) = F_4(t^2+\alpha) \tag{43.}$$

noch die Erfüllung der Gleichungen

$$2\omega_{11}(t^2) = F_1(t^2+\alpha), \tag{44.}$$

$$2\omega_{21}(t^2)+t^2\omega_{11}^2(t^2)-\omega_{12}^2(t^2) = F_2(t^2+\alpha), \tag{45.}$$

$$2[t^2\omega_{11}(t^2)\omega_{21}(t^2)-\omega_{12}(t^2)\omega_{22}(t^2)] = F_3(t^2+\alpha). \tag{46.}$$

Zerlegt man somit, wenn es angeht, $F_4(t^2+\alpha)$ in die verlangte Form (43.), so ergiebt sich $\omega_{21}(t^2)$ und $\omega_{22}(t^2)$, während aus (44.) $\omega_{11}(t^2)$ folgt; zerlegt man weiter, wenn es möglich ist, nach (45.) $F_2(t^2+\alpha)-2\omega_{21}(t^2)$ in das Product

$$(t\omega_{11}(t^2)+\omega_{12}(t^2))\,(t\omega_{11}(t^2)-\omega_{12}(t^2)),$$

so werden $\omega_{11}(t^2)$ und $\omega_{12}(t^2)$ bestimmt sein, und es bleibt somit nur noch als Bedingungsgleichung die Gleichung (46.) zu erfüllen. Setzt man

also z. B.

$$F_4(x) = \frac{x-\alpha-1}{4},$$

so folgt nach (43.)

$$t^2\omega_{21}^2(t^2) - \omega_{22}^2(t^2) = \frac{t^2-1}{4} = \left(\frac{t}{2}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{t}{2}+\frac{1}{2}\right),$$

und daher $\omega_{21}(t^2) = \frac{1}{2}$, $\omega_{22}(t^2) = \frac{1}{2}$, wonach, da, wenn $F_1(x) = 1$ gesetzt wird, $\omega_{11}(t^2) = \frac{1}{2}$ folgt, sich aus (45.) für $F_2(x) = \frac{x-\alpha+3}{4}$ der Werth $\omega_{12}(t^2) = \frac{1}{2}$ und somit aus (46.) $F_3(x) = \frac{x-\alpha-1}{2}$ ergiebt. Es lässt sich somit die biquadratische Gleichung

$$(47.)\quad \begin{cases} y^4+(x-\alpha)y^3+(x-\alpha)\frac{x-\alpha+3}{4}y^2+(x-\alpha)\frac{x-\alpha-1}{2}y \\ \qquad +(x-\alpha)\frac{x-\alpha-1}{4} = 0, \end{cases}$$

welche mit Adjungirung rationaler Functionen von x irreductibel ist, mit Adjungirung von $\sqrt{x-\alpha}$ reductibel machen und zwar in der Form

$$(48.)\quad \begin{cases} \left[y^2+\left(\frac{x-\alpha}{2}+\frac{\sqrt{x-\alpha}}{2}\right)y+\frac{x-\alpha}{2}+\frac{\sqrt{x-\alpha}}{2}\right] \\ \qquad \left[y^2+\left(\frac{x-\alpha}{2}-\frac{\sqrt{x-\alpha}}{2}\right)y+\frac{x-\alpha}{2}-\frac{\sqrt{x-\alpha}}{2}\right] = 0. \end{cases}$$

Da die Gleichung (47.) für jeden Werth von $x-\alpha$ diese Zerlegung zulässt, so folgt, dass jede algebraische Gleichung von der Form

$$z^4+pz^3+p\frac{p+3}{4}z^2+p\frac{p-1}{2}z+p\frac{p-1}{4} = 0,$$

deren Coefficienten, wenn p eine Primzahl von der Form $4\mu+1$ ist, ganze Zahlen sind, und die bekanntlich mit Adjungirung ganzer Zahlen irreductibel ist, mit Adjungirung von $\sqrt{p}$ reductibel wird durch die Zerlegung

$$\left[z^2+\left(\frac{p}{2}+\frac{\sqrt{p}}{2}\right)z+\frac{p}{2}+\frac{\sqrt{p}}{2}\right]\left[z^2+\left(\frac{p}{2}-\frac{\sqrt{p}}{2}\right)z+\frac{p}{2}-\frac{\sqrt{p}}{2}\right] = 0;$$

für den speciellen Fall $p = 5$ liefert dieser Satz die bekannte Zerlegung der Kreistheilungsgleichung

$$z^4+5z^3+10z^2+10z+5 = \left[z^2+\left(\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)z+\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right]$$
$$\left[z^2+\left(\frac{5}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)z+\frac{5}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right].$$

Ebenso einfach ergiebt sich z. B. mit Adjungirung von $\sqrt{x-\alpha}$ aus der Reductibilität der Gleichung

$$y^4-(x-\alpha)y^2-2(x-\alpha)y-(x-\alpha) = 0$$

mit zwei Verzweigungspunkten die Zerlegung

$$z^4-pz^2-2pz-p = [z^2+\sqrt{p}\cdot z+\sqrt{p}][z^2-\sqrt{p}\cdot z-\sqrt{p}],$$

ferner die Reductibilität der Gleichung

$$z^4+5z+5 = 0$$

mit Adjungirung von $\sqrt{5}$, etc.

Dass aber die Gleichung (41.) nicht mit Adjungirung von $\sqrt{x-\beta}$, worin β irgend eine von α verschiedene Grösse bedeutet, reductibel ist, kann leicht eingesehen werden, da ein solcher aus der Zerlegung entstehender Factor gleich Null gesetzt die Gleichung ergeben würde

$$\varphi(y, x, \sqrt{x-\beta}) = 0,$$

welche bei Umkreisung des $2n$-fachen Verzweigungspunktes α ohne Aenderung des Zeichens von $\sqrt{x-\beta}$ zu allen $2n$ Functionalwerthen von y führen würde. Es möge aber des Folgenden wegen die Unmöglichkeit der Zerlegung mit Adjungirung von $\sqrt{x-\beta}$ auch auf rein algebraischem Wege und zwar für eine biquadratische Gleichung der obigen Form erwiesen werden, welche, je nachdem r von der Form $4\mu+1$ oder $4\mu+3$ ist, nach (41.) die Gestalt hat

$$(49.)\quad \left\{\begin{array}{l} y^4+(x-\alpha)^{\mu+1}F_1(x)y^3+(x-\alpha)^{2\mu+1}F_2(x)y^2 \\ \qquad +(x-\alpha)^{3\mu+1}F_3(x)y+(x-\alpha)^{4\mu+1}F_4(x) = 0 \end{array}\right.$$

oder

$$(50.)\quad \left\{\begin{array}{l} y^4+(x-\alpha)^{\mu+1}F_1(x)y^3+(x-\alpha)^{2\mu+2}F_2(x)y^2 \\ \qquad +(x-\alpha)^{3\mu+3}F_3(x)y+(x-\alpha)^{4\mu+3}F_4(x) = 0, \end{array}\right.$$

worin $F_4(\alpha)$ von Null verschieden ist.

Setzt man zur Abkürzung $x-\alpha = u$, und soll die Gleichung (49.) zerlegbar sein mit Adjungirung von $\sqrt{x-\beta}$, so dass

$$\begin{aligned} &y^4+u^{\mu+1}F_1(u+\alpha)y^3+u^{2\mu+1}F_2(u+\alpha)y^2+u^{3\mu+1}F_3(u+\alpha)y+u^{4\mu+1}F_4(u+\alpha) \\ &\quad = [y^2+(g_1(u)+g_2(u)\sqrt{u+\alpha-\beta})y+h_1(u)+h_2(u)\sqrt{u+\alpha-\beta}] \\ &\qquad [y^2+(g_1(u)-g_2(u)\sqrt{u+\alpha-\beta})y+h_1(u)-h_2(u)\sqrt{u+\alpha-\beta}], \end{aligned}$$

wird, worin g_1, g_2, h_1, h_2 ganze Functionen von u bedeuten, so sind die Gleichungen zu befriedigen

$$(51.)\qquad 2g_1(u) = u^{\mu+1}F_1(u+\alpha),$$

$$(52.) \qquad 2h_1(u)+g_1^2(u)-(u+\alpha-\beta)g_2^2(u) = u^{2\mu+1}F_2(u+\alpha),$$

$$(53.) \qquad 2g_1(u)h_1(u)-2(u+\alpha-\beta)g_2(u)h_2(u) = u^{3\mu+1}F_3(u+\alpha),$$

$$(54.) \qquad h_1^2(u)-(u+\alpha-\beta)h_2^2(u) = u^{4\mu+1}F_4(u+\alpha).$$

Zunächst ist leicht zu sehen, dass die 4 Functionen $g_1(u)$, $g_2(u)$, $h_1(u)$, $h_2(u)$ eine Potenz von u enthalten müssen, da nach (51.) und (53.) dies für $g_1(u)$ und $g_2(u)h_2(u)$ der Fall sein muss, ferner, wenn $h_2(u)$ sie nicht enthielte, sondern nur $g_2(u)$, auch $h_1(u)$ nach (54.) davon frei wäre, was nach (52.) nicht angeht, und wenn $h_2(u)$ durch u theilbar ist, also nach (54.) auch $h_1(u)$, nach (52.) auch $g_2(u)$ es sein müsste. Seien nun die Gradzahlen von u in den Functionen g_1, g_2, h_1, h_2 resp. $\gamma_1, \gamma_2, \varkappa_1, \varkappa_2$, so folgt zunächst aus (51.) $\gamma_1 \geqq \mu+1$; ist nun $\varkappa_1 \geqq 2\mu+1$, so muss nach (54.) auch $\varkappa_2 \geqq 2\mu+1$ sein, dann würde aber nach Division dieser Gleichung mit $t^{4\mu+1}$ die linke Seite noch durch u theilbar bleiben, während es die rechte Seite nicht ist, und es folgt daher, dass $\varkappa_1 < 2\mu+1, \varkappa_2 < 2\mu+1$ ist, und ebenso leicht, dass $\varkappa_1 = \varkappa_2$, weil sonst durch Division der Gleichung (54.) mit der kleineren u-Potenz noch zwei Posten den Factor u enthielten, und der dritte nicht. Dann geht aber die Gleichung (53.) durch Division mit $u^{\varkappa_1}$ in

$$2g_1(u)H_1(u)-2g_2(u)H_2(u)(u+\alpha-\beta) = u^{\lambda}F_3(u+\alpha)$$

über, worin $\lambda \geqq \mu+1$, und die Functionen $H_1(u), H_2(u)$ den Factor u nicht mehr enthalten, so dass $\gamma_2 \geqq \mu+1$ sein muss; aber dieses widerstreitet der Gleichung (52.), da $h_1(u)$ nicht wie die drei anderen Posten dieser Gleichung durch $u^{2\mu+1}$ theibar ist.

Soll aber die Gleichung (50.) zerlegbar sein, sollen also die Beziehungen stattfinden

$$(55.) \qquad 2g_1(u) = u^{\mu+1}F_1(u+\alpha),$$

$$(56.) \qquad 2h_1(u)+g_1^2(u)-(u+\alpha-\beta)g_2^2(u) = u^{2\mu+2}F_2(u+\alpha),$$

$$(57.) \qquad 2g_1(u)h_1(u)-2g_2(u)h_2(u)(u+\alpha-\beta) = u^{3\mu+3}F_3(u+\alpha),$$

$$(58.) \qquad h_1^2(u)-(u+\alpha-\beta)h_2^2(u) = u^{4\mu+3}F_4(u+\alpha),$$

so müssen zunächst wieder die 4 Functionen den Factor u enthalten, und behält man die obigen Bezeichnungen für die Gradzahlen in u bei, von denen wieder $\gamma_1 \geqq \mu+1$ sein muss, so würde zunächst, wenn $\varkappa_1 \geqq 2\mu+2$ wäre, nach (58.) auch $\varkappa_2 \geqq 2\mu+2$ sein müssen, dann aber durch Division eben dieser Gleichung durch $u^{4\mu+3}$ die linke Seite durch u theilbar bleiben, während es die rechte Seite nicht ist, und daher folgen, dass $\varkappa_1 < 2\mu+2$,

$\varkappa_2 < 2\mu+2$ ist, und ebenso leicht wieder $\varkappa_1 = \varkappa_2$ sich ergeben. Da aber dann die Gleichung (57.) durch Division mit $u^{\varkappa_1}$ in

$$2g_1(u)H_1(u) - 2g_2(u)H_2(u)(u+\alpha-\beta) = u^{\lambda}F_3(u+\alpha)$$

übergeht, worin $\lambda \geqq \mu+2$ ist, also $\gamma_2 \geqq \mu+1$ sein muss, so wird dies wieder der Gleichung (56.) widerstreiten, da $h_1(u)$ nicht wie die drei andern Posten dieser Gleichung durch $u^{2\mu+2}$ theilbar ist. Wir finden somit, dass in keinem Falle eine Gleichung der Form

$$y^4+(x-\alpha)^{\delta_1}F_1(x)y^3+(x-\alpha)^{\delta_2}F_2(x)y^2+(x-\alpha)^{\delta_3}F_3(x)y+(x-\alpha)^{r}F_4(x) = 0,$$

welche bekanntlich für ungerade r, wenn

$$\delta_\lambda = e\left(\frac{\lambda r}{4}\right)+1$$

ist, mit Adjungirung rationaler Functionen von x irreductibel ist, mit Adjungirung von $\sqrt{x-\beta}$ reductibel werden kann, und da diese Schlüsse, wie unmittelbar zu sehen, in genau derselben Weise sich auch algebraisch verallgemeinern lassen, so erhalten wir den folgenden Satz:

Eine algebraische Gleichung von der Form

$$y^{2n}+(x-\alpha)^{\delta_1}F_1(x)y^{2n-1}+(x-\alpha)^{\delta_2}F_2(x)y^{2n-2}+\cdots$$
$$\cdots+(x-\alpha)^{\delta_{2n-1}}F_{2n-1}(x)y+(x-\alpha)^{r}F_{2n}(x) = 0,$$

in welcher r eine zu n relativ prime ungerade Zahl bedeutet,

$$\delta_\lambda = e\left(\frac{\lambda r}{2n}\right)+1$$

ist, $F_1(x), \ldots, F_{2n}(x)$ beliebige ganze Functionen von x bedeuten, von denen die letztere für $x = \alpha$ nicht verschwindet, und welche, wie bekannt, mit Adjungirung rationaler Functionen von x stets irreductibel ist, wird auch stets mit Adjungirung von $\sqrt{x-\beta}$ irreductibel sein, worin β eine beliebige von α verschiedene Zahl bedeutet, während sie mit Adjungirung von $\sqrt{x-\alpha}$ reductibel sein kann.

Als specielle Formen von Zahlengleichungen, welche den algebraischen Functionalgleichungen (41.) entsprechen, können die zu einer Primzahl p gehörigen Kreistheilungsgleichungen

$$(59.) \qquad x^{p-1}+px^{p-2}+\frac{p(p-1)}{1\cdot 2}x^{p-3}+\cdots+\frac{p(p-1)}{1\cdot 2}x+p = 0$$

hervorgehoben werden, die bekanntlich mit Adjungirung rationaler Zahlen irreductibel sind, jedoch mit Adjungirung von $\sqrt{(-1)^{\frac{p-1}{2}}p}$ reductibel werden. Es ist leicht zu sehen, dass eine zu p gehörige Kreistheilungsgleichung

nicht reductibel sein kann mit Adjungirung von $\sqrt{(-1)^{\frac{q-1}{2}}q}$, wenn q irgend eine von p verschiedene Primzahl bedeutet; denn sei ε eine Lösung der zu p gehörigen Kreistheilungsgleichung, welche dem gleich Null gesetzten Factor

$$(60.) \qquad x^{\frac{p-1}{2}} + a_1 x^{\frac{p-3}{2}} + \cdots = \sqrt{(-1)^{\frac{q-1}{2}}q}\left(b_1 x^{\frac{p-3}{2}} + \cdots\right)$$

der der Annahme gemäss mit Adjungirung von $\sqrt{(-1)^{\frac{q-1}{2}}q}$ zerlegten Kreistheilungsgleichung $(p-1)$-ten Grades angehört, η eine Lösung der zur Primzahl q gehörigen Kreistheilungsgleichung, welche also auch den Factor dieser stets mit Adjungirung derselben Grösse reductibeln Gleichung

$$(61.) \qquad x^{\frac{q-1}{2}} + A_1 x^{\frac{q-3}{2}} + \cdots = \sqrt{(-1)^{\frac{q-1}{2}}q}\left(B_1 x^{\frac{q-3}{2}} + \cdots\right)$$

befriedigt, so wird sich durch Division der Gleichungen (60.) und (61.) die Beziehung ergeben

$$(62.) \qquad \frac{\varepsilon^{\frac{p-1}{2}} + a_1 \varepsilon^{\frac{p-3}{2}} + \cdots}{\eta^{\frac{q-1}{2}} + A_1 \eta^{\frac{q-3}{2}} + \cdots} = \pm \frac{b_1 \varepsilon^{\frac{p-3}{2}} + \cdots}{B_1 \eta^{\frac{q-3}{2}} + \cdots},$$

in welcher $a_1, \ldots, b_1, \ldots, A_1, \ldots, B_1, \ldots,$ rationale Zahlen bedeuten, und diese Gleichung ist unmöglich, da bekanntlich ein von den nicht primitiven Einheitswurzeln befreites, zum Grade n gehöriges Kreistheilungspolynom nicht in Factoren zerlegt werden kann, die in ihren Coefficienten nur rationale Zahlen und Einheitswurzeln enthalten, deren Grad relativ prim zu n ist, während die Gleichung (62.) eine nicht identische Gleichung $\frac{p-1}{2}$-ten Grades definiren würde, deren Coefficienten nur rationale Zahlen und die q-te Einheitswurzel η enthalten.

Von diesem Satze mag endlich noch eine einfache Anwendung auf die Vertheilung der complexen Primzahlen von der Form $a+bi$ in der Ebene gemacht werden.

Ist $a+bi$, worin a und b ganze positive oder negative Zahlen bedeuten, also auch $a-bi$, eine Primzahl, so ist bekanntlich

$$(a+bi)(a-bi) = N(a+bi) = a^2+b^2$$

eine positive reelle Primzahl, und ist die Norm eine Primzahl, so ist es auch $a+bi$, natürlich vorausgesetzt, dass b von Null verschieden ist. Soll aber a^2+b^2 eine Primzahl sein, so muss dieselbe von der Form $4n+1$, also

$\mathrm{mod}(a+bi) = \sqrt{4n+1}$ sein, und legt man somit um den Nullpunkt der Ebene als Mittelpunkt Kreise mit den Radien $\sqrt{5}, \sqrt{13}, \sqrt{17}, \ldots$, so müssen sämmtliche complexen Primzahlen $a+bi$ auf den Peripherien dieser Kreise liegen. Nun sind aber die 4 mit den complexen Einheiten multiplicirten Zahlen

$$a+bi,\ ai-b,\ -a-bi,\ -ai+b$$

und deren conjugirte Werthe

$$a-bi,\ -ai-b,\ -a+bi,\ ai+b$$

wiederum Primzahlen, und es ist klar, dass auf jedem der bezeichneten Kreise nur *eine* complexe Primzahl nebst ihren drei zugehörigen und deren conjugierten liegt; denn lägen zwei verschiedene auf demselben, $a+bi$ und $c+di$, so wäre $a^2+b^2 = c^2+d^2$ und somit $c+di$ in $a+bi$ oder $a-bi$ enthalten, was nur möglich ist, wenn $c+di$ sich von $a+bi$ oder $a-bi$ nur um eine Einheitswurzel $1, -1, i, -i$ als Factor unterscheidet. Fassen wir dies zusammen, so liegen, wenn um den Nullpunkt als Mittelpunkt Kreise mit den Radien von der Länge 3, 7, 11, ..., also mit den Primzahlen von der Form $4n+3$, welche auch im complexen Sinne Primzahlen sind, geschlagen werden, auf jedem derselben in den 4 Durchschnittspunkten

$$4n+3,\ -(4n+3),\ i(4n+3),\ -i(4n+3)$$

der Fundamentalaxe und der darauf senkrechten Axe mit dem Kreise Primzahlen und sonst auf diesen Kreisen keine anderen; auf dem Kreise mit dem Radius 1 liegen die 4 Einheiten, und auf den mit den Radien $\sqrt{4n+1}$ gezogenen Kreisen, worin $4n+1$ eine reelle Primzahl ist, zwei complexe conjugirte Primzahlen $a+bi$ und $a-bi$ und deren je 4 zugehörige, durch multipilcatorische Einheiten von diesen verschiedene; auf dem Kreise mit dem Radius $\sqrt{2}$ liegen die 4 Primzahlen $1+i,\ i-1,\ -1-i,\ -i+1$.

Sei nun $a+bi$ eine auf einem der Kreise liegende Primzahl und verbindet man dieselbe mit dem Nullpunkt, so wird auf diesem Strahle, der von eben diesem Kreise noch die Primzahl $-a-bi$ ausschneidet, keine andere Primzahl mehr liegen oder es werden die Durchschnittspunkte desselben mit den andern Kreisen zusammengesetzte Zahlen sein; denn lägen zwei Primzahlen $a+bi$ und $a_1+b_1 i$ auf demselben Strahle, so wäre wegen $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a}{b}$

$$a_1+b_1 i = \frac{a_1(a+bi)}{a},$$

und es müsste, da $a+bi$ eine Primzahl sein soll, a_1 durch a theilbar sein, was nicht angeht, da $a_1+b_1 i$ eine von $a+bi$ verschiedene Primzahl sein soll. Lässt man also eine Linie sich um den Anfangspunkt drehen, so wird sie in jeder Lage nur auf *einem* der Kreise 2 entgegengesetzte Primzahlen ausschneiden können, und zwar wird jeder Kreis in jedem Quadranten von der sich drehenden Linie in zwei Primzahlpunkten $a+bi$ und $ai+b$, wenn a und b dasselbe Zeichen haben, dagegen $a+bi$ und $-b-ai$, wenn a und b entgegengesetztes Zeichen haben, geschnitten. Aber nicht jeder Strahl des Büschels wird Primzahlen treffen, wie schon daraus hervorgeht, dass wenn derselbe auf dem Einheitskreise von der Fundamentalaxe aus den Bogen φ abschneidet, nicht nur $tg\varphi = \frac{b}{a}$ jedenfalls rational sein muss, sondern wenn p eine Primzahl von der Form $4n+1$ ist,

$$\text{(63.)} \qquad \cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{p}}, \quad \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{p}}$$

sein muss, worin $p = a^2+b^2$ ist, und wir werfen die Frage auf, ob für einen Bogen, welcher ein rationaler Theil von 2π ist, Gleichungen von der Form (63.) erfüllt werden können. Sei also

$$\text{(64.)} \qquad \cos\frac{\nu}{\mu}2\pi = \frac{a}{\sqrt{p}}, \quad \sin\frac{\nu}{\mu}2\pi = \frac{b}{\sqrt{p}},$$

worin ν und μ zwei zu einander relativ prime ganze Zahlen sein mögen, so folgt vermöge der Ausdrücke

$$\cos\varkappa\varphi = \cos^{\varkappa}\varphi - \frac{\varkappa(\varkappa-1)}{1\cdot 2}\cos^{\varkappa-2}\varphi\sin^2\varphi + \cdots,$$

$$\sin\varkappa\varphi = \varkappa\cos^{\varkappa-1}\varphi\sin\varphi - \frac{\varkappa(\varkappa-1)(\varkappa-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cos^{\varkappa-3}\varphi\sin^3\varphi + \cdots,$$

worin $\varkappa$ eine ganze Zahl bedeutet, dass

$$\text{(65.)} \qquad \cos\varkappa\cdot\frac{\nu}{\mu}2\pi = \frac{M}{p^{\frac{\varkappa}{2}}}, \quad \sin\varkappa\cdot\frac{\nu}{\mu}2\pi = \frac{N}{p^{\frac{\varkappa}{2}}},$$

worin M und N ganze Zahlen bedeuten, und die Ausdrücke selbst somit rational sind, wenn $\varkappa$ gerade ist. Sei nun

$$\mu = 2^{\varrho}q^{\alpha}r^{\beta}\ldots s^{\sigma},$$

worin $q, r, \ldots, s$ von einander verschiedene Primzahlen bedeuten, und werde

$$\varkappa = 2^{\varrho}q^{\alpha-1}r^{\beta}\ldots s^{\sigma} = \frac{\mu}{q}$$

gesetzt, so müsste nach (65.)

$$(66.) \qquad \cos\frac{2\nu\pi}{q} = \frac{M}{p^{\frac{\varkappa}{2}}}, \quad \sin\frac{2\nu\pi}{q} = \frac{N}{p^{\frac{\varkappa}{2}}}$$

sein, welche Ausdrücke, wenn $\varrho \geqq 1$ ist, rational sein würden.

Bildet man nun

$$x = \cos\frac{2\nu\pi}{q} \pm i\sin\frac{2\nu\pi}{q} = \frac{M \pm Ni}{p^{\frac{\varkappa}{2}}},$$

worin M und N ganze Zahlen sind, so sind diese beiden Werthe von x einerseits Lösungen der Gleichung

$$x^q - 1 = 0,$$

andererseits der Gleichung

$$p^\varkappa x^2 - 2Mp^{\frac{\varkappa}{2}}x + M^2 + N^2 = 0,$$

und es müsste somit die zum Grade q gehörige Kreistheilungsgleichung durch Adjungirung von $\sqrt{p}$ reductibel sein, was, wie wir oben gesehen haben, nicht angeht; es darf daher μ keine von 2 und p verschiedene Primzahl enthalten und muss somit die Form haben $\mu = 2^\varrho p^\lambda$, woraus, wenn $\varkappa = 2^\varrho p^{\lambda-1}$ gesetzt wird,

$$\cos\frac{2\nu\pi}{p} = \frac{M}{p^{\frac{\varkappa}{2}}}, \quad \sin\frac{2\nu\pi}{p} = \frac{N}{p^{\frac{\varkappa}{2}}}$$

folgte, welche Ausdrücke wiederum, wenn $\varrho \geqq 1$, rational sein würden. Setzt man nunmehr

$$x = \cos\frac{2\nu\pi}{p} \pm i\sin\frac{2\nu\pi}{p} = \frac{M \pm Ni}{p^{\frac{\varkappa}{2}}},$$

so hat die Gleichung

$$x^p - 1 = 0$$

mit der Gleichung

$$p^\varkappa x^2 - 2Mp^{\frac{\varkappa}{2}}x + M^2 + N^2 = 0$$

zwei Lösungen gemein, das letztere Polynom bildet also einen Theiler des ersteren; ist nun $\varkappa$ eine gerade Zahl, also $\varrho \geqq 1$, so würde die zu p gehörige Kreistheilungsgleichung mit Adjungirung rationaler Zahlen reductibel sein, also muss $\varrho = 0$ d. h. $\varkappa$ ungerade sein, und die Kreistheilungsgleichung mit Adjungirung von $\sqrt{p}$ reductibel werden, was stets der Fall ist. Da aber die

beiden Factoren der mit Adjungirung von $\sqrt{p}$ zerlegten, zu p gehörigen Kreistheilungsgleichung vom $\frac{p-1}{2}$-ten Grade sind, und diese bekanntlich, nur mit Adjungirung von $\sqrt{p}$, nicht mehr reductibel sind, so wird, da das obige Polynom vom 2-ten Grade ist, $p = 5$ sein müssen — aber für $p = 5$ hat der irreductible Factor die Form

$$x^2 + \left(\frac{5}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)x + \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$$

und lässt sich also mit dem oben gefundenen nicht identificiren, so dass für μ nur die Form 2^ϱ übrig bleibt, um die den Gleichungen (64.) entsprechenden Beziehungen

$$\cos\frac{\nu\pi}{2^{\varrho-1}} = \frac{a}{\sqrt{p}}, \quad \sin\frac{\nu\pi}{2^{\varrho-1}} = \frac{b}{\sqrt{p}},$$

zu befriedigen, worin ν ungerade ist; aber auch diese Gleichungen sind für $\varrho = 1, 2$ nicht zu befriedigen, ebensowenig für $\varrho > 3$, da für $\varkappa = 2^{\varrho-3}$

$$\cos 2^{\varrho-3}\frac{\nu\pi}{2^{\varrho-1}} = \cos\frac{\nu\pi}{4}, \quad \sin 2^{\varrho-3}\frac{\nu\pi}{2^{\varrho-1}} = \sin\frac{\nu\pi}{4}$$

rational sein müssten, was nicht der Fall ist; es bleibt somit nur $\varrho = 3$, wofür in der That jene Gleichungen unter der Annahme von $p = 2$ zu erfüllen sind, da jedoch p von der Form $4n+1$ sein sollte, ebenfalls fortfallen. Die Gleichungen (63.) sind somit für kein rationales Multiplum von 2π, unter der Annahme, dass p von der Form $4n+1$ ist, zu erfüllen, dagegen werden dieselben für $p = 2$ die Lösungen $\varphi = \frac{\nu\pi}{4}$ haben, worin ν eine beliebige ungerade Zahl bedeutet.*)

Wir schliessen daraus, ***dass nur die beiden Strahlen, welche mit der Fundamentalaxe den Winkel von*** 45^0 ***bilden, auf dem Kreise mit dem Radius*** $\sqrt{2}$ 4 ***complexe Primzahlen ausschneiden, dass aber sonst auf keinem Strahle***

---

*) Wollte man, um zu demselben Resultate zu gelangen, von den aus (63.) folgenden Gleichungen

$$\cos 2\varphi = \frac{a^2 - b^2}{p}, \quad \sin 2\varphi = \frac{2ab}{p}$$

ausgehen, so brauchte man sich nur auf den Satz von der Irreductibilität einer zu einem zusammengesetzten Grade gehörigen, von den nicht primitiven Lösungen befreiten Kreistheilungsgleichung zu stützen, wenn dieser nur rationale Zahlen adjungirt werden.

des Büschels, welcher mit der Fundamentalaxe Winkel bildet, die rationale Theile von 360^0 *sind, complexe Primzahlen liegen.*

Dass der auf dem Einheitskreise von dem Strahle abgeschnittene Bogen nicht in einem algebraischen Verhältnisse zum Radius stehen kann, sondern nur in einem transcendenten, folgt aus dem bekannten Satze, dass der natürliche Logarithmus einer algebraischen Zahl transcendent ist, aber dieses transcendente Verhältniss darf auch nicht, wie oben gezeigt worden, ein rationaler Theil von 2π sein.

GENERAL LIBRARY,
UNIV. OF MICH.
NOV 11 1899

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826.

Herausgegeben

von

L. Fuchs.

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich Preussischer Behörden.

Band 121.

Heft I u. II.

Ausgegeben den 24. October.

Berlin,
S.W. Anhaltstrasse 12.
Druck und Verlag von Georg Reimer.
1899.

Jährlich circa 6 Hefte. Vier Hefte bilden einen Band. Preis pro Band M. 12.—.

Mathematischer Verlag von Georg Reimer in Berlin.

Baer, O., Éléments d'algèbre à l'usage des classes moyennes du collège royal français. 8. 1885 . . . . . geb. 2.50

— — Éléments de géométrie plane à l'usage des élèves du collège royal français. 8. 1887 . . . . . 3.—

Ball, Rob. S., theoretische Mechanik starrer Systeme. Auf Grund der Methoden und Arbeiten Ball's herausgegeben von H. Gravelius. Mit 2 Abbildungen. 8. 1889 . . . . . 14.—

Borchardt, C. W., gesammelte Werke. Auf Veranlassung der Königl. Preuss. Akademie der Wissenschaften herausgeg. von G. Hettner. Mit Borchardt's Bildniss. 4. 1888 . . . . . 17.—

Bork, H., und **Fr. Poske,** Hauptsätze der Arithmetik für die Unter- und Mittelklassen des Gymnasiums. 3. Aufl. 8. 1892 . . . . —.60

Budde, E., allgemeine Mechanik der Punkte und starren Systeme. Ein Lehrbuch für Hochschulen. I. Band: Mechanik der Punkte und Punktsysteme. 8. 1890 . . . . . 7.—

— — II. Band. Mechanische Summen und starre Gebilde. 8. 1891 . 8.—

Crelle, A. L., Rechentafeln, welche alles Multipliciren und Dividiren mit Zahlen unter Tausend ganz ersparen, bei grösseren Zahlen aber die Rechnung erleichtern und sicherer machen; mit Tafeln der Quadrat- u. Kubikzahlen von 1 bis 1000. Mit einem Vorwort von C. Bremiker. A. u. d. T. — Tables de calcul etc. 8te Stereotyp-Ausgabe. 4. 1899 . . . . . geb. 15.—

Dirichlet, G. Lejeune, Werke. Herausgegeben auf Veranlassung der Königl. Preuss. Akademie der Wissenschaften. 4.
I. Band. Herausg. v. L. Kronecker. Mit Dirichlet's Bildniss. 1889 21.—
— — II. Band. Herausg. v. L. Kronecker, fortgesetzt v. L. Fuchs. 1897. 18.—

Eisenstein, G., mathemat. Abhandlungen, besonders aus dem Gebiete der höheren Arithmetik und der elliptischen Functionen. Mit einer Vorrede von Gauss. 4. 1847 . . . . . 4.—

— Tabelle der reducirten positiven ternären quadratischen Formen nebst den Resultaten neuer Forschungen über diese Formen in besond. Rücksicht auf ihre tabellarische Rechnung. 4. 1851 . . . 1.—

Emmerich, Dr. A., Die Brocard'schen Gebilde und ihre Beziehungen zu den verwandten merkwürdigen Punkten und Kreisen des Dreiecks. Mit 50 Figuren im Text und einer lithographischen Tafel. 8. 1891 . . . . . 5.—

Gravelius, H., fünfstellige logarithmisch-trigonometrische Tafeln für die Decimaltheilung des Quadranten, mit ausführlichen Tafeln zum Uebergang von der neuen Theilung des Quadranten in die alte und umgekehrt. Nebst vierstelligen Tafeln der Zahlenwerthe der trigonometrischen Functionen, sowie gewöhnlichen Logarithmentafeln und Quadrattafeln. Mit einem Vorworte von Prof. Dr. W. Förster, Direktor der Königl. Sternwarte zu Berlin. 8. 1886. . . . . geb. 6.—

Haentzschel, E., Studien über die Reduction der Potentialgleichung auf gewöhnliche Differentialgleichungen. Ein Anhang zu Heine's Handbuch der Kugelfunctionen. 8. 1893 . . . . . 6.—

Heine, E., Handbuch der Kugelfunctionen. 2. Auflage.
Erster Band. Theorie. 1878 . . . . . 8.—
Zweiter Band. Anwendungen. 1881 . . . . . 6.—

Mathematischer Verlag von Georg Reimer in Berlin.

Jacobi, C. G. J., gesammelte Werke. Auf Veranlassung der Königl. Preuss. Akademie der Wissenschaften. 4.
I. Band herausgegeben von C. W. Borchardt. Mit dem Bildniss Jacobi's. 1881 . . . . . 18.—
II.—VII. Band herausgeg. von K. Weierstrass. 1882—1891. . 99.—
Supplementband. Vorlesungen über Dynamik. Herausgeg. von E. Lottner. 1884 . . . . . 10.—

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, begründet von Carl Ohrtmann. Im Verein mit anderen Mathematikern und unter besonderer Mitwirkung der Herren Felix Müller und Albert Wangerin herausgegeben von Emil Lampe. Bd. 28. Jahrgang 1897 (in 3 Heften) Heft 1 . . . . . 13.—
— — dasselbe Heft 2 . . . . . 6.—

Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. Vierter Band. 1894—95. Enthaltend die Chronik der Vereinigung für Jahre 1894 und 1895, kurze Berichte über die auf den Versammlungen in Wien und Lübeck gehaltenen Vorträge, sowie einen ausführlichen Bericht über die Theorie der algebraischen Zahlkörper, von David Hilbert in Göttingen. Herausgegeben im Auftrage des Vorstandes von A. Wangerin und A. Gutzmer 8. 1897 . . . . . 16.—

Journal für die reine und angewandte Mathematik, gegründet von A. L. Crelle 1826. Herausgegeben von L. Fuchs. Band 119. 4 Hefte. 4. 1898 . . . . . 12.—
— — Inhalt und Namenverzeichniss der Bände 1—100 (1826—1887). 4. 1887 . . . . . 12.—

Joachimsthal, F., Elemente der analystischen Geometrie der Ebene. Dritte Auflage, verbessert und durch einen Anhang von Aufgaben und deren Lösungen vermehrt von O. Hermes. Mit 8 Tafeln. 8. 1883 . . . . . 3.60

Kronecker, L., Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen. Festschrift zu Herrn E. E. Kummers 50jährigem Doctor-Jubiläum am 10. Sept. 1881.
Angefügt ist eine neue Ausgabe der am 10. Sept. 1845 erschienenen Inauguraldissertation: de unitatibus complexis. (Abdr. a. d. Journ. f. d. reine u. angew. Mathematik Bd. 92.) 8. 1882 6.—

Müller, Felix, Carl Heinrich Schellbach. Gedächtnissrede gehalten in der Aula des Kgl. Friedrich Wilhelms-Gymnasiums am 29. October 1892. Mit einem Bildniss Schellbachs. 8. . . . . —.50

Schellbach, K. H., neue Elemente der Mechanik, dargestellt und bearbeitet von G. Arendt. Mit 12 Figurentafeln. 8. 1860 . . 5.50
— die Lehre von den elliptischen Integralen und den Theta-Functionen. 8. 1864. . . . . 6.—
— über die Zukunft der Mathematik an unseren Gymnasien. 8. 1887 —.80

Steiner's, J., gesammelte Werke. Auf Veranlassung der Königl. Preuss. Akademie der Wissenschaften herausg. von K. Weierstrass. 8.
I. Band mit 44 Tafeln und Steiner's Bildniss. 1881 . . . . . 16.—
II. Band mit 23 Tafeln. 1882 . . . . . 18.—

Wiecke, P., Lehrproben. Geometrische und algebraische Betrachtungen über Maxima und Minima. Zum Gebrauch in den oberen Klassen höherer Lehranstalten, sowie zum Selbstunterricht, als Vorbereitung für den Besuch deutscher Hochschulen. Mit Figuren im Text und 7 Tafeln. 8. 1894 . . . . . kart. 5.—

Wolff, F., Lehrbuch der Geometrie. 8.
1. Theil. Ebene Elementargeometrie, Trigonometrie, Theilungslehre. 8. verb. Aufl. Mit 7 Kupfertafeln. 1870 . . . . . 5.—
2. Theil. Stereometrie und sphärische Trigonometrie. Mit 2 lithogr. Tafeln. 5. verb. Aufl. 1872 . . . . . 3.—

Band 121. Heft I u. II.

Inhaltsverzeichniss.

Thomé, L. W. Ueber lineare Differentialgleichungen mit mehrwerthigen algebraischen Coefficienten . . . . . Seite 1

Dedekind, R. Ueber die Anzahl der Idealklassen in reinen kubischen Zahlkörpern . . . . . — 40

Boehm, Karl. Die Existenzbedingungen eines von den ersten und zweiten Differentialquotienten der Coordinaten abhängigen kinetischen Potentials — 124

Koenigsberger, Leo. Ueber die allgemeinen kinetischen Potentiale . . . — 141

Schlesinger, Ludwig. Ueber projective Substitutionen, die einen Kreis ungeändert lassen . . . . . — 168

Sendungen von Beiträgen für das Journal erbittet die Redaction **ausschliesslich** unter der Adresse:

An die Redaction des Journals für die reine und angewandte Mathematik, Verlagsbuchhandlung von Georg Reimer. Berlin S.W., Anhaltstrasse 12.

GENERAL LIBRARY
UNIV. OF MICH.
JAN 3 1900

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826.

Herausgegeben

von

L. Fuchs.

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich Preussischer Behörden.

Band 121.

Heft III.

Ausgegeben den 9. December.

Berlin,
S.W. Anhaltstrasse 12.
Druck und Verlag von Georg Reimer.
1899.

Jährlich circa 6 Hefte. Vier Hefte bilden einen Band. Preis pro Band M. 12.—.

Verlag von **Louis Nebert** in Halle a. S.

Thomae, Prof. Dr. J., **Elementare Theorie der analytischen Funktionen einer complex. Veränderlichen. Zweite erweiterte Auflage.** gr. 4°. geheftet 9 Mark.

Enneper, Prof. Dr. A., **Elliptische Funktionen. Theorie und Geschichte.** Akademische Vorträge. **Zweite Auflage.** Neu bearbeitet und herausgegeben von Prof. Dr. **Felix Müller.** Lex.-8 geh. 18 M.

Thomae, Prof. Dr. J., **Die Kegelschnitte in rein projectiver Behandlung.** gr. 8. geh. 6 Mark.

Thomae, Prof. Dr. J., **Abriss e. Theorie d. Funktionen e. complexen Veränderlichen u. der Thetafunktionen. Dritte,** erheblich vermehrte **Auflage.** gr. 4. geh. 10 Mark.

Thomae, Prof. Dr. J., **Einleitung in die Theorie der bestimmten Integrale.** gr. 4. geh. 2 Mark 80 Pf.

Thomae, Prof. Dr. J., **Sammlung von Formeln, welche bei Anwendung der elliptischen und Rosenhain'schen Funktionen gebraucht werden.** gr. 4. geh. 3 Mark.

Thomae, Prof. Dr. J., **Ueber eine specielle Klasse Abel'scher Funktionen.** 2 Teile. gr. 4. geh. 9 Mark.

Thomae, Prof. Dr. J., **Ueber eine Funktion, welche einer linearen Differential- u. Differenzen-Gleichung IV. Ordn. Genüge leistet.** gr. 4. geh. 1 Mark 50 Pf.

Repetitorium der analytischen Geometrie. gr. 8. geh. 1 Mark 20 Pf.

Hofmann, Dr. F., **Methodik der stetigen Deformation von zweiblättrigen Riemann'schen Flächen.** Ein Uebungsbuch für den geometrischen Teil der Funktionentheorie. gr. 8. geh. 2 Mark.

Rulf, Prof. W., **Elemente der projektivischen Geometrie.** gr. 8. geh. 2 Mark 50 Pf.

Beau, Dr. O., **Analytische Untersuchungen im Gebiete der trigonometrischen Reihen und der Fourier'schen Integrale. Zweite** verb. u. verm. **Auflage.** gr. 4. geh. 5 Mark 50 Pf.

Odstrčil, Prof. Dr. J., **Kurze Anleitung zum Rechnen mit den (Hamilton'schen) Quaternionen.** gr. 8 geh. 2 Mark 25 Pf.

Hochheim, Prof. Dr. A., **Kâfî fîl Hisâb** (Genügendes über Arithmetik) **des Abu Bekr Muhammed Ben Alhusein Alkarkhî.** 3 Hefte. gr. 4. geh. 3 Mark 90 Pf.

Hochheim, Dr. A., **Ueber die Differentialcurven der Kegelschnitte.** gr. 8. geh. 3 Mark.

Hochheim, Dr. A., **Ueber Pole u. Polaren d. parabol. Curven III. Ordn.** gr. 4. geh. 1 Mark.

Langer, Dr. P., **Die Grundprobleme der Mechanik.** Eine kosmologische Skizze. gr. 8. geh. 1 Mark 80 Pf.

Frege, Dr. G., **Begriffsschrift.** Eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens. gr. 8. geh. 3 Mark.

Radicke, A., **Die Recursionsformeln für die Berechnung der Bernoulli'schen und Euler'schen Zahlen.** gr. 8. geh. 1 Mark 20 Pf.

Schobloch, Dr. A., **Ueber Beta- und Gammafunktionen.** gr. 4. geh. 60 Pf.

Dronke, Dr. A., **Einleitung in die höhere Algebra.** gr. 8. geh. 4 Mark 50 Pf.

Günther, Prof. Dr., **Studien zur Geschichte der mathematischen und physikalischen Geographie.** gr. 8. geh. 12 Mark.

Günther, Prof. Dr., **Die Lehre von den gewöhnlichen und verallgemeinerten Hyperbelfunktionen.** gr. 8. geh. 12 Mark.

Band III unter der Presse.

Band II, die Heimgegangenen des Jahres 1897 umfassend, erschien im Dezember 1898.
Preis: elegant broschirt M. 12,—; in gediegenem Halbfranzband M. 14—.

Soeben erschien:

Ludwig Bamberger

Erinnerungen

Mit Bildniß. — Preis br. 7,50, Lwd. 8,50, Hfz. 9,50 M.

Verlag von Georg Reimer in Berlin.

Verlag von **Georg Reimer** in Berlin,

zu beziehen durch jede Buchhandlung.

Die einzigen

absolut fehlerfreien, also

zuverlässigen

sind

A. L. Crelle's

Rechentafeln,

welche alles Multipliciren und Dividiren **mit Zahlen unter 1000 ganz ersparen,** bei grösseren Zahlen die Rechnung erleichtern und sicherer machen.

8. Auflage.

Preis solid in Ganzleinen gebunden M. 15.—.

Crelle's Rechentafeln stehen durch ihr absolutes Freisein von Fehlern allen späteren Nachahmungen ebenso sehr voran wie durch ihre klassische Einfachheit, den anderwärts unerreichten Reichthum fertiger Producte und die leichteste und uneingeschränkte Anwendungsfähigkeit.

Jahrbuch

über die

Fortschritte der Mathematik

begründet

von

Carl Ohrtmann.

Im Verein mit anderen Mathematikern

und unter besonderer Mitwirkung der Herren

Felix Müller und **Albert Wangerin**

herausgegeben von

Emil Lampe.

Band XXVIII.

Jahrgang 1897.

(In 3 Heften.)

Heft I: M. 13.—. Heft II: M. 6.—.

Band 121. Heft III.
Inhaltsverzeichniss.

Schlesinger, Ludwig. Ueber vertauschbare lineare Substitutionen . . . Seite 177

Timerding, H. E. Ueber eine Kugelschar . . . . . — 188

Wallenberg, Georg. Ueber *Riccati*sche Differentialgleichungen höherer Ordnung . . . . . — 196

— — Zur Theorie der Differentialinvarianten . . . . . — 200

Fuchs, Richard. Ueber lineare Differentialgleichungen, welche mit ihrer Adjungirten zu derselben Art gehören . . . . . — 205

Wallenberg, Georg. Die Differentialgleichungen, deren allgemeines Integral eine lineare gebrochene Function der willkürlichen Constanten ist . . — 210

Grünfeld, E. Ueber die einer linearen Differentialgleichung n-ter Ordnung adjungirten und associirten Differentialgleichungen n-ter Ordnung . . . — 218

Meder, Alfred. Zur Theorie der singulären Punkte einer Raumcurve . . — 230

Pirondini, Geminiano. Sur quelques lignes liées à l'hélice cylindrique . — 245

Sendungen von Beiträgen für das Journal erbittet die Redaction **ausschliesslich** unter der Adresse:

An die Redaction des Journals für die reine und angewandte Mathematik, Verlagsbuchhandlung von Georg Reimer. Berlin S.W., Anhaltstrasse 12.

GENERAL LIBRARY,
UNIV. OF MICH.
FEB 26 1900

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826.

Herausgegeben

von

L. Fuchs.

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich Preussischer Behörden.

Band 121.

Heft IV.

Ausgegeben den 6. Februar.

Berlin,
S.W. Anhaltstrasse 12.
Druck und Verlag von Georg Reimer.
1900.

Jährlich circa 6 Hefte. Vier Hefte bilden einen Band. Preis pro Band M. 12.—.

Verlag von **Louis Nebert** in Halle a. S.

Thomae, Prof. Dr. J., **Elementare Theorie der analytischen Funktionen einer complex. Veränderlichen. Zweite erweiterte Auflage.** gr. 4°. geheftet 9 Mark.

Enneper, Prof. Dr. A., **Elliptische Funktionen. Theorie und Geschichte.** Akademische Vorträge. **Zweite Auflage.** Neu bearbeitet und herausgegeben von Prof. Dr. **Felix Müller.** Lex.-8 geh. 18 M.

Thomae, Prof. Dr. J., **Die Kegelschnitte in rein projectiver Behandlung.** gr. 8. geh. 6 Mark.

Thomae, Prof. Dr. J., **Abriss e. Theorie d. Funktionen e. complexen Veränderlichen u. der Thetafunktionen. Dritte,** erheblich vermehrte **Auflage.** gr. 4. geh. 10 Mark.

Thomae, Prof. Dr. J., **Einleitung in die Theorie der bestimmten Integrale.** gr. 4. geh. 2 Mark 80 Pf.

Thomae, Prof. Dr. J., **Sammlung von Formeln, welche bei Anwendung der elliptischen und Rosenhain'schen Funktionen gebraucht werden.** gr. 4. geh. 3 Mark.

Thomae, Prof. Dr. J., **Ueber eine specielle Klasse Abel'scher Funktionen.** 2 Teile. gr. 4. geh. 9 Mark.

Thomae, Prof. Dr. J., **Ueber eine Funktion, welche einer linearen Differential- u. Differenzen-Gleichung IV. Ordn. Genüge leistet.** gr. 4. geh. 1 Mark 50 Pf.

Repetitorium der analytischen Geometrie. gr. 8. geh. 1 Mark 20 Pf.

Hofmann, Dr. F., **Methodik der stetigen Deformation von zweiblättrigen Riemann'schen Flächen.** Ein Uebungsbuch für den geometrischen Teil der Funktionentheorie. gr. 8. geh. 2 Mark.

Rulf, Prof. W., **Elemente der projektivischen Geometrie.** gr. 8. geh. 2 Mark 50 Pf.

Beau, Dr. O., **Analytische Untersuchungen im Gebiete der trigonometrischen Reihen und der Fourier'schen Integrale. Zweite** verb. u. verm. **Auflage.** gr. 4. geh. 5 Mark 50 Pf.

Odstrčil, Prof. Dr. J., **Kurze Anleitung zum Rechnen mit den (Hamilton'schen) Quaternionen.** gr. 8 geh. 2 Mark 25 Pf.

Hochheim, Prof. Dr. A., **Kâfî fîl Hisâb** (Genügendes über Arithmetik) **des Abu Bekr Muhammed Ben Alhusein Alkarkhî.** 3 Hefte. gr. 4. geh. 3 Mark 90 Pf.

Hochheim, Dr. A., **Ueber die Differentialcurven der Kegelschnitte.** gr. 8. geh. 3 Mark.

Hochheim, Dr. A., **Ueber Pole u. Polaren d. parabol. Curven III. Ordn.** gr. 4. geh. 1 Mark.

Langer, Dr. P., **Die Grundprobleme der Mechanik.** Eine kosmologische Skizze. gr. 8. geh. 1 Mark 80 Pf.

Frege, Dr. G., **Begriffsschrift.** Eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens. gr. 8. geh. 3 Mark.

Radicke, A., **Die Recursionsformeln für die Berechnung der Bernoulli'schen und Euler'schen Zahlen.** gr. 8. geh. 1 Mark 20 Pf.

Schobloch, Dr. A., **Ueber Beta- und Gammafunktionen.** gr. 4. geh. 60 Pf.

Dronke, Dr. A., **Einleitung in die höhere Algebra.** gr. 8. geh. 4 Mark 50 Pf.

Günther, Prof. Dr., **Studien zur Geschichte der mathematischen und physikalischen Geographie.** gr. 8. geh. 12 Mark.

Günther, Prof. Dr., **Die Lehre von den gewöhnlichen und verallgemeinerten Hyperbelfunktionen.** gr. 8. geh. 12 Mark.

Verlag von **Georg Reimer** in Berlin.

Band III soeben erschienen:

Biographisches Jahrbuch und Deutscher Nekrolog

Herausgegeben von D^R. A. BETTELHEIM

Jährlich ein stattlicher Band

Elegant brosch. M. 12,—
gebd. in Halbfranz M. 14,—

Band I. 1897.
Band II. 1898.
Band III. 1899.

. . . . . Möge das Buch nicht bloss in Büchereien aufgestellt, sondern auch auf Weihnachtstische deutscher Männer und Frauen gelegt werden. (*Allgem. Zeitung, München 1897*). *. . . . . Denkt man sich die voraussichtlich folgenden Jahrgänge zu einer gewissen Zahl erwachsen, so würde Deutschland mit dieser Neuschöpfung eine alljährlich sich erweiternde Monumentgalerie von nationaler Bedeutung gewonnen haben, nicht bloss ein unentbehrliches Nachschlagewerk, sondern zugleich einen fortlaufenden Quell gehalt- und weihevoller Belehrung für den Gebildeten.*
(*Leipziger Illustrirte Zeitung 2167.*)

Verlag von **Georg Reimer** in Berlin.

Erinnerungen von Ludwig Bamberger

Herausgegeben von DR. P. NATHAN

Preis brosch. M. 7,50
elegant gebd. in Ganzlwd. M. 8.50,
in Halbfrz. M. 9.50.

Diese Memoiren sind ein wichtiges politisches und vor allem auch kulturhistorisches Dokument; sie schildern in epischem Redefluss voll behaglicher Anschaulichkeit das politische und das gesellschaftliche Leben der hinter uns liegenden deutschen Werdezeit, gesehen von Deutschland und vom Auslande aus; sie berichten von dem Paris des dritten Kaiserreiches und sie enthalten eine Fülle von feinen, mit leiser Hand hingezeichneten Portraits hervorragender Menschen.

Die Gesellschaft

von

ERNST VICTOR ZENKER

I. BAND:

Natürliche Entwickelungsgeschichte der Gesellschaft

Preis M. 5,—

Aus dem Inhaltsverzeichniss: Geschichtliche Einleitung. I. Die Elemente der socialen Entwickelung: Die thierischen Gesellschaften. — Der sociale Urzustand des Menschen. — Primitive Wirthschaft. — Die Verwandtschaft. — Die Herrschaft. — Die gentile Verfassung. — II. Die politische Entwickelung: Der Prozess der politischen Entwickelung. — Die Formen der politischen Entwickelung.

Ernst Moritz Arndt

Ein Lebensbild in Briefen. — Nach ungedruckten und gedruckten Originalen herausgegeben von

HEINRICH MEISNER und
ROBERT GEERDS

Preis brosch. M. 7,—
gebd. in Halbfranz M. 8,75

. . . . . Aber wahrlich nicht dem Historiker allein muss der Schatz der Briefe werthvoll sein, jeder gebildete Deutsche wird sich erquickt fühlen durch den Anblick so kerniger deutscher Mannheit . . . . . .

(Preuss. Jahrbücher 1899).

Band 121. Heft IV.

Inhaltsverzeichniss.

Hamburger, M. Ueber die singulären Lösungen der algebraischen Differentialgleichungen höherer Ordnung . . . . . Seite 265

Kötter, Fritz. Ein bemerkenswerther Zusammenhang zwischen der Statik biegsamer unausdehnbarer Flächen und der Lehre von der Bewegung eines Körpers in einer Flüssigkeit . . . . . — 300

Appell, Paul. Sur une forme générale des équations de la dynamique . . — 310

Koenigsberger, Leo. Ueber die Entwickelungsform algebraischer Functionen und die Irreductibilität algebraischer Gleichungen . . . . . — 320

Sendungen von Beiträgen für das Journal erbittet die Redaction **ausschliesslich** unter der Adresse:

An die Redaction des Journals für die reine und angewandte Mathematik, Verlagsbuchhandlung von Georg Reimer. Berlin S.W., Anhaltstrasse 12.

65

00

10

20

eh

k,